PRÁCTICA 2.- Continuidad y Derivación

1. Límite de funciones reales de una variable real

La orden que permite realizar el cálculo del límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a es **Limit.** La sintaxis de la instrucción **Limit** es la siguiente:

Limit[*expresión*, *variable*→**a]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* (finito o infinito)

Limit[*expresión*, *variable*→**a, Direction→-1]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* por la derecha.

Limit[*expresión*, *variable*→**a, Direction→1]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* por la izquierda

■ **Ejemplo 1.** ***Calcular los siguientes límites:***

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

```
Limit[Sin[x]/x, x -> 0]
```

```
1
```

b) $\lim_{x\to\infty} x \ln\left[\frac{x+3}{x-3}\right]$

```
Limit[x Log[(x + 3)/(x - 3)], x → ∞]
```

```
6
```

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

```
Limit[(1 - ⅇ^(1/x))/(1 + ⅇ^(1/x)), x -> 0, Direction → -1]
```

```
-1
```

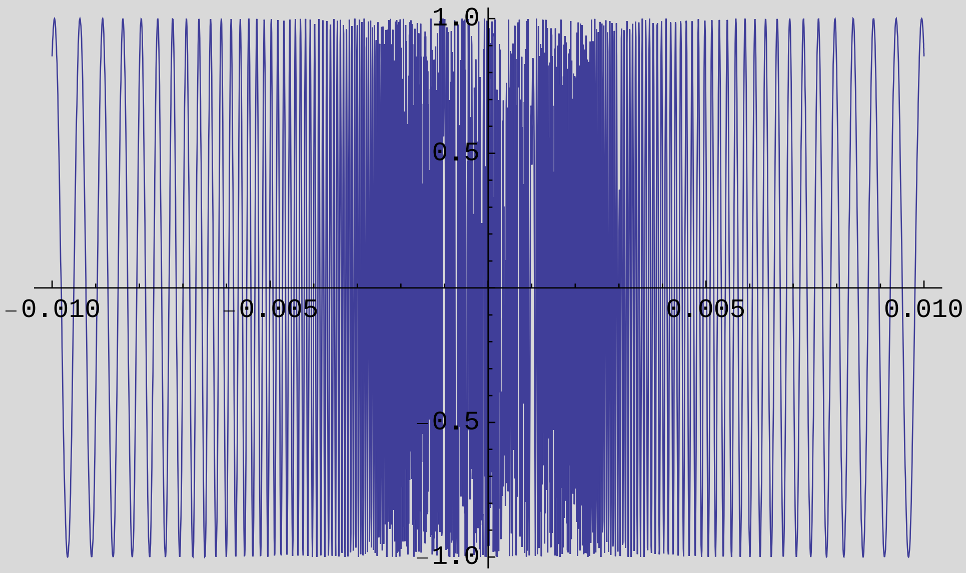
d) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

```
Limit[Cos[1 / x], x -> 0]
```

```
Interval[{-1, 1}]
```

El programa *Mathematica* no ha sido capaz de calcular el límite anterior. En este caso, esto es debido a que dicho límite no existe. De hecho la información facilitada por el programa nos indica que cualquier punto del intervalo [-1,1] es un límite de oscilación de la función cuando x tiende a 0. Esto se aprecia observando la gráfica de la función:

```
Plot[Cos[1/x], {x, -.01, .01}]
```



1.1. Asíntotas de una función

Asíntotas verticales: La recta vertical $x = a$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ si se cumple que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales: La recta horizontal $y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ en la dirección $+\infty$ si cumple que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

Análogamente, la recta horizontal $y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ en la dirección $-\infty$ si cumple que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

<u>Asíntotas oblicuas</u>: La recta $y = m\,x + n$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ si se cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\mathrm{mx} + n)) = 0$$

Los valores de m y n se determinan de la siguiente manera,

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad \mathrm{n} = \lim_{x\to+\infty}(\mathrm{f(x) - mx})$$

Análogamente se define para $x \to -\infty$.

