Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad de Jaén.
Departamento de Matemáticas.
Grado en Estadística y Empresa.
Análisis Matemático. Curso 2010/11.

Tema 6: Funciones de varias variables reales

1. Considerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x\,y}$

   a) Determinar el límite a lo largo de cualquier recta de la forma $y = mx$.

   b) Determinar el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.

   c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{1+xy}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2-y^2}$

   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x+y^3}$

3. Utilizar coordenadas polares para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$:

   a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ y $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ y $f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = -\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq 0$ y $f(0,0) = 0$.

5. Analizar la continuidad de las funciones f y g en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

6. Calcular las dos derivadas parciales de primer orden:

   a) $f(x,y) = 2x - 5y + 8$

   b) $f(x,y) = x^2 + 4y^3 - 5$

c) $z = x\sqrt{y}$

d) $z = 2y^2\sqrt{x}$

e) $f(x, y) = y^3 - 3xy^2 - 3$

f) $f(x, y) = \ln(\sqrt{xy})$

g) $z = \ln(x^2 - y^2)$

h) $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

i) $z = \sin(3x)\cos(3y)$

j) $z = \cos(x^2 + y^2)$

k) $z = e^y \sin(xy)$

l) $f(x, y) = \sqrt{2x + y^3}$

7. Hallar dw/dt, (1) utilizando la regla de la cadena apropiada, (2) convirtiendo w en función de t antes de derivar:

   a) $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \cos t, \quad y = e^t$

   b) $w = \ln(y/x), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$

   c) $w = \cos(x - y), \quad x = t^2, \quad y = 1$

8. Hallar los puntos críticos y determinar los extremos relativos.

   a) $f(x, y) = x^3 + y^3$

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$

   c) $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$

   d) $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$

   e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

9. Una empresa fabrica dos tipos de tenis: tenis para correr (x) y tenis de baloncesto (y). El ingreso total de la empresa es
$$I = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y,$$
donde x, y están medidas en miles de unidades. Hallar el número de unidades x e y que maximizan el ingreso.

10. Una tienda al por menor vende dos tipos de cortadoras de césped, cuyos precios son p_1 y p_2. Hallar los precios que maximizan los ingresos
$$I = 515p_1 + 805p_2 + 1{,}5p_1p_2 - 1{,}5p_1^2 - p_2^2.$$