Grado en Ingeniería Informática

Análisis y Métodos Numéricos. Examen de Febrero. Curso 2010/2011.

EPS-Jaén. Departamento de Matemáticas. Universidad de Jaén.

APELLIDOS	NOMBRE	DNI	NOTA

1. (1 punto) Estudiar la convergencia de las series:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2\,n^2+n} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2\,n^4+n}$$

2. (4 puntos) Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2\,e^x, & \text{si } x\le 0,\\ x\,\ln(x), & \text{si } x>0.\end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Calcular los extremos relativos de f y sus asíntotas horizontales.

c) Calcular el valor de $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

d) Estudiar el carácter de la integral impropia $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$.

3. (1 punto) Indicar *Verdadero* o *Falso* justificando la respuesta:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3\,y^3}{2\,x^6+y^6}=0.$

b) La función $f(x,y)=x^4+y^4-4\,x\,y-2$ tiene en $(0,0)$ un máximo local.

1. (1 punto) Aplicar el método del punto fijo (3 iteraciones) empezando en $x_0=0$ para demostrar que las gráficas de las funciones $y=x$ e $y=\frac{x^4-2}{7}$ tienen un único punto de corte en el intervalo $[-1,1]$, comprobando previamente que se cumplen las condiciones de convergencia.

2. (1.5 puntos) Aproximar el valor de la integral $\int_0^1 x\,e^{x^2}dx$, usando la fórmula de Simpson compuesta con $n=2$. Comparar con el valor exacto.

3. (1.5 puntos) Dado el problema de valores iniciales

$$y'+x\,y=0,\ \ y(0)=1,$$

obtener una solución aproximada en el intervalo $[0,1]$ usando el método de Euler mejorado con paso $h=0{,}5$. Comparar con la solución exacta.

Nota: Todos los cálculos se realizarán con 6 cifras decimales redondeadas.

Solución

1. *a*) Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3}{2\,n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{n^2+3}{n^2}}{\dfrac{2\,n^2+n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ no se cumple la condición necesaria de convergencia y por tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2\,n^2+n}$ no converge.

   b) Como $a_n = \dfrac{n^2+3}{2\,n^4+n} > 0$ podemos usar el criterio de comparación en el límite con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie convergente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2+3}{2\,n^4+n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2}{2n^4+n} = \frac{1}{2} = L.$$

   Al ser $L \in \mathbb{R}$ y $L \neq 0$ ambas series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter y por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n^2+3}{2\,n^4+n}$ es convergente.

2. *a*) La función f es continua y derivable para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser producto de funciones continuas y derivables en su dominio. El único punto conflictivo es entonces $x = 0$.

   Continuidad en $x = 0$. Estudiamos los límites laterales usando la regla de L'Hôpital en el segundo caso, por tratarse de una indeterminación del tipo $0 \cdot (-\infty)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 \mathrm{e}^x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} == \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

   Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y por tanto la función es continua en $x = 0$.

   Derivabilidad en $x = 0$. Aplicando las reglas de derivación se obtiene que

$$f'(x) = \begin{cases} (2x + x^2)\,\mathrm{e}^x, & \text{si } x < 0, \\ \ln(x) + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Como f es continua en $x = 0$ podemos calcular las derivadas laterales de la siguiente forma:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x + x^2)\,\mathrm{e}^x = 0,$$
$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty.$$

   Entonces al no existir la derivada por la derecha podemos afirmar que f no es derivable en $x = 0$.