Ejemplo 2. Determinar las asíntotas de la función $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := (2 x + 1)/(x^2 - 4)
```

```
Solve[x^2 - 4 == 0, x]

{{x → -2}, {x → 2}}
```

Asíntotas verticales: Dado que el denominador se anula para $x = -2$ y $x = 2$, dichas rectas (verticales) son candidatas a ser asíntotas. Para ello estudiamos los límites laterales en los puntos $x = 2$ y $x = -2$.

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → -1]

∞
```

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → 1]

-∞
```

```
Limit[f[x], x → -2, Direction → -1]

∞
```

```
Limit[f[x], x → -2, Direction → 1]
```

$-\infty$

Por tanto, la recta vertical $x = 2$ es una asíntota de la función.
Asíntotas horizontales: Calculamos el límite en $+\infty$ y $-\infty$

```
Limit[f[x], x → ∞]
```

0

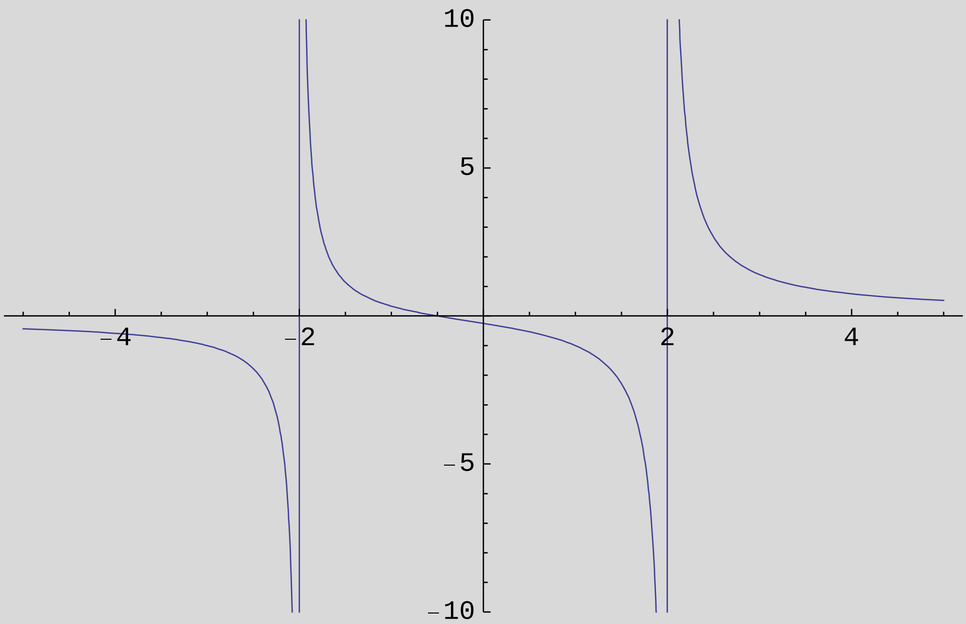
```
Limit[f[x], x → -∞]
```

0

Esto nos dice que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función en las direcciones $+\infty$ y $-\infty$.

Gráfica de la función:

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotRange → {-10, 10}]
```



2. Continuidad

Una función f: $D \to R$ es continua en un punto $a \in D$ si se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplo 3. Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{2}{1-e^{1/x}}$, *si* $x \neq 0$; $f(0) = 0$

a) Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := 2/(1 + ⅇ^(1/x))
f[0] = 0;
```

Estudiamos la continuidad. Sólo es necesario estudiar la continuidad en $x = 0$. Calcularemos los límites laterales en $x = 0$.

```
Limit[f[x], x → 0, Direction → -1]
```

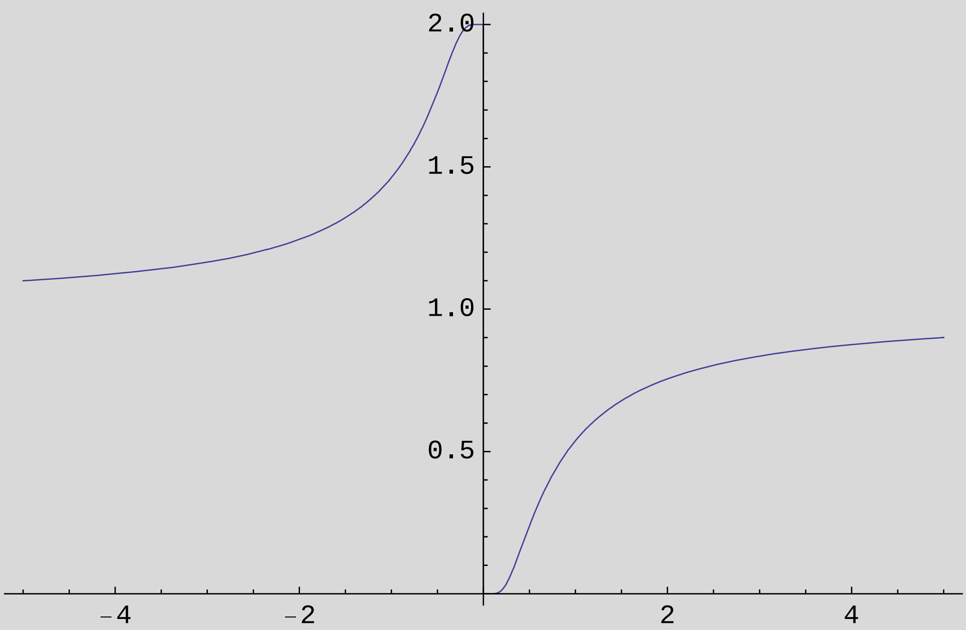
```
0
```

