PRÁCTICA 6

DERIVADAS PARCIALES

1.- DERIVADAS PARCIALES. DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

Mathematica permite el cálculo de las derivadas parciales de una función f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto cualquiera (x,y) mediante las órdenes:

D[f[x,y],x] Calcula la derivada parcial de la función f respecto de la variable x.

D[f[x,y],y] Calcula la derivada parcial de la función f respecto de la variable y.

También podemos utilizar la paleta BasicInput para las dos derivadas parciales en un punto (x,y)

∂_x f[x, y] Calcula la derivada parcial con respecto a la variable x

∂_y f[x, y] Calcula la derivada parcial con respecto a la variable y

Ejemplo 1. Calcular las derivadas parciales de la función f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x,y) $= x^2$sen y + $(3x + y^2)$ cos x, evaluándolas en el punto $(0,\pi)$.

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := x^2 Sin[y] + (3 x + y^2) Cos[x]
```

```
∂x f[x, y]

3 Cos[x] - (3 x + y^2) Sin[x] + 2 x Sin[y]
```

```
∂y f[x, y]

2 y Cos[x] + x^2 Cos[y]
```

Evaluamos ahora las funciones derivadas parciales en el punto $(0,\pi)$.

```
∂x f[x, y] /. {x → 0, y → π}

3
```

```
∂y f[x, y] /. {x → 0, y → π}

2 π
```

Mathematica permite también el cálculo de las derivadas parciales sucesivas mediante la instrucción:

D[f,{x,n},{y,m},...] Calcula la derivada parcial de la función f respecto de x, veces, de y, m veces,...

También podemos utilizar la paleta BasicInput para las derivadas parciales sucesivas en un punto (x,y)

$\partial_{x,y}$ f[x, y] Calcula la derivada cruzada con respecto a x y con respecto a y

$\partial_{y,x}$ f[x, y] Calcula la derivada cruzada con respecto a x y con respecto a y

Ejemplo 2. Calcular las derivadas parciales segundas de la función f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x,y) $= x^2$sen y + $(3x + y^2)$ cos x , dada en el ejemplo anterior y evaluarlas en el punto ($\pi/2,\pi$).

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := x^2 Sin[y] + (3 x + y^2) Cos[x]
```

```
∂x,x f[x, y]

-(3 x + y^2) Cos[x] - 6 Sin[x] + 2 Sin[y]
```

```
∂x,y f[x, y]

2 x Cos[y] - 2 y Sin[x]
```

```
∂y,y f[x, y]

2 Cos[x] - x^2 Sin[y]
```

```
∂y,x f[x, y]

2 x Cos[y] - 2 y Sin[x]
```

Las evaluamos en el punto ($\pi/2,\pi$)

```
∂x,x f[x, y] /. {x → π / 2, y → π}

-6
```

```
∂x,y f[x, y] /. {x → π / 2, y → π}
```

