Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad de Jaén.
Departamento de Matemáticas.
Grado en Estadística y Empresa.
Análisis Matemático. Curso 2010/11.

Tema 2: Sucesiones y series de números reales

1. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones. En caso de convergencia calcular el límite:

1) $\left\{\dfrac{43}{n}\right\}$

2) $\left\{\dfrac{4n^2+5n-3}{n^3}\right\}$

3) $\left\{\dfrac{5n^4-8n^3+7}{3n^4-2n^2}\right\}$

4) $\left\{\dfrac{n^3-12}{n^2+7}\right\}$

5) $\{(-1)^n\}$

6) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

8) $\{\sqrt{n^2+3n}-n\}$

9) $\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

10) $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\}$

11) $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

12) $\left\{3^{\frac{1}{n}}\right\}$

7) $\left\{\dfrac{n^5+n^3}{n^6-n^2+3}\right\}$

UN LÍMITE ÚTIL: Si $\{x_n\} \to 1$ e $\{y_n\} \to +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \mathrm{e}^h$ donde

$$h = \lim_{n\to\infty} (x_n - 1)\cdot y_n$$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones. En caso de convergencia calcular el límite:

1) $\left\{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n\right\}$

2) $\left\{\left(\dfrac{n^3}{n^3+1}\right)^{(3n^4+2)/n}\right\}$

3) $\left\{\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{n^2}\right\}$

4) $\left\{\dfrac{8n-500\sqrt{n}}{2n+800\sqrt{n}}\right\}$

5) $\left\{3-\dfrac{1}{2^n}\right\}$

6) $\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}\right\}$

3. Utilizar el teorema del encaje para demostrar que

(a) $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2^k}{k!} = 0,$ (b) $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k!}{k^k} = 0.$

4. Calcular los límites:

a) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^p}$, si $p < 0$.

b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^p}$, si $p > 0$.

c) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^p}$, si $p = 0$.

d) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k^p$, si $0 < p < 1$.

e) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k^p$, si $p > 1$.

f) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k^p$, si $p = 1$.

g) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k^p$, si $p < 0$.

5. Hallar la relación que debe existir entre los números a y b para que se satisfaga la igualdad siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{an+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{n+2}.$$

6. Probar que las siguientes series no convergen:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k + (-1)^k \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2-2}{4k}.$$

7. Determinar el carácter de las siguientes series mencionando el criterio utilizado:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k+1}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k-5}$

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{\sqrt{k}(2k-5)}$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+2}}$

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k^4-4}$

11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)2^k}$

12) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k+1}$

13) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$