```
Limit[f[x], x → 0, Direction → 1]
```

```
2
```

Como los límites laterales son distintos entonces la función presenta en $x = 0$ una discontinuidad esencial de primera especie (salto finito), lo que se observa gráficamente:

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



b) $f(x) = x^3 - 2x$, si $x < -1$; $f(x) = 3 + 2x$, si $-1 \leq x < 2$; $f(x) = x^2 - 2x$, si $x \geq 2$.

Se trata de una función definida a trozos. Cada uno de los trozos viene dado por una función continua. Por tanto, sólo tenemos que estudiar la continuidad de la función *f* en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Which[x < -1, x^3 - 2 x, -1 ≤ x < 2, 3 + 2 x, x ≥ 2, x^2 - 2 x]
```

Continuidad en $x = -1$

Calculamos los límites laterales en x = -1

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → 1]

1
```

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → -1]

1
```

Calculamos el valor de f en x = -1

```
f[-1]

1
```

Como los límites laterales coinciden y son iguales al valor de la función en x = -1, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x = 2$

Calculamos los límites laterales en x = 2

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → 1]

7
```

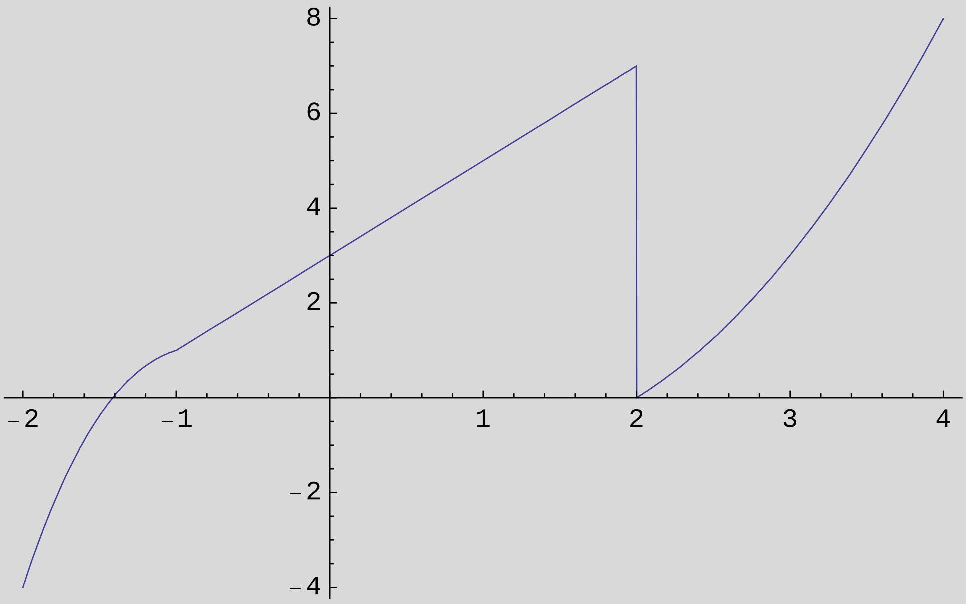
```
Limit[f[x], x → 2, Direction → -1]

0
```

Como los límites son distintos, la función no es continua en dicho punto (tiene una discontinuidad de salto en $x = 2$).

Gráfica de la función

