UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

EXAMEN DE ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
Convocatoria ORDINARIA1 de 2013

Nombre:____DNI:______________

CONVALIDADOS:

GRUPOS Y POLINOMIOS	☐ SÍ. Nota____ ☐ NO	PRÁCTICAS	☐ Apto ☐ No apto

1. (10 puntos). Factorizar, calcular las raíces y sus multiplicidades, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de

$$p(x) = 2x^4 - 2 \qquad \text{y} \qquad q(x) = 10x^6 - 20x^4 + 10x^2$$

en $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{C}[x]$. ¿Es $5x^2 - 5$ un máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ en cada uno de los anillos anteriores? Razonar la respuesta.

2. (10 puntos). Sea $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ciclo de S_4 y $H=\{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$

i) Demostrar que H es subgrupo de S_4

ii) ¿Es H subgrupo de A_4?

iii) ¿Cuántos subgrupos propios tiene H?

3. (10 puntos) Enunciar el teorema del número de caminos y la consecuencia necesaria para calcular el número de geodésicas. Elegir dos vértices no adyacentes de $K_{3,3}$, y utilizar lo anterior, para determinar el número de geodésicas y la distancia entre ellos. Estudiar si $K_{3,3}$ es de Euler, completo y plano.

4. (15 puntos). Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ y sea U el subconjunto de V de todas las matrices simétricas con traza cero.

i) Comprobar que U es un subespacio vectorial y que $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de U. Calcular sus ecuaciones paramétricas e implícitas.

ii) Definimos en U

$$\langle A,D \rangle = \mathrm{Tr}\,(AD^t)$$

a) Calcular la matriz de Gram respecto de la base B de U.
b) ¿Es B base ortogonal?.
c) Calcular el ángulo que forman los dos vectores de la base B.
d) ¿Es B unitaria? Calcular una base unitaria a partir de B.

5. (15 puntos) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a un endomorfismo en un espacio vectorial, V, respecto de una base $B=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

a) Calcular la imagen del vector $v = v_1 + 3v_2$
b) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$
c) Clasificar f.
d) Calcular, si es posible, una base de V respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal.

Nota:
Enunciar e incluir en cada pregunta la teoría que usemos.
Para aprobar el examen es preciso obtener un mínimo de 2 puntos en las preguntas 1, 2 y 3, y de 3 puntos en la 4 y 5.