Práctica 1.- Sucesiones y series

El programa Mathematica nos sirve de ayuda para estudiar el comportamiento de sucesiones y series de números reales, mediante las instrucciones Limit y $\sum$, que nos permitirán, en la mayoría de los casos, calcular el límite de una sucesión y la suma de una serie, respectivamente. Asimismo el programa Mathematica nos facilita el estudio de sucesiones recurrentes.

1. - Sucesiones de números reales

Ejercicio 1.1 Estudiar la sucesión de término general $a_n = \frac{3}{n^2+1}$.

• Definimos la sucesión

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
a[n_] := 3/(n^2 + 1)
```

• Generamos una tabla con los 20 primeros términos de la sucesión

In[3]:=
```
terminos = Table[a[n], {n, 1, 20}]
```

Out[3]=

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \frac{3}{26}, \frac{3}{37}, \frac{3}{50}, \frac{3}{65}, \frac{3}{82}, \frac{3}{101}, \frac{3}{122}, \frac{3}{145}, \frac{3}{170}, \frac{3}{197}, \frac{3}{226}, \frac{3}{257}, \frac{3}{290}, \frac{3}{325}, \frac{3}{362}, \frac{3}{401}\right\}$$

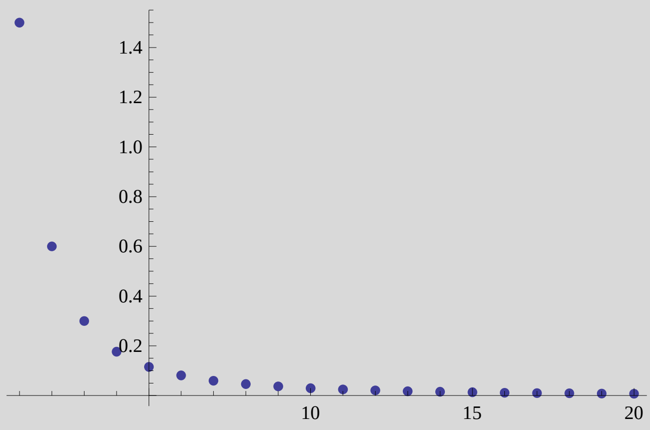
In[4]:=
```
Table[a[n], {n, 1, 20}] // N
```

Out[4]=
```
{1.5, 0.6, 0.3, 0.176471, 0.115385, 0.0810811, 0.06, 0.0461538,
 0.0365854, 0.029703, 0.0245902, 0.0206897, 0.0176471, 0.0152284,
 0.0132743, 0.0116732, 0.0103448, 0.00923077, 0.00828729, 0.0074813}
```

• Los visualizamos gráficamente

In[5]:=
```
ListPlot[terminos, PlotStyle -> PointSize[0.015], PlotRange → All]
```

Out[5]=



• También podemos hallar un término cualquiera de la sucesión :

In[6]:=
```
a[3]
```

Out[6]= $\frac{3}{10}$

In[7]:=
```
a[31]
```

Out[7]= $\frac{3}{962}$

Gráficamente se observa que la sucesión es decreciente, acotada y que tiende a 0. Veamos como podemos estudiar estos aspectos con Mathematica.

• Crecimiento :

In[8]:=
```
Simplify[a[n] ≥ a[n + 1]]
```

Out[8]= $\frac{3}{1+n^2} \geq \frac{3}{1+(1+n)^2}$

El programa no nos da información sobre si la desigualdad planteada es cierta o no. Esto es debido, entre otras cosas, a que el programa no reconoce a la variable n como un número natural. La siguiente instrucción resuelve este problema.

In[9]:=
```
Simplify[a[n] ≥ a[n + 1], n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[9]=
```
True
```

• Acotación:

In[10]:=
```
Simplify[0 ≤ a[n] ≤ 1.5, n ∈ Integers ∧ n > 0]
```

Out[10]=
```
True
```

• Límite :

In[11]:=
```
Limit[a[n], n → ∞]
```

Out[11]=
```
0
```

También podemos utilizar variables como subíndices. De esta forma, la sucesión anterior podría definirse como

In[12]:=
$$a_{n\_} := \frac{3}{n^2 + 1}$$

Esto nos permite utilizar la misma terminología que habitualmente usamos en clase, aunque si utilizamos esta notación en *Mathematica* hemos de tener mucho cuidado al escribir los subíndices.

