UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

EXAMEN DE ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2013

Nombre:____DNI:______________ GRUPO:_____

CONVALIDADOS:

PRELIMINAR TEMAS 1 y 2	☐ SÍ. Nota____ ☐ NO	PRÁCTICAS	☐ Apto ☐ No apto

1. (10 puntos) Dados los polinomios:

$$p(x) = 18 - 6x - 9x^2 + 3x^3 - 9x^4 + 3x^5 \quad \text{y} \quad q(x) = -12 - 4x + 6x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 2x^5$$

Calcular, utilizando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor de ambos en $\mathbb{Z}_5[x]$. ¿Es $d(x) = 3 + x^2 + x^4$ m.c.d. $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}_5[x]$?

2. (10 puntos) Sea A_3 el subgrupo alternado de permutaciones de 3 elementos. Se pide:
   a. Calcular su tabla de operaciones.
   b. ¿Es un grupo conmutativo? Razonar la respuesta.
   c. Calcular todos sus subgrupos.
   d. Determinar una operación que dote de estructura de grupo a $A_3 \times \mathbb{Z}_5[x]$.

3. (10 puntos) Consideramos el grafo G cuya matriz de incidencia es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:
   a. Calcular su matriz de adyacencia.
   b. ¿Es plano? ¿Es de Euler? ¿Es árbol?
   c. Calcular el número cromático y razonar si es 3-coloreable, 5-coloreable o 6-coloreable.

4. (15 puntos). Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ y sea U el subconjunto de V de todas las matrices triangulares inferiores de traza 0.
   a. Comprobar que U es un subespacio vectorial y calcular dimensión, una base de U, sus ecuaciones paramétricas e implícitas.
   b. Definimos en U un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de una base $B = \{u_1, u_2\}$es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

      i. Calcular el producto escalar $\langle v,w \rangle$ siendo $v = u_1 + u_2$ y $w = -u_2$
      ii. Calcular el ángulo que forman los dos vectores de v y w.
      iii. ¿Es B base ortogonal? ¿Es B unitaria? Calcular una base ortonormal a partir de B.

5. (15 puntos) Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial, V, dado por:

$$f(v_1) = 0,$$
$$f(v_2) = v_3 + v_4,$$
$$f(v_3) = 2v_3,$$
$$f(v_4) = -2v_2 + v_3 + 3v_4,$$

para una base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
   a) Calcular la expresión matricial de f respecto de B
   b) ¿Es f un automorfismo? Razonar la respuesta
   c) Calcular, si es posible, una base de V respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal.

Nota: Incluir toda la teoría que se use.