Práctica 7. Integración de funciones de dos variables

Integración con Mathematica

Recuerda que Mathematica nos permite calcular integrales mediante la instrucciones:

Integrate[*expresión*, *variable***]**

Calcula la integral indefinida de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada

Integrate[*expresión*,{*variable*,a,b}**]**

Calcula la integral definida de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada en el intervalo [a,b].

Ambas instrucciones pueden también indicarse directamente mediante los símbolos:

$\int \square \, d\square$ (integral indefinida) $\int_{\square}^{\square} \square \, d\square$ (integral definida)

In[1]:= $\int_0^2 \int_{-2}^6 (x^2 * y + 3x + 7y^3) \, dx \, dy$

Out[1]= $\frac{1408}{3}$

In[2]:=
```
Integrate[Integrate[x^2 * y + 3 x + 7 y^3, {x, -2, 6}], {y, 0, 2}]
```

Out[2]= $\frac{1408}{3}$

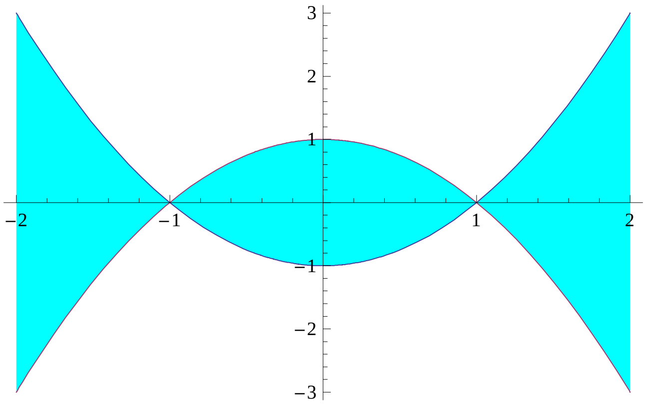
La opción FilledPlot será de gran utilidad porque nos permite representar gráficamente la región comprendida entre dos funciones. Para poder utilizar esta instrucción es necesario cargar el paquege gráfico

<< Graphics`FilledPlot`

In[3]:=
```
<< Graphics`FilledPlot`
FilledPlot[{x^2 - 1, -x^2 + 1}, {x, -2, 2}]
```

General::obspkg :
Graphics`FilledPlot` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. ≫

Out[4]=



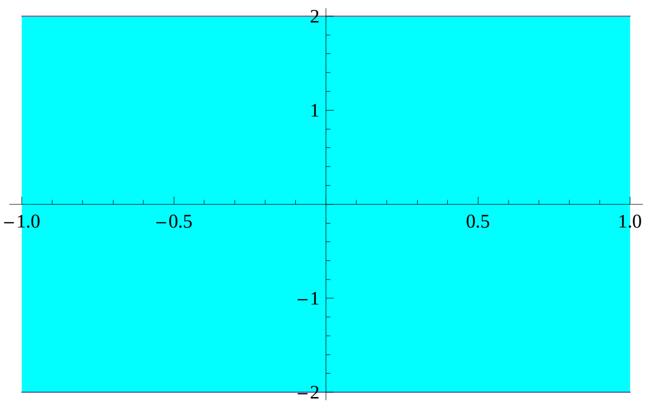
Ejemplo 1 Calcular el valor de las siguientes integrales iteradas:

■ (a) $\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} x^2 - y^2 \, dy \, dx$

Dibujamos el dominio de integración (en este caso es un rectángulo).

In[5]:=
```
Clear["Global`*"]
FilledPlot[{-2, 2}, {x, -1, 1}]
```

Out[6]=



Integramos primero respecto a y

In[7]:= $\int_{-2}^{2} (x\verb|^|2 - y\verb|^|2) \, dy$

Out[7]= $-\frac{16}{3} + 4\, x^2$

y el resultado que hemos obtenido lo integramos con respecto a x

In[8]:= $\int_{-1}^{1}\left(-\frac{16}{3}+4\,x^2\right)dx$

Out[8]= -8

También podemos calcular la integral doble directamente:

In[9]:= $\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}(x\verb|^|2 - y\verb|^|2)\,dy\,dx$

