PRÁCTICA 5

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES REALES

1.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La instrucción que sirve para representar gráficas de funciones de dos variables en una región [a,b] x [c,d] es:

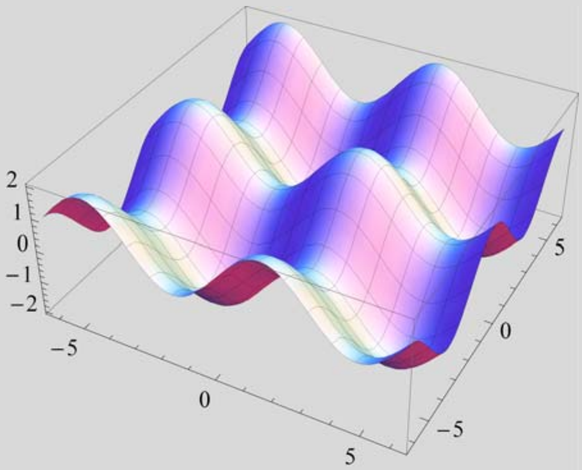
```
Plot3D[funcion[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]
```

Esta instrucción, a diferencia de **Plot**, no acepta una lista de funciones para representar conjuntamente. Si queremos representar más de una función necesitaremos usar la instrucción **Show**.

■ Ejemplo 1. Representar gráficamente la función *f(x,y)=sen(x) + cos(y)*

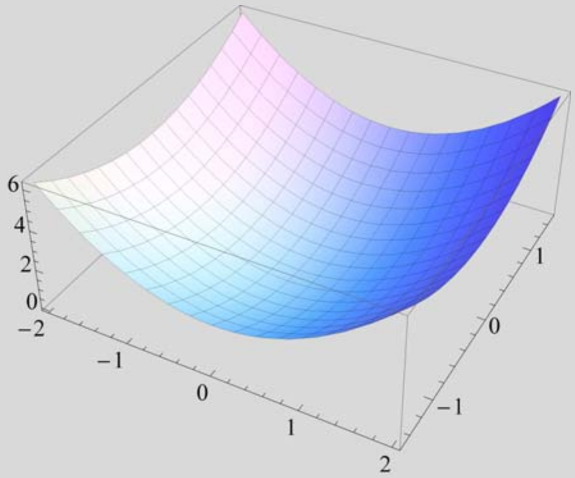
```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := Sin[x] + Cos[y]
```

```
Plot3D[f[x, y], {x, -2 π, 2 π}, {y, -2 π, 2 π}]
```

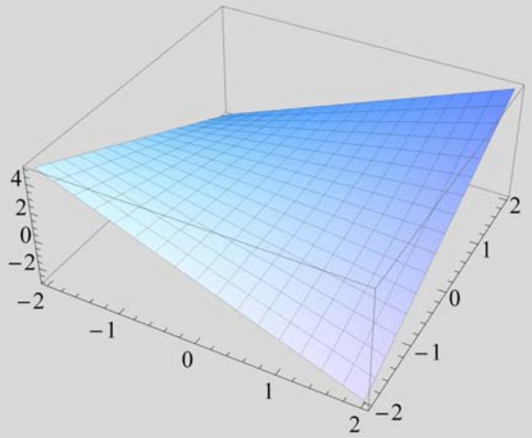


■ Ejemplo 2. Dibujar la función las superficies *f(x,y)=x^2 + y^2* y g(x,y)=x y + 1, en unos mismos ejes de coordenadas.

```
Clear["Global`*"]
superficie1 = Plot3D[x^2 + y^2, {x, -2, 2}, {y, -1.5, 1.5}]
```

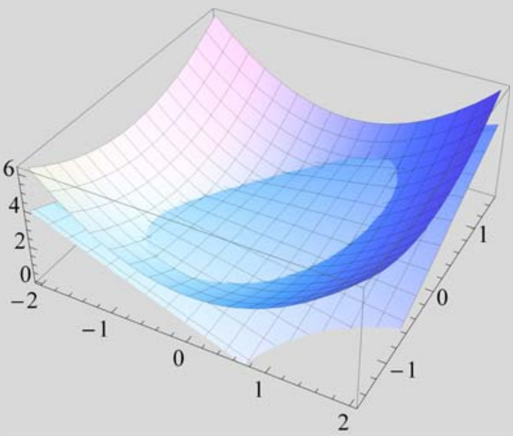



```
superficie2 = Plot3D[x y + 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Utilizamos la instrucción **Show** para mostrar las dos gráficas conjuntamente