Ejemplo 1.2 Calcular el límite de la sucesión de término general $b_n = \frac{2^n}{n^3+\pi^n}$

• Definimos la sucesión

In[13]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$b_{n\_} := \frac{2^n}{n^3 + \pi^n}$$

• Calculamos su límite

In[15]:=
$$\text{Limit}[b_n, n \to \infty]$$

Out[15]=
```
0
```

Ejemplo 1.3 Calcular el límite de la sucesión de término general $c_n = \cos(n\,\pi)$

• Definimos la sucesión

In[16]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$c_{n\_} := \text{Cos}[n\,\pi]$$

• Calculamos su límite con Mathematica

In[18]:=
$$\text{Limit}[c_n, n \to \infty]$$

Out[18]=
```
Interval[{-1, 1}]
```

En este caso *Mathematica* no es capaz de darnos el valor del límite debido a que se trata de una sucesión oscilante, es decir, que tiene dos subsucesiones con distinto límite (por tanto, la sucesión no será convergente).

• Estudiemos la sucesión de términos pares :

In[19]:=
```
c2 n
```

Out[19]=
```
Cos[2 n π]
```

Observemos que Mathematica no identifica cos(2nπ) = 1. Esto se debe a que, como hemos comentado anteriormente, el programa no reconoce a la variable n como un número natural. Para ello debemos utilizar la instrucción :

In[20]:=
```
Simplify[c2 n, n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[20]=
```
1
```

Ahora también podemos calcular su límite

In[21]:=
```
Limit[Simplify[c2 n, n ∈ Integers ⋀ n > 0], n → ∞]
```

Out[21]=
```
1
```

• Estudiemos ahora la sucesión de términos impares :

In[22]:=
```
c2 n-1
```

Out[22]=
```
Cos[(-1 + 2 n) π]
```

In[23]:=
```
Simplify[c2 n-1, n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[23]=
```
-1
```

In[24]:=
```
Limit[Simplify[c2 n-1, n ∈ Integers ⋀ n > 0], n → ∞]
```

Out[24]=
```
-1
```

La sucesión $\{c_n\}$ admite dos subsucesiones que tienen distinto límite. Por tanto la sucesión es oscilante.

1.1 - Sucesiones recurrentes

Ejemplo 1.4 Estudiar la sucesión recurrente dada por $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_n = x_{n-1}\, e^{1-x_{n-1}}$.

Definimos la sucesión

In[25]:=
```
Clear["Global`*"]
x[1] := 1/2
x[n_] := x[n - 1] ⅇ^(1-x[n-1])
```

Ahora podemos determinar cualquier término de la sucesión (o un valor aproximado del mismo).

In[28]:=
```
x[2]
```

Out[28]= $\frac{\sqrt{e}}{2}$

In[29]:=
```
x[2] // N
```

Out[29]=
```
0.824361
```

In[30]:=
```
x[5]
```

Out[30]= $\frac{1}{2} e^{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}}-\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}}}}$