-3π

```
∂y,y f[x, y] /. {x → π / 2, y → π}
```

0

```
∂y,x f[x, y] /. {x → π / 2, y → π}
```

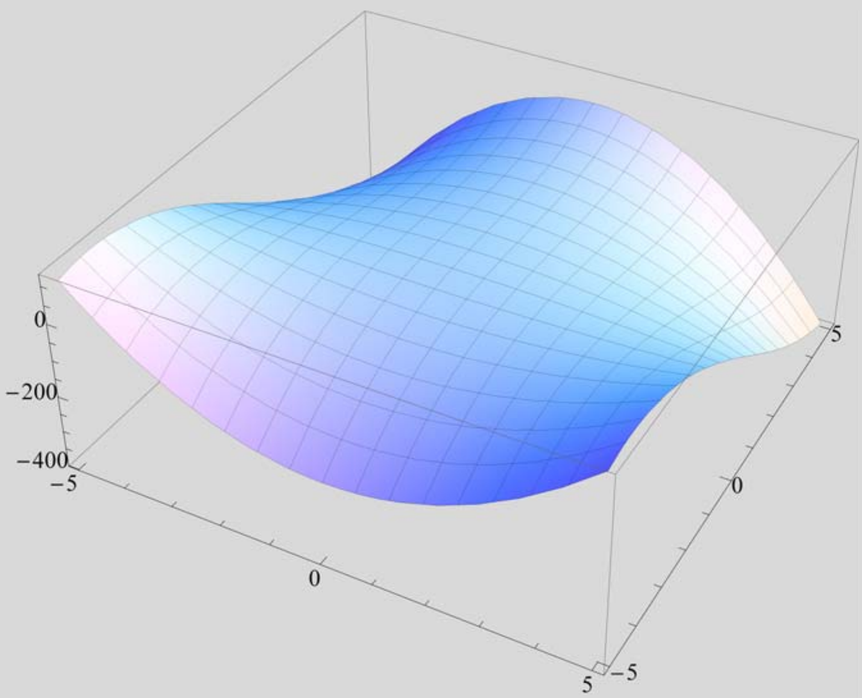
-3π

2.- EXTREMOS RELATIVOS

El estudio de los extremos relativos libres de una función real de dos variables reales se hace en dos etapas. En primer lugar se calculan aquellos puntos que anulan todas las derivadas parciales, que serán los posibles máximos o mínimos. Posteriormente utilizaremos el criterio de las derivadas parciales segundas que nos da condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos estudiando el determinante, llamado Hessiano de la función f, en los puntos hallados.

Ejemplo 3.- Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=y^3-3x^2\,y-3\,y^2-3\,x^2+8$, estudiar la existencia de extremos relativos. Representarla gráficamente.

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := y^3 - 3 x^2 y - 3 y^2 - 3 x^2 + 8
Plot3D[f[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



Resolvemos el siguiente sistema para encontrar los puntos críticos.

```
∂x f[x, y] == 0
```

$-6\,x-6\,x\,y==0$

```
∂y f[x, y] == 0
```

$-3\,x^2-6\,y+3\,y^2==0$

```
Solve[{∂x f[x, y] == 0, ∂y f[x, y] == 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to 2\}, \{x \to -\sqrt{3}, y \to -1\}, \{x \to \sqrt{3}, y \to -1\}\}$

Hay cuatro puntos críticos : los clasificamos usando el criterio del hessiano.

$$\text{MatrizHessiana[f][x\_, y\_]} = \begin{pmatrix} \partial_{x,x} f[x, y] & \partial_{x,y} f[x, y] \\ \partial_{y,x} f[x, y] & \partial_{y,y} f[x, y] \end{pmatrix}$$

```
{{-6 - 6 y, -6 x}, {-6 x, -6 + 6 y}}
```

```
MatrizHessiana[f][x_, y_] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -6 - 6\, y\_ & -6\, x\_ \\ -6\, x\_ & -6 + 6\, y\_ \end{pmatrix}$$

```
Hessiano[f][x_, y_] := Det[MatrizHessiana[f][x, y]]
```

- **Punto (0, 0)**

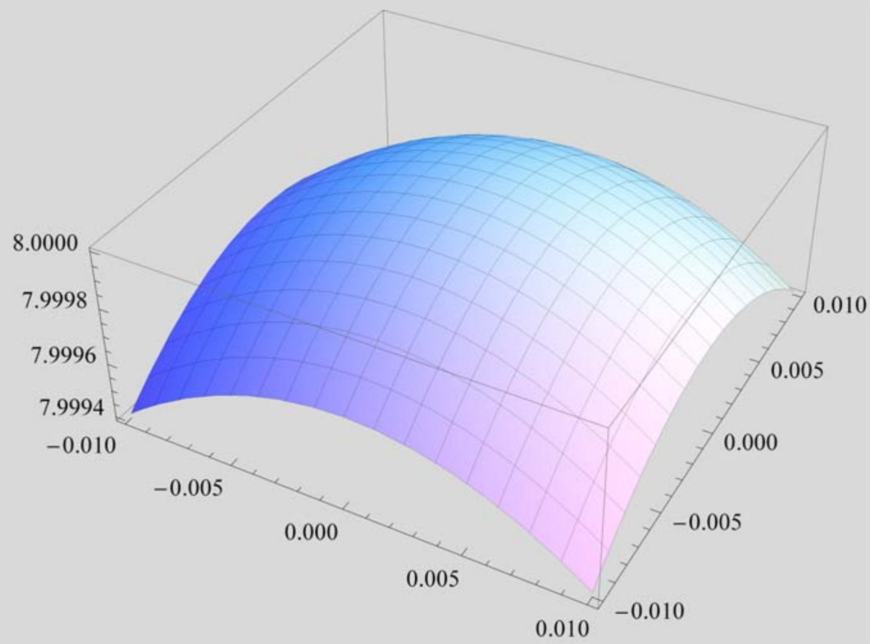
```
MatrizHessiana[f][0, 0] // MatrixForm
Hessiano[f][0, 0]
```