```
Plot[f[x], {x, -2, 4}]
```



3. Derivación

Mathematica puede calcular la derivada de una función con las instrucciones,

D[*expresión*, *variable*] Calcula la derivada de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada.

D[*expresión*, {*variable*,*n*}**]** Calcula la derivada de orden **n** de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada.

Si tenemos definida una función **f[x]**, entonces la derivada también puede calcularse como: f '[x], f ''[x], f '''[x], ..., calcula la derivada primera, segunda, tercera, etc. de la función f[x]. Veamos algunos ejemplos:

```
D[Sin[x], x]
```

```
Cos[x]
```

```
D[Log[x], {x, 2}]
```

$$-\frac{1}{x^2}$$

```
D[(1 + x)^(1/3), {x, 3}]
```

$$D\left[\sqrt[3]{1+x}, \{x, 3\}\right]$$

$$\frac{10}{27\,(1+x)^{8/3}}$$

```
Sin'[x]
```

```
Cos[x]
```

$$f[x\_] := x^3 - 2\,x^2 + 9$$

```
f'[x]
```

$$-4\,x + 3\,x^2$$

Mathematica también calcula la derivada de expresiones simbólicas:

```
Clear["Global`*"]
```

```
D[f[x] * g[x], x]
```

```
g[x] f′[x] + f[x] g′[x]
```

```
D[Log[f[x]], x]
```

$$\frac{f'[x]}{f[x]}$$

■ Ejemplo 4 *Calcular los máximos y los mínimos relativos de la función f(x)* = $(x-1)^3\,e^x$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := (x - 1)^3 ⅇ^x
```

```
f'[x] == 0 // Simplify
```

```
ⅇ^x (-1 + x) (2 + x) == 0
```

```
Solve[f'[x] == 0]
```

```
{{x → -2}, {x → 1}, {x → 1}}
```

Hay dos puntos críticos x = -2 y x = 1. Para determinar si se trata de máximos o mínimos relativos calculamos las derivadas de orden superior:

```
f''[-2]
```

$$\frac{9}{e^2}$$

Hay un mínimo relativo en x = -2.

```
f''[1]
```

```
0
```

Como la segunda derivada es cero calculamos la tercera derivada.

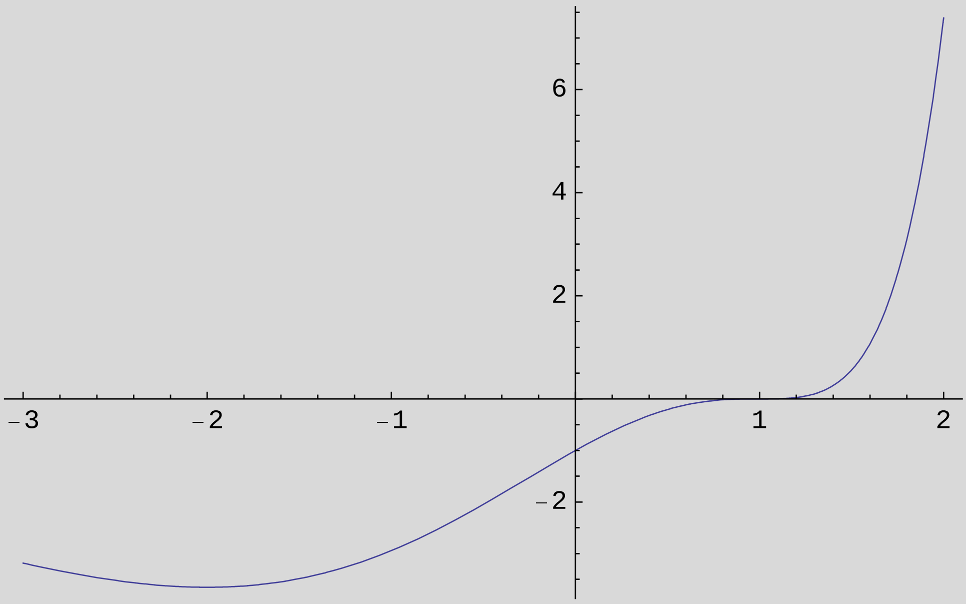
```
f'''[1]
```

```
6 ⅇ
```

Como la primera derivada distinta de cero es de orden impar, la función tiene un punto de inflexión en x = 1.