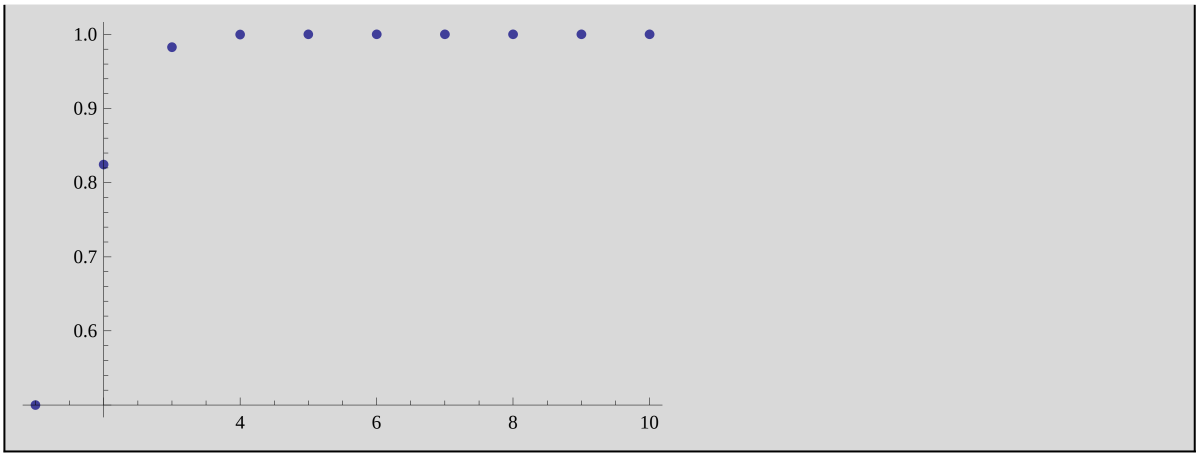
In[31]:=
```
N[x[5], 20]
```

Out[31]=
```
0.99999998839208560487
```

Visualizamos gráficamente los términos de la sucesión

In[32]:=
```
terminos := Table[x[n], {n, 1, 10}]
ListPlot[terminos, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```

Out[33]=



Gráficamente se observa que la sucesión es creciente y que está acotada y, por tanto, será convergente.

Si tratamos de calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}$ mediante la instrucción Limit el programa queda inmerso en un proceso recursivo infinito y no es capaz de darnos el valor del límite.

```
Limit[x[n], n -> ∞] (Se quedaría bloqueado ...)
```

En estos casos, para calcular el límite de la sucesión hemos de seguir el procedimiento visto en clase. Si llamamos L al límite de la sucesión, entonces debe cumplirse que L =L e^{1-L}. Ahora podemos pedirle a Mathematica que nos resuelva esta ecuación.

In[34]:=
```
Solve[L == L ⅇ^(1-L), L]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so
some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. ≫

Out[34]=
```
{{L → 0}, {L → 1}}
```

In[35]:=
```
Reduce[L == L ⅇ^(1-L), L]
```

Out[35]=
```
(C[1] ∈ Integers && L == 1 + 2 ⅈ π C[1]) || L == 0
```

Las únicas soluciones reales de la ecuación anterior son

$$L = 0 \text{ y } L = 1.$$

Como $x_1 = \frac{1}{2}$ y la sucesión x_n es creciente descartamos $L = 0$ como límite, y por tanto el límite es $L = 1$

Ejemplo 1.5 Estudiar la sucesión de Fibonacci dada por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