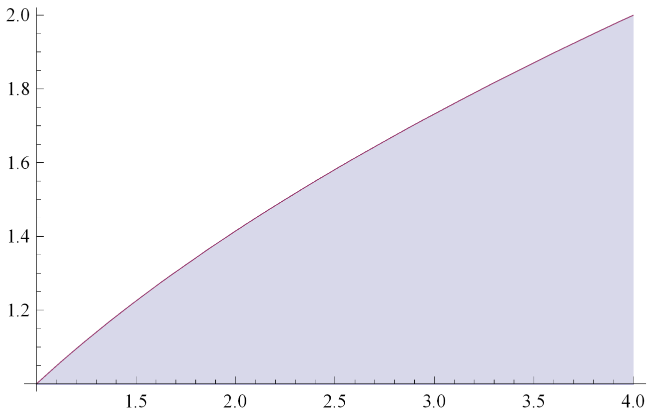
Out[9]= -8

- **(b)** $\int_1^4\int_1^{\sqrt{x}} 2\,y e^{-x}\,dy\,dx$

Dibujamos el dominio de integración

In[10]:=
```
Clear["Global`*"]
Plot[{1, √x}, {x, 1, 4}, Filling → {1 → {2}}]
```

Out[11]=



Integramos primero respecto a y

In[12]:= $\int_1^{\sqrt{x}}(2\,y\,e^{-x})\,dy$

Out[12]= $e^{-x}\,(-1+x)$

y el resultado que hemos obtenido lo integramos con respecto a x

In[13]:= $\int_1^4(e^{-x}\,(-1+x))\,dx$

Out[13]= $\frac{-4+e^3}{e^4}$

In[14]:= $N\left[\int_1^4(e^{-x}\,(-1+x))\,dx\right]$

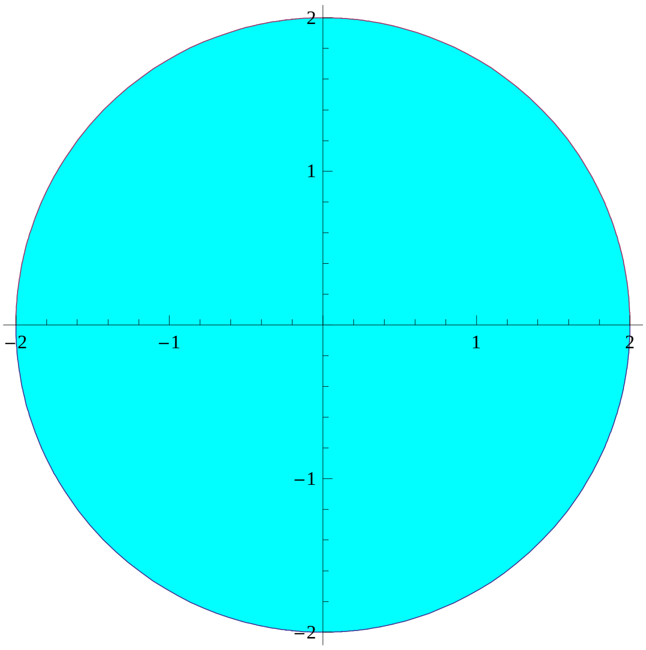
Out[14]= 0.294617

Ejemplo 2 Dibujar la región D cuya área está dada por la integral iterada $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\, dx$. Después cambiar el orden de integración y comprobar que ambas integrales coinciden.

Dibujamos el dominio de integración

In[15]:=
```
Clear["Global`*"]
FilledPlot[{-√(4 - x²), √(4 - x²)}, {x, -2, 2}, AspectRatio → Automatic]
```

Out[16]=



Estamos calculando el área del círculo $x^2 + y^2 \le 4$. Evaluamos la integral iterada

In[17]:= $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\, dx$

Out[17]= 4π

Si intercambiamos el orden de integración $-2 \le y \le 2$ y para cada valor fijo de y necesitamos calcular los límites de integración para x

In[18]:=
```
Solve[x^2 + y^2 == 4, x]
```

Out[18]= $\{\{x \to -\sqrt{4-y^2}\}, \{x \to \sqrt{4-y^2}\}\}$

Evaluamos la integral iterada intercambiando el orden de integración.

