Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad de Jaén.
Departamento de Matemáticas.
Grado en Estadística y Empresa.
Análisis Matemático. Curso 2010/11.

Tema 4: Derivación de funciones de una variable real

1. Calcular la derivada (donde exista) de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = 5x^{-2}(x+3)$	(11) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)$
(2) $f(x) = (x^5 - 3x)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$	(12) $f'(x) = x^2 2^x$
(3) $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x+1}\right)$	(13) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$
(4) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$	(14) $f(x) = 2^{x^2}3^{-x}$
(5) $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$	(15) $f(x) = \ln(1+x^2) + \dfrac{1}{1+2x}$
(6) $f(x) = (3x/2)^2$	(16) $f(t) = \pi \cos t$
(7) $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$	(17) $f(x) = 5x \operatorname{cosec}(x)$
(8) $f(x) = -3\sqrt[4]{2-9x}$	(18) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$
(9) $f(x) = x(3x-9)^3$	(19) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$
(10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$	(20) $f(x) = 1 + \sec x$

2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular su derivada allí donde exista.

a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ 4 - x, & \text{si } x > 2. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, de convexidad y concavidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (b) $f(x) = (x-1)^2(x-2)$

(c) $f(x) = 1/x^2$ (d) $f(x) = x + 1/x^2$

4. Hallar la recta normal y la recta tangente a la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ en el punto $(3, 2)$.

5. Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo $[-1, 1]$:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
b) $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$.

6. Indicar si f tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en el punto x_0 correspondiente:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, \quad x_0 = 0.$

b) $f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^x, \quad x_0 = 0.$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad x_0 = \pi.$

7. Un granjero tiene 100 metros de alambre para cercar un terreno de pasto rectangular adyacente a un muro de piedra de longitud mayor que 100 metros. ¿Qué dimensiones darán el área máxima al terreno cercado?

8. Un granjero quiere cercar un terreno de pasto rectangular de área 400 metros cuadrados. ¿Qué dimensiones exigen la mínima cantidad de alambre?

9. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de $2a + b$.

10. Utilizar la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2}, \ c \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cot(x) - 1}{x^2}$

11. Explicar cuál es el error en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hôpital y hallar el valor correcto del límite
$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3.$$

12. Hallar para qué valores de las constantes a y b se satisface que
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0.$$

13. Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = \ln x$ en el punto $x_0 = 1$. Estimar el error cometido.

14. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en el punto $x_0 = 0$. Estimar el error cometido.

15. Determinar hasta qué grado es necesario desarrollar el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ centrado en $x_0 = 0$ para aproximar el valor de e^x con un error menor que 10^{-3} para cualquier $x \in [0, 1]$.