• Definimos la sucesión

In[36]:=
```
Clear["Global`*"]
x_1 = 1;
x_2 = 1;
x_n_ := x_(n-1) + x_(n-2)
```

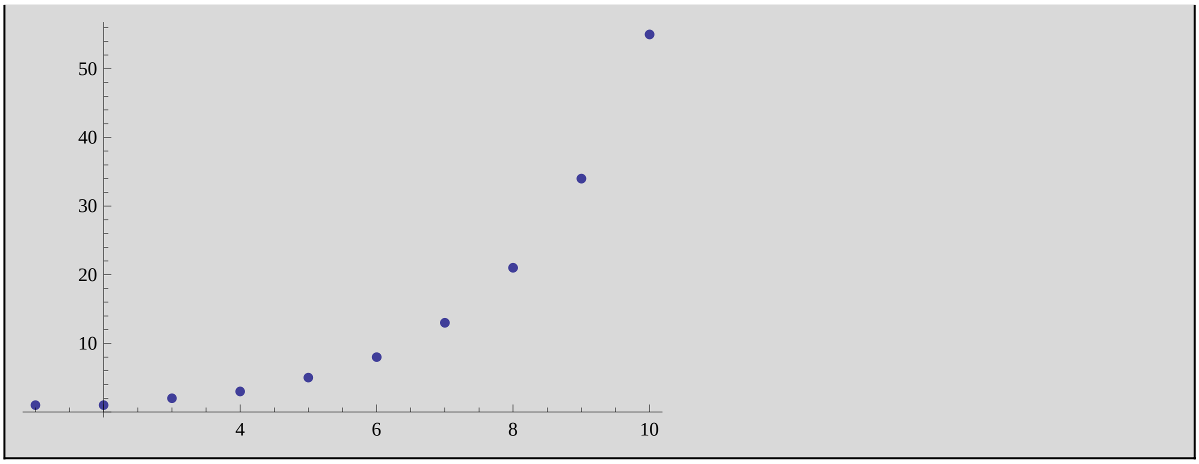
• Calculamos algunos términos

In[40]:=
```
terminos = Table[x_n, {n, 1, 10}]
```

Out[40]=
```
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}
```

In[41]:=
```
ListPlot[terminos, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```

Out[41]=



Se trata de una sucesión estrictamente creciente y que no está acotada, por lo que será divergente.

2. - Series de números reales

Ejemplo 2.1 Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n-2}$ es convergente. Calcular su suma.

• Definimos el término general de la serie

In[42]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$a_{n\_} := \frac{1}{2 n^2 + 3 n - 2}$$

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[44]:= $\text{Limit}[a_n, n \to \infty]$

Out[44]= 0

La serie puede ser convergente.

• Criterio del cociente

In[45]:= $\text{Limit}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}, n \to \infty\right]$

Out[45]= 1

Entonces el criterio del cociente no decide. Apliquemos el criterio de comparación por paso al límite:

In[46]:=
```
b[n_] := 1/n^2
```

In[47]:=
```
Limit[a[n]/b[n], n → ∞]
```

Out[47]=
$$\frac{1}{2}$$

Como el límite es un número real positivo las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^2 + 3 n - 2}$.

• Calculamos su suma (Mathematica puede calcula el valor exacto de la suma de diferentes tipos de series)

In[48]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^2 + 3 n - 2}$$

Out[48]=
$$\frac{1}{10} (3 + 2 \text{Log}[4])$$

In[49]:=
$$N\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^2 + 3 n - 2}\right]$$

Out[49]=
```
0.577259
```

Ejemplo 2.2 Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ es convergente.Calcular su suma a partir de la sucesión de sumas parciales.

• Definimos el término general de la serie

In[50]:=
```
Clear["Global`*"]
a[n_] := n/2^n
```

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[52]:=
```
Limit[a[n], n → ∞]
```

Out[52]=
```
0
```

La serie puede ser convergente.

• Criterio del cociente

In[53]:=
```
Limit[a_{n+1}/a_n, n → ∞]
```
$$\text{Limit}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}, n \to \infty\right]$$

Out[53]=
$$\frac{1}{2}$$

Como el límite es L=$\frac{1}{2}$ < 1 el criterio del cociente garantiza que la serie es convergente. Calculemos la sucesión de sumas parciales:

In[54]:=
$$s_{n\_} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Out[54]=
$$2^{-n} \left(-2 + 2^{1+n} - n\right)$$

Mathematica nos facilita en este caso una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Ahora podemos calcular el valor de la suma de la serie estudiando el límite de la sucesión $\{s_n\}$.

In[55]:=
$$\text{Limit}[s_n, n \to \infty]$$

Out[55]=
$$\frac{\text{Log}[4]}{\text{Log}[2]}$$

In[56]:=
```
FullSimplify[%]
```

Out[56]=
```
2
```

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ tiene como suma S = 2. El valor de la suma también podría haberse obtenido directamente

In[57]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Out[57]=
```
2
```

Ejemplo 2.3 Probar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^n}$ es convergente.Calcular su suma .

• Definimos el término general de la serie

In[58]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$a_{n\_} := \frac{1}{\text{Log}[n]^n}$$

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[60]:=
```
Limit[a_n, n → ∞]
```

Out[60]=
```
0
```

La serie puede ser convergente.

• Criterio de la raíz

In[61]:=
$$\text{Limit}\left[\sqrt[n]{a_n},\ n \to \infty\right]$$

Out[61]=
```
0
```