In[19]:= $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$

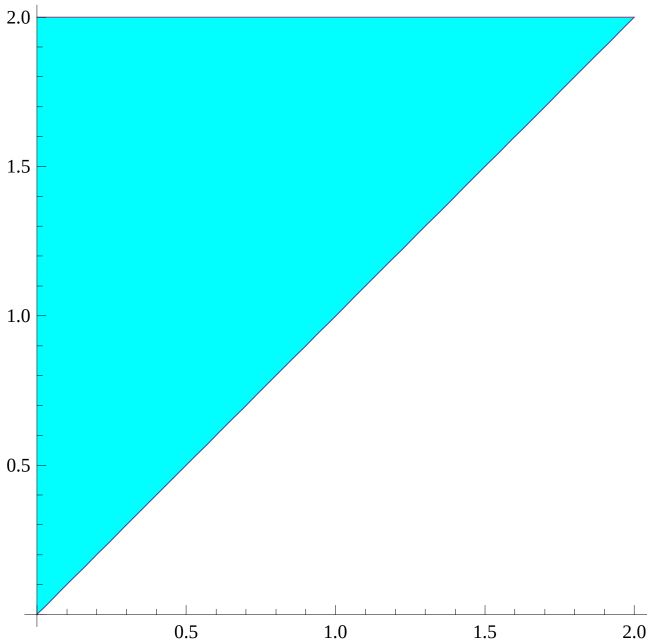
Out[19]= 4π

Ejemplo 3. Evaluar $\int_0^2\int_x^2 e^{-y^2}\, dy\, dx$ cambiando el orden de integración.

Dibujamos el dominio de integración

In[20]:=
```
Clear["Global`*"]
FilledPlot[{x, 2}, {x, 0, 2}, AspectRatio → Automatic]
```

Out[21]=



Si intercambiamos el orden de integración $0 \leq y \leq 2$ y para cada valor fijo de y se tiene que $0 \leq x \leq y$. Evaluamos la integral iterada intercambiando el orden de integración.

In[22]:= $\int_0^2\int_0^y e^{-y^2}\, dx\, dy$

Out[22]= $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\, e^4}$

In[23]:= $\int_0^2\int_0^y e^{-y^2}\, dx\, dy$

Out[23]= $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\, e^4}$

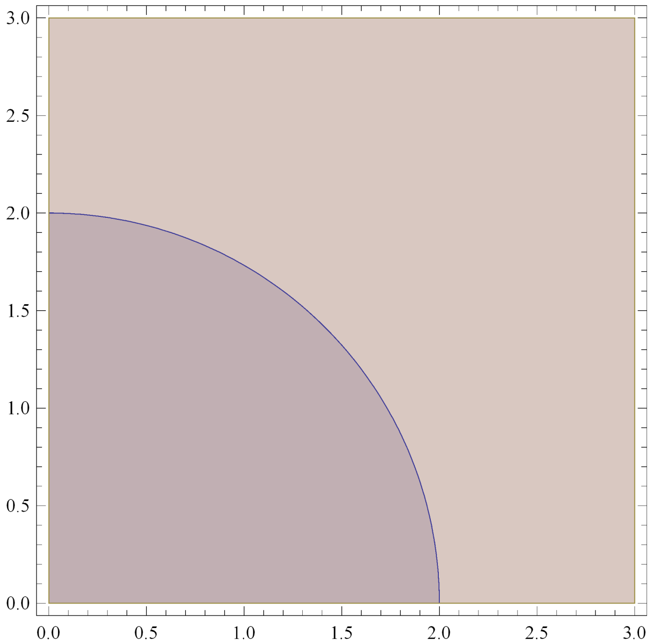
Ejemplo 4. Utilizar coordenadas polares para evaluar la integral doble $\int\int_D f(x, y)\, dA$ siendo

$f(x, y) = x + y,\ D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

Se trata de un cuarto de círculo de radio 2, que en coordenadas polares se expresa como $0 < r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Dibujamos el dominio de integración en coordenadas polares

In[24]:=
```
Clear["Global`*"]
RegionPlot[{x^2 + y^2 ≤ 4, x ≥ 0, y ≥ 0}, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```

Out[25]=



In[26]:= $\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (r*\mathrm{Cos}[\theta] + r*\mathrm{Sin}[\theta])*r\, dr\, d\theta$

Out[26]= $\frac{16}{3}$

Comparamos con el valor de la integral en coordenadas rectangulares

In[27]:= $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^{\wedge}2}} (x + y)\, dy\, dx$

Out[27]= $\frac{16}{3}$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Calcular $\int\int_D 10 + 2x^2 + 2y^2\, dA$ siendo D={(x,y)∈R^2 : 0≤ x≤2, x≤y≤3x}.

Ejercicio 2. Calcular $\int\int_D x\, y\, dA$ siendo D la región acotada por las curvas y=5x e y=x^2.

Ejercicio 3. Siendo D={(x,y) $\in R^2$: $-x^2+5 \geq$y, x-1 $\leq$y} se pide:
a) Representar gráficamente el recinto D.
b) Calcular el área del recinto mediante integración doble.
c) Invertir el orden de integración.

Ejercicio 4. Calcular la integral $\int\int_D x^2 + y^2\, dA$ haciendo el cambio a coordenadas polares, siendo D={(x,y)$\in R^2$: $x^2+y^2 \leq 9,\ y \geq 0$}.