Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad de Jaén.
Departamento de Matemáticas.
Grado en Estadística y Empresa.
Análisis Matemático. Curso 2010/11.

Tema 3: Funciones reales de variable real. Límites y continuidad

1. Déspejese y en las siguientes ecuaciones:

   (a) $e^{\sqrt{y}} = x^2$
   (b) $e^{2y} = x^2$
   (c) $e^{x^2} e^{2x+1} = e^y$
   (d) $\ln(y-1) = x + \ln x$
   (e) $\ln(y-2) = \ln(\operatorname{sen} x) - 1$
   (f) $\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \operatorname{sen} x$

2. Simplifíquense las siguientes expresiones:

   (a) $e^{(\ln x)}$
   (b) $\ln(e^x)$
   (c) $e^{(-\ln x^2)}$
   (d) $\ln(e^{-x^2})$
   (e) $\ln(e^{\frac{1}{x}})$
   (f) $\ln(\frac{1}{e^x})$
   (g) $e^{-\ln(\frac{1}{x})}$
   (h) $e^{\ln 2 + \ln x}$
   (i) $\ln(x^2 e^{-2x})$
   (j) $e^{\ln(\frac{1}{x})}$

3. Hallar si existen:
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x$
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$
   (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} - \sqrt{x}$
   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{20x}$
   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$
   (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$
   (j) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x^2-4}$
   (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$
   (l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{x^2}$

4. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como sigue
$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x \leq c, \\ ax^2 + b & \text{si } x > c, \end{cases}$$
siendo a, b, c constantes. Si b y c están dados, hallar los valores de a (si existe alguno) para los que f es continua en el punto $x = c$.

5. Hallar si existen:
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - \dfrac{2}{x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$
   (d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2}{x-3}$
   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}$
   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3+4}{x^3+2x}\right)^{5x^2}$
   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^4+x}{2x^4+4x^2-x+6}$
   (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{3x^3+3x^2-5x}$
   (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$
   (j) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2+1}{t+1}$
   (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{2x^2}$
   (l) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-1}{t-1}$

6. Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
   b) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 4$.
   c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $x \neq \pm 1$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$.
   d) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
   e) $f(x) = \dfrac{1}{|1 - \mathrm{e}^{1/|x|}|}$ si $x \neq 0$, $f(0) = -2$.

7. Sea $f(x) = \tan x$. Aunque $f(\pi/4) = 1$ y $f(3\pi/4) = -1$ no existe ningún punto $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$ tal que $f(x) = 0$. Explicar por qué no hay contradicción con el teorema de Bolzano.

8. Encontrar para cada uno de los siguientes polinomios un intervalo en el que tengan alguna raíz real ($\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz del polinomio $p(x)$ si se cumple que $p(\alpha) = 0$). Sugerencia: buscar un intervalo en el que pueda aplicarse el teorema de Bolzano.

   (a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$
   (b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$
   (c) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$