Como el límite es L=0 < 1 el criterio de la raíz garantiza que la serie es convergente. Calculemos la sucesión de sumas parciales:

In[62]:=
$$s_{n\_} = \sum_{k=2}^{n} a_k$$

Out[62]=
$$\sum_{k=2}^{n} \text{Log}[k]^{-k}$$

En este caso, Mathematica no ha sido capaz de darnos una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

In[63]:=
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

Out[63]=
$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{Log}[n]^{-n}$$

El programa Mathematica tampoco ha podido darnos el valor exacto de la suma. Sin embargo, podemos pedirle que nos de un valor aproximado usando el comando N.

In[64]:=
$$N\left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n\right]$$

Out[64]=
```
3.24261
```

Si bien el comando N puede servirnos en la mayoría de los casos, para obtener un valor aproximado de la suma de una serie el programa *Mathematica* incorpora la instrucción NSum[a_n, {n, n_{min}, n_{max}}]

In[65]:=
```
NSum[a_n, {n, 2, ∞}]
```

Out[65]=
```
3.24261
```

Ejemplo 2.4 Calcular un valor aproximado de la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2 n^2 - n + 1)$

Valor aproximado

In[66]:=
```
NSum[(-1/4)^n (2 n^2 - n + 1), {n, 1, ∞}]
```

Out[66]= -0.232

Valor exacto

In[67]:= $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (2 n^2 - n + 1)$

Out[67]= $-\frac{29}{125}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 n - 2}$

Valor aproximado

In[68]:=
```
NSum[(-1)^n/(3 n - 2), {n, 1, ∞}]
```

Out[68]= -0.835649

Valor exacto

In[69]:= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 n - 2}$

Out[69]= $\frac{1}{9} \left(-\sqrt{3}\, \pi - 3 \,\mathrm{Log}[2]\right)$

In[70]:= $N\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 n - 2}\right]$

Out[70]= -0.835649

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+4n-3}{n!-3}$

Valor aproximado

In[71]:=
```
NSum[(n^4 + 4 n - 3)/(n ! - 3), {n, 1, ∞}]
```

Out[71]=
```
28.7388
```

Valor exacto

In[72]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+4n-3}{n!-3}$$

Out[72]=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3+4n+n^4}{-3+n!}$$

En este caso Mathematica no es capaz de obtener el valor exacto de la serie.

3. - Ejercicios propuestos

1.-Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2}{n^2-7}$, se pide :

a) Escribir los 20 primeros términos y representarlos gráficamente.

b) Estudiar el crecimiento y la acotación,

c) Calcular el límite.

2.-Probar que la sucesión de término general $b_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{4}$ es oscilante, estudiando las subsucesiones $\{b_{2n}\}$ y $\{b_{2n-1}\}$.

3.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$.

4.- Estudiar la sucesión recurrente dada por $x_1 = a$,

$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2$, $n \in N$, para los valores de a=1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

5.-Obtener la suma de

a) los n primeros números naturales,

b) los n primeros números impares.

6.- Probar que las siguientes series son convergentes. Calcular el valor de la suma o, en su caso, un valor aproximado.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{4n^5+9n^3-2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

7.-Comprobar que la serie $\sum \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ es telescópica. Calcular su suma de las dos formas siguientes:

a) utilizando la fórmula para sumar una serie telescópica,

b) directamente con el programa *Mathematica*.

8.-Probar que la serie $\sum (-1)^n \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{n}\right]$ es convergente. Hallar el valor de la suma o, en su caso, un valor aproximado.