```
Show[superficie1, superficie2]
```



Otra forma útil de visualizar la variación de una función f es mediante las curvas de nivel. Las curvas de nivel las componen los puntos (x , y) que toman el mismo valor mediante f, es decir, puntos que tienen la misma altura. Son curvas que expresadas de forma implícita vienen definidas por la ecuación f (x , y) = constante.

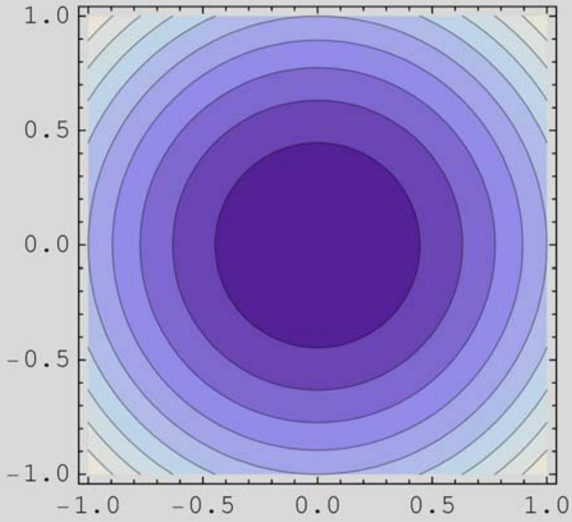
Por ejemplo, las isobaras son las curvas de nivel de la presión atmosférica y las curvas topográficas de los mapas son las curvas de nivel de la altura.

La instrucción que representa funciones de dos variables mediante curvas de nivel es:

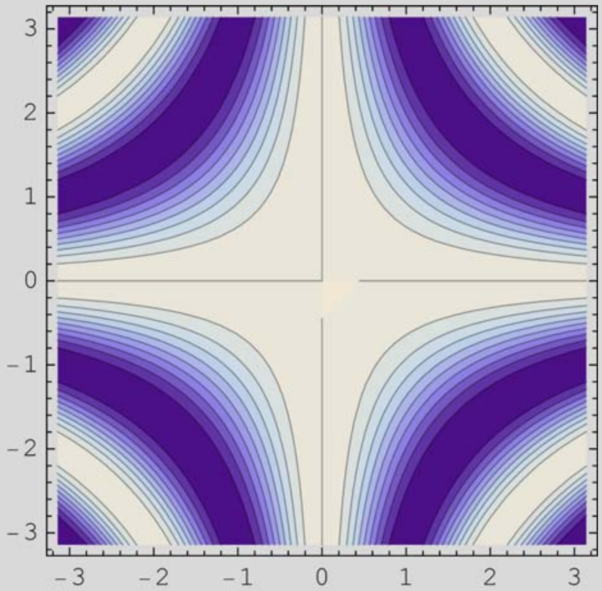
```
ContourPlot[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]
```

Ejemplo 3. Representar las curvas de nivel de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = \cos(x\, y)$.

```
ContourPlot[x^2 + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```




```
ContourPlot[Cos[x y], {x, -π, π}, {y, -π, π}]
```



2.- LÍMITES

Ejemplo 4. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\, y^2}{x^4+y^4}$

```
Clear["Global`*"]
```
$$f[x\_, y\_] := \frac{x^2\, y^2}{x^4 + y^4}$$

Empezamos calculando los límites direccionales

```
Limit[f[x,m x],x→0]
```

$$\frac{m^2}{1 + m^4}$$

Como los límites direccionales de f en (0,0) dependen del parámetro "m" el límite en dos variables no existe.

Ejemplo 5. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\, y^3}{x^2+y^9}$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
```
$$f[x\_, y\_] := \frac{x\, y^3}{x^2 + y^9}$$

Calculamos los límites direccionales

```
Limit[f[x,m x],x→0]
```

0

Calculamos los límites parabólicos

$$\text{Limit}\left[f\left[x,\, m\, x^2\right],\, x \to 0\right]$$

0

$$\text{Limit}\left[f\left[m\, y^2,\, y\right],\, y \to 0\right]$$

0

A la vista de los resultados obtenidos, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Es posible afirmar que existe el límite de f en el punto (0,0)?
Hacemos el cambio a coordenadas polares.

```
F[ρ_, θ_] = f[ρ Cos[θ], ρ Sin[θ]] // Simplify
```

$$\frac{\rho^2 \operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Sin}[\theta]^3}{\operatorname{Cos}[\theta]^2 + \rho^7 \operatorname{Sin}[\theta]^9}$$

```
Limit[F[ρ, θ], ρ → 0]
```

```
0
```

Aunque el límite es independiente del valor de θ, se observa que el denominador de $F(\rho,\theta)$ podría anularse para algunos valores de ρ y θ, es decir, que podría anularse para algunas trayectorias. Basta seguir la trayectoria $x=ay^3$ y probar que en este caso el límite depende del parámetro "a".

```
Limit[f[a y^3, y], y → 0]
```

$$\frac{1}{a}$$

Luego el límite de g en el punto (0,0) no existe, ya que en la trayectoria $x=a\, y^3$ depende del parámetro "a".

Ejemplo 6. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\, y^2}{x^2+y^2}$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := x y^2/(x^2 + y^2)
```

Calculamos los límites direccionales

```
Limit[f[x, m x], x → 0]
```

```
0
```

Calculamos los límites parabólicos

```
Limit[f[x, m x^2], x → 0]
```

```
0
```

```
Limit[f[m y^2, y], y → 0]

0
```

Hacemos el cambio a coordenadas polares

```
F[ρ_, θ_] = f[ρ Cos[θ], ρ Sin[θ]] // Simplify

ρ Cos[θ] Sin[θ]^2
```

```
Limit[F[ρ, θ], ρ → 0]

0
```

```
Abs[F[ρ, θ] - 0]

Abs[ρ Cos[θ] Sin[θ]^2]
```