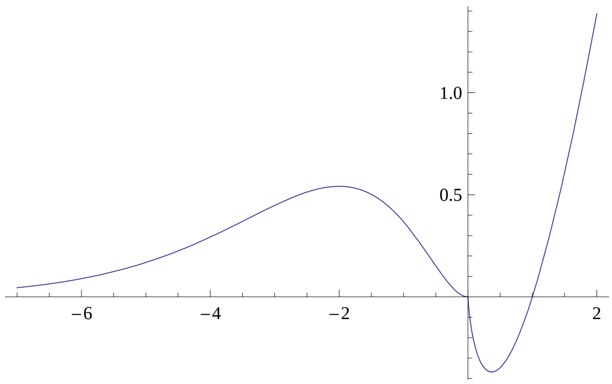

Figura 1: Gráfica de la función f del Ejercicio 2.

b) Extremos relativos. Los candidatos a extremos relativos son $x = 0$ donde f no es derivable y los puntos donde la derivada se anula, que son

$$f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad x < 0 \Longleftrightarrow (2x{+}x^2)\,\mathrm{e}^x = 0 \quad \text{y} \quad x < 0 \Longleftrightarrow 2x{+}x^2 = 0 \quad \text{y} \quad x < 0 \Longleftrightarrow x = -2,$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad x > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x > 0 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Para analizar la existencia de extremos estudiamos el signo de la derivada

$$f'(x) > 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, -2) \Longrightarrow \quad f \text{ es creciente en } (-\infty, -2),$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{en} \quad (-2, 0) \Longrightarrow \quad f \text{ es decreciente en } (-2, 0),$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{en} \quad (0, \mathrm{e}^{-1}) \Longrightarrow \quad f \text{ es decreciente en } (0, \mathrm{e}^{-1}),$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{en} \quad (\mathrm{e}^{-1}, +\infty) \Longrightarrow \quad f \text{ es creciente en } (\mathrm{e}^{-1}, +\infty).$$

Por tanto f alcanza un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = \mathrm{e}^{-1}$ (en $x = 0$ no se alcanza ni un máximo ni un mínimo).

Asíntotas horizontales. Para analizar la presencia de asíntotas horizontales calculamos los siguientes límites, utilizando la regla de L'Hôpital en el primer caso

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{-x}} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\ln(x) = +\infty.$$

Entonces la única asíntota horizontal es $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. Puede verse la gráfica de la función f en la Figura 1.

c) Por la definición de integral y de las sumas de Riemann se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\Bigg]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

donde la última integral se ha resuelto por partes haciendo $\begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,d\,x \\ \\ dv = x\ dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$.

d) Por la definición de integral impropia se cumple que

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x^2 e^x dx.$$

Calculamos la integral aplicando la fórmula de integración por partes (2 veces) haciendo primero $\left[\begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2\,x\,d\,x \\ dv = e^x\;dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right]$ y luego $\left[\begin{array}{c} u = 2\;x \Rightarrow du = 2\,d\,x \\ dv = e^x\;dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right]$

$$\int x^2\;e^x\,dx = x^2\;e^x - \int 2\,x\;e^x\;dx = x^2\;e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = (x^2-2x+2)e^x + c,$$

y ahora calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} (x^2-2x+2)e^x\Big]_{x=a}^{x=0} = \lim_{a\to-\infty} 2-(a^2-2a+2)e^a =$$

$$= 2 - \lim_{a\to-\infty} \frac{a^2-2a+2}{e^{-a}} = 2 - \lim_{a\to-\infty} \frac{2a-2}{-e^{-a}} = 2 - \lim_{a\to-\infty} \frac{2}{e^{-a}} = 2-0 = 2.$$

Entonces $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx = 2$ y se trata de una integral impropia convergente.

3. *a*) Calculando los límites direccionales obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,y=m\,x} \frac{x^3\,y^3}{2\,x^6+y^6} = \lim_{x\to0} \frac{x^3(m\,x)^3}{2x^6+(m\,x)^6} = \lim_{x\to0} \frac{m^3\,x^6}{x^6(2+m^6)} = \lim_{x\to0} \frac{m^3}{2+m^6} = \frac{m^3}{2+m^6}.$$

Por tanto los límites direccionales dependen de m (por ejemplo, si $m=0$ el límite es 0 y si $m=1$ el límite es $\frac{1}{3}$) y por consiguiente el límite en dos variables no existe, siendo el enunciado FALSO.

b) Claramente $(0,0)$ es un punto crítico porque es solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3-4y = 0, \\ \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y^3-4x = 0. \end{array}\right.$$

Usando el criterio del Hessiano

$$H(x,y) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 12\,x^2 & -4 \\ -4 & 12\,y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H(0,0) = det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0,$$

se concluye que f tiene en $(0,0)$ un punto de silla, por tanto el enunciado es FALSO.