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

```
36
```

Como $H(0, 0) > 0$ y $\partial_{x,x} f(0, 0) < 0$ se satisface que $f(x, y)$ tiene en $(0, 0)$ un máximo relativo.

```
a = 0.01;
Plot3D[f[x, y], {x, 0 - a, 0 + a}, {y, -0 - a, 0 + a}]
```



- **Punto (0, 2)**

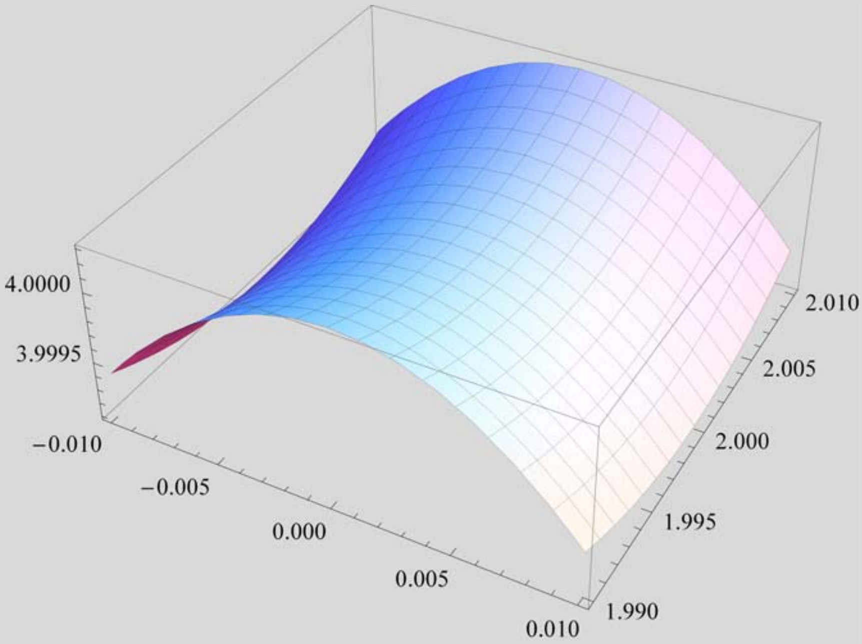
```
MatrizHessiana[f][0, 2] // MatrixForm
Hessiano[f][0, 2]
```

$$\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

−108

Como H (0, 2) < 0 se satisface que f (x, y) tiene en (0, 2) un punto de silla.

```
a = 0.01;
Plot3D[f[x, y], {x, 0 - a, 0 + a}, {y, 2 - a, 2 + a}]
```



- **Punto (-$\sqrt{3}$, −1)**

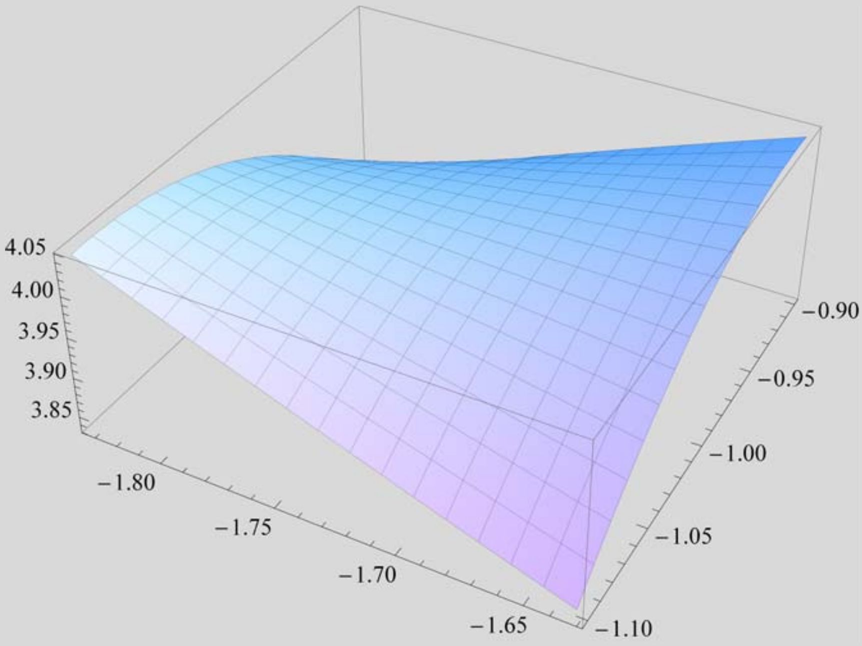
```
MatrizHessiana[f][-√3, -1] // MatrixForm
Hessiano[f][-√3, -1]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}$$

-108

Como H $\left(-\sqrt{3}, -1\right) < 0$ se satisface que f (x, y) tiene en $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ un punto de silla.