Gráfica de la función

```
Plot[f[x], {x, -3, 2}]
```



4. Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$ centrado en el punto $x = a$ viene dado por

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El polinomio de Taylor es una buena aproximación de la función en un entorno del punto $x = a$. Cuando $a = 0$ el polinomio de Taylor se denomina también polinomio de MacLaurin.

■ **Ejemplo 5** ***Calcular el polinomio de MacLaurin de orden 3 de la función f(x) = sen x***

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Sin[x]
```

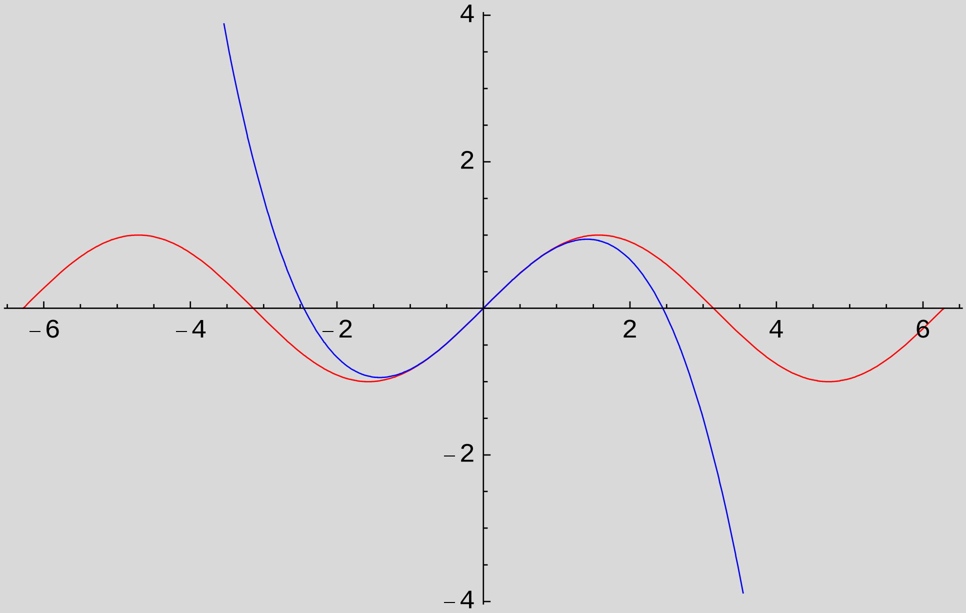
Calculamos el polinomio de MacLaurin de orden 3

$$\text{p[x\_] = f[0]} + \frac{\text{f'[0]}}{1!}\,x + \frac{\text{f''[0]}}{2!}\,x^2 + \frac{\text{f'''[0]}}{3!}\,x^3$$

$$x - \frac{x^3}{6}$$

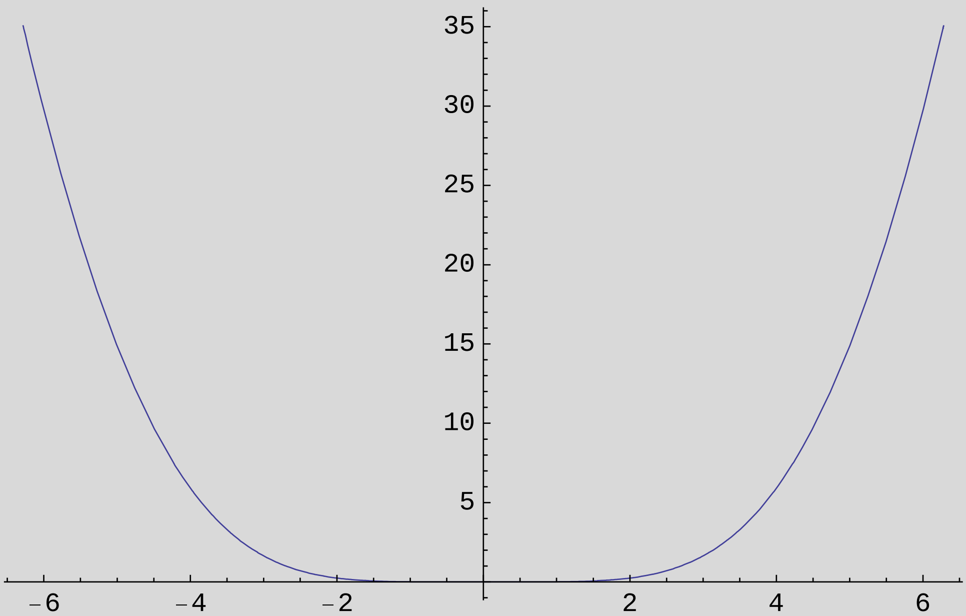
Representación gráfica