4. La abscisa de un punto de corte será solución de la ecuación $x = \dfrac{x^4-2}{7}$. Definimos la función $\Phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi(x) = \frac{x^4-2}{7},$$

y comprobamos que se cumplen las condiciones de convergencia:

(i) $\Phi'(x) = \dfrac{4\,x^3}{7}$ es continua en $[-1,1]$.

(ii) $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \Phi(x) \leq 1$.

La función $\Phi(x) = \dfrac{x^4 - 2}{7}$ es par (simétrica respecto al eje OY) y creciente en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto

$$\max_{x\in[-1,1]} \Phi(x) = \Phi(1) = -\frac{1}{7},$$

$$\min_{x\in[-1,1]} \Phi(x) = \Phi(0) = -\frac{2}{7},$$

y por lo tanto para todo $x \in [-1, 1]$

$$-1 \leq -\frac{2}{7} = \min_{x\in[-1,1]} \Phi(x) \leq \Phi(x) \leq \max_{x\in[-1,1]} \Phi(x) = -\frac{1}{7} \leq 1.$$

(iii) $|\Phi'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Puesto que $|x| \leq 1$ se sigue que

$$|\Phi'(x)| = \left|\frac{4\,x^3}{7}\right| = \frac{4\,|x|^3}{7} \leq \frac{4}{7} = K < 1.$$

Al cumplirse las condiciones de convergencia tenemos garantizado que la sucesión

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

converge a la única solución en $[-1, 1]$ de la ecuación $x = \dfrac{x^4 - 2}{7}$. Realizando 3 iteraciones obtenemos la aproximación

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \Phi(x_0) = -2/7 = -0{,}285714 \\ x_2 &= \Phi(x_1) = -0{,}284762 \\ x_3 &= \Phi(x_2) = -0{,}284775 \end{aligned}$$

El valor aproximado del punto de corte será entonces $(-0{,}284775, -0{,}284775)$.

5. Al aplicar la fórmula de Simpson compuesta con $n = 2$ para aproximar la integral de la función $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$ se obtiene

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0{,}5}{6}(f(0) + f(1) + 2f(0{,}5) + 4(f(0{,}25) + f(0{,}75))) = 0{,}860997$$

El valor exacto de la integral es

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \left.\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e} - 1}{2} = 0{,}859141,$$

y por tanto el error cometido es

$$\text{Error} = \left|\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx - 0{,}860997\right| = 0{,}001856$$

6. Vamos a calcular la solución exacta del problema de valor inicial. Primero resolvemos la ecuación diferencial separando las variables

$$\frac{dy}{dx} = -x\,y\ ;\ \frac{dy}{y} = -x\,dx\ ;\ \int \frac{dy}{y} = \int -x\,dx\ ;\ \ln(|y|) = -\frac{x^2}{2} + c\ ;\ y = k\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

y ahora despejamos el valor de k usando la condición inicial

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow k\, e^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

Entonces la solución exacta es $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Aplicando ahora el método de Euler mejorado

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f(x_k + h, y_k + k\, K_1), \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2), \quad k = 0, 1, \end{cases}$$

con los datos $f(x, y) = -x\, y$, $h = 0{,}5$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 1$ y comparando con el valor exacto se obtiene

$$\begin{pmatrix} k & x_k & y_k & y(x_k) & e_k = |y_k - y(x_k)| \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}875 & 0{,}882497 & 0{,}007497 \\ 2 & 1 & 0{,}601563 & 0{,}606531 & 0{,}004968 \end{pmatrix}.$$