```
a = 0.1;
Plot3D[f[x, y], {x, -√3 - a, -√3 + a}, {y, -1 - a, -1 + a}]
```



- **Punto ($\sqrt{3}$, −1)**

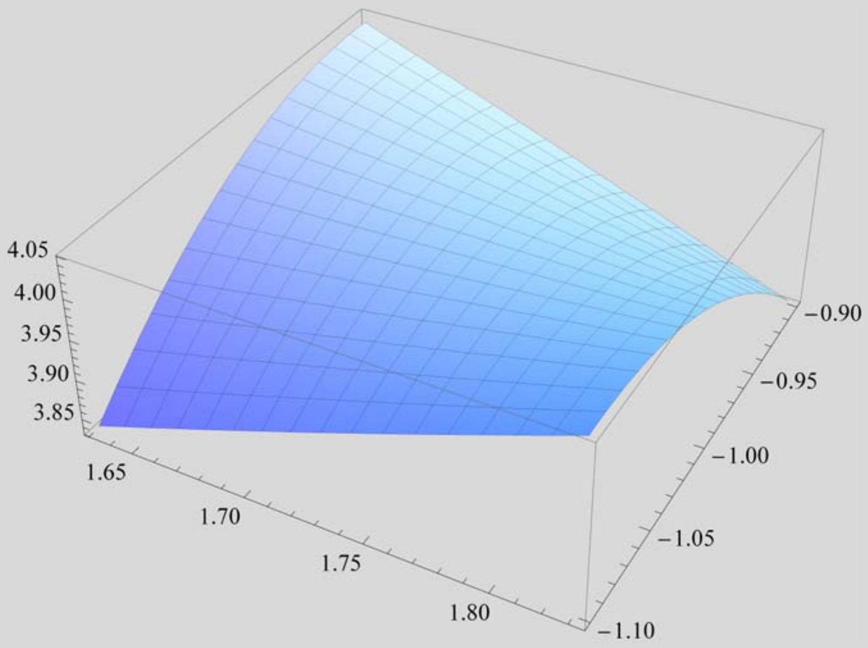
```
MatrizHessiana[f][√3, -1] // MatrixForm
Hessiano[f][√3, -1]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}$$

−108

Como H $\left(\sqrt{3}, -1\right) < 0$ se satisface que f (x, y) tiene en $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ un punto de silla.

```
a = 0.1;
Plot3D[f[x, y], {x, √3 - a, √3 + a}, {y, -1 - a, -1 + a}]
```



3.- EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1. Dada la función f(x,y)=ln$\left(x^2+y^2\right)$ comprobar que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$.

Ejercicio 2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función f(x,y)=$e^{x^2+y}-x\ln\left(x-y^3\right)$. ¿Cuáles son iguales?

Ejercicio 3.- Dada la función f: $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ **definida por f(x,y)=$4x^2-3xy-9y^2+5x+15y+16$, estudiar la existencia de extremos relativos. Representar gráficamente la función cerca de cada punto crítico.**

Ejercicio 4. Obtener los extremos relativos de la función f:$\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por f(x, y) = 2 x^2+ y^2+ 8x - 6y + 20. Representar gráficamente la función cerca de cada punto crítico.