```
Plot[{f[x], p[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Puede observarse que la gráfica de la función (rojo) y la gráfica del polinomio (azul) son muy parecidas en las proximidades del punto $x = 0$. Esta “buena aproximación” puede también constatarse si representamos la gráfica de la función $|f(x) - p(x)|$ (función que nos da el error cometido al sustituir la función $f(x)$ por su polinomio de Taylor).

```
Plot[Abs[f[x] - p[x]], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → All]
```



Se aprecia en la gráfica que el error aumenta a medida que nos alejamos del punto $x = 0$, siendo muy pequeño en el intervalo [-2,2].

Mathematica incorpora la instrucción **Series** que nos permite calcular directamente el polinomio de Taylor de orden n de una función en un punto. La sintaxis de esta instrucción es:

Series[f[x],{x,a,n}]

En nuestro ejemplo anterior podemos escribir

```
Series[f[x], {x, 0, 3}]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$$

El término $O(x^4)$ nos indica que el error cometido al sustituir la función $f(x)$ por el polinomio será del orden de x^4, lo cual viene a decirnos que para valores de x próximos a 0 el error será muy pequeño.

Podemos pedirle a *Mathematica* que nos muestre el polinomio de Taylor sin que aparezca el orden del error mediante la instrucción:

```
Normal[Series[f[x], {x, 0, 3}]]
```

$$x - \frac{x^3}{6}$$

Ejemplo 6 *Calcular el valor aproximado de* $\sqrt[3]{1.2}$ *a partir del polinomio de Taylor de orden 5 centrado en a=1 de la función f dada por f(x) =*$\sqrt[3]{x}$ *.*

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := ∛x
```

Calculamos el polinomio de Taylor de orden 5 centrado en $a = 1$

```
p[x_] = Normal[Series[f[x], {x, 1, 5}]]
```

$$1 + \frac{1}{3}(-1 + x) - \frac{1}{9}(-1 + x)^2 + \frac{5}{81}(-1 + x)^3 - \frac{10}{243}(-1 + x)^4 + \frac{22}{729}(-1 + x)^5$$

Valor aproximado de utilizando el polinomio

```
p[1.2]
```

```
1.06266
```

Error cometido

```
Abs[f[1.2] - p[1.2]]
```

1.29364×10^{-6}

5. Ejercicios propuestos

1.-Calcular los siguientes límites:

- $\lim_{x\to 0} \frac{6x - \text{sen}(2x)}{2x + 3\,\text{sen}(4x)}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$
- $\lim_{x\to \infty} x \,\text{arcsen}(1/x)$

2.-Determinar las asíntotas de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado obtenido.

- $f(x) = \frac{2+x}{x^2(1-x)}$
- $f(x) = 2 - \sqrt{1 + x^2}$

3.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado

obtenido.

- **f(x)=$\frac{\text{sen}(x-2)}{x-2}$ si x≠2, f(2)=2.**
- **f(x)=$\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ si x≠1, f(1)=-3.**

4.- Encontrar los extremos relativos de las siguientes funciones en el dominio que se indica. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado obtenido.

- **f(x)=$\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}$, |x|>1.**
- **f(x)=sen($\frac{x}{x-2}$), x>3**
- **f(x)=$3x - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{4}$, x∈R.**

5.-Calcular a y b para que la función f(x)=a $(x-1)^2+2$ si x<1 y f(x)=x^3-2bx si x≥1 sea derivable en x=1. Representar gráficamente la función para distintos valores de los parámetros a y b.

6.-Calcular las derivadas laterales de la función

$$f[x] = \frac{|x|}{x^2+1}$$

en el punto $x=0$. ¿Es derivable la función en x=0?

7.- Determinar los puntos de la gráfica $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = -3x+1$.

8.- Calcular el valor aproximado (indicando el error cometido) de cos(π / 8) utilizando el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f[x] = \text{Cos}[2x]$ centrado en x=0.