Observamos, por último, cómo en este caso la utilización de coordenadas polares no presenta problemas, ya que la expresión $F(\rho,\theta)$ tiende a cero para cualquier valor del ángulo θ cuando ρ tiende a cero y la expresión $|F(\rho,\theta)-L|$ está mayorada por la función $\varphi(\rho)=\rho$ que depende sólo de ρ y es tal que $\lim_{\rho\to 0}\varphi(\rho)=0$, por lo que es suficiente para afirmar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

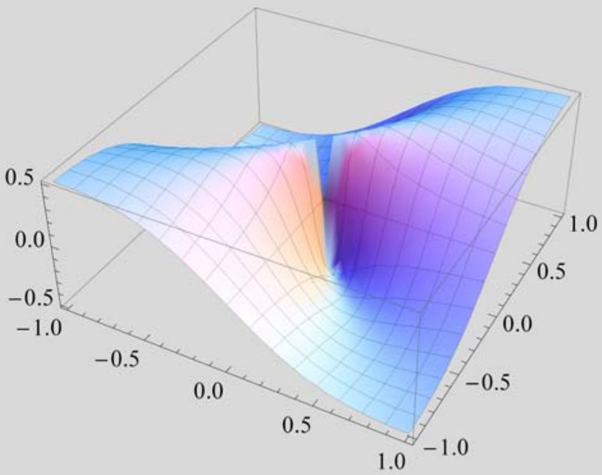
3.- CONTINUIDAD

Una función de dos variables $f(x, y)$ es continua en el punto (a, b) si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

■ **Ejemplo 7. Estudiar la continuidad de la función f(x,y)= $\frac{xy}{x^2+y^2}$ si (x,y)≠(0,0) y f(0,0)=0 en el punto (0,0).**

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := (x * y)/(x^2 + y^2)
Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



Vamos a calcular los límites direccionales.

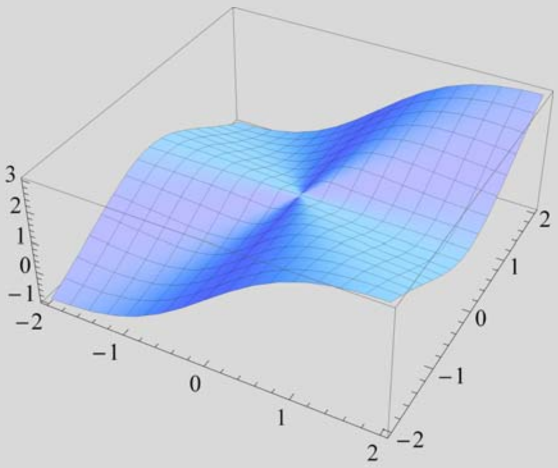
```
Limit[f[x, m x], x → 0]
```

$$\frac{m}{1+m^2}$$

Como los límites direccionales dependen de m quiere decir que no existe el límite. Por tanto la función no es continua en (0, 0).

■ Ejemplo 8. Estudiar la continuidad de la función f(x,y)= $\frac{x^2+2\,x\,y^2+y^2}{x^2+y^2}$ si (x,y)≠(0,0) y f(0,0)=0 en el punto (0,0).

```
Clear["Global`*"]
f[x_, y_] := (x^2 + 2 x y^2 + y^2)/(x^2 + y^2)
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Vamos a calcular el límite en coordenadas polares.

```
F[ρ_, θ_] = FullSimplify[f[ρ Cos[θ], ρ Sin[θ]]]

1 + 2 ρ Cos[θ] Sin[θ]^2
```

```
Limit[F[ρ, θ], ρ → 0]

1
```

```
Abs[F[ρ, θ] - 1]

2 Abs[ρ Cos[θ] Sin[θ]^2]
```

Observamos, por último,
cómo en este caso la utilización de coordenadas polares no presenta problemas ya que la expresión $|F(\rho, \theta) - 1|$ está mayorada por la función $\varphi(\rho) = 2\,\rho$,
que depende sólo de ρ y es tal que $\lim_{\rho\to 0} \varphi(\rho) = 0$, por lo que es suficiente para afirmar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1 \neq f(0,0) = 0$, la función no es continua en (0,0). Si hubiéramos definido f(0,0)=1 la función sí que sería continua.

4.- EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.- Representar gráficamente las siguientes funciones y sus curvas de nivel.

- **a) f(x,y)=$x^2 - y^2$**
- **b) f(x,y)=sen$(x\ y)$**

Ejercicio 2. Analizar el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ de las siguientes funciones:

- **(a) f(x,y)=$\frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$**
- **(b) g(x,y)= $(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$**

Ejercicio 3. Demostrar que no existe el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ de la función f(x,y)=$\frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$. Representar su gráfica y analizar el resultado.

Ejercicio 4. Analizar la continuidad en (0,0) de la función f(x,y)=$\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$ si (x,y)≠(0,0) y f(0,0)=0.