PRÁCTICA 3.- Derivación de funciones de una variable real

1. Derivación

Mathematica puede calcular la derivada de una función con las instrucciones,

D[*expresión*, *variable*] Calcula la derivada de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada.

D[*expresión*, {*variable*,*n*}**]** Calcula la derivada de orden **n** de la *expresión* dada con respecto a la *variable* indicada.

Si tenemos definida una función **f[x]**, entonces la derivada también puede calcularse como: f '[x], f ''[x], f '''[x], ..., calcula la derivada primera, segunda, tercera, etc. de la función f[x]. Veamos algunos ejemplos:

```
D[Sin[x], x]
```

```
Cos[x]
```

```
D[Log[x], {x, 2}]
```

$$-\frac{1}{x^2}$$

$$D\left[\sqrt[3]{1+x},\ \{x, 3\}\right]$$

$$\frac{10}{27\,(1+x)^{8/3}}$$

```
Sin'[x]
```

```
Cos[x]
```

$$f[x\_] := x^3 - 2\,x^2 + 9$$

```
f'[x]
```

$-4x + 3x^2$

Mathematica también calcula la derivada de expresiones simbólicas:

```
Clear["Global`*"]
```

```
D[f[x] * g[x], x]
```

```
g[x] f′[x] + f[x] g′[x]
```

```
D[Log[f[x]], x]
```

$\frac{f'[x]}{f[x]}$

■ Ejemplo 1 *Calcular los máximos y los mínimos relativos de la función f(x)* = $(x - 1)^3 e^x$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := (x - 1)^3 ⅇ^x
```

```
f'[x] // Simplify
```

$e^x (-1 + x)^2 (2 + x)$

```
Solve[f'[x] == 0]
```

```
{{x → -2}, {x → 1}, {x → 1}}
```

Hay dos puntos críticos x = -2 y x = 1. Para determinar si se trata de máximos o mínimos relativos calculamos las derivadas de orden superior:

```
f''[-2]
```

$\frac{9}{e^2}$

Hay un mínimo relativo en x = -2.

```
f''[1]
```

```
0
```

Como la segunda derivada es cero calculamos la tercera derivada.

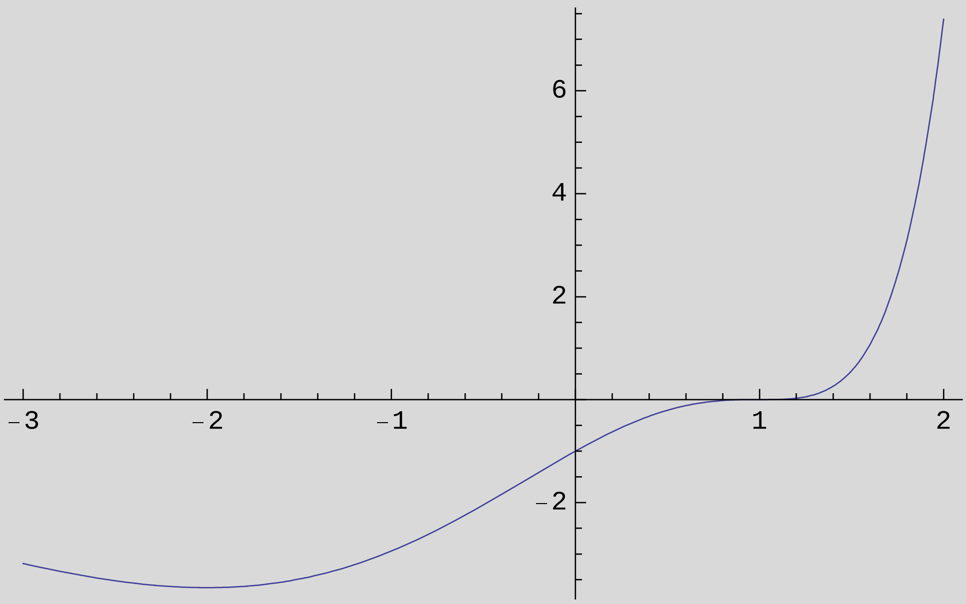
```
f'''[1]
```

```
6 ⅇ
```

Como la primera derivada distinta de cero es de orden impar, la función tiene un punto de inflexión en x = 1.

Gráfica de la función

```
Plot[f[x], {x, -3, 2}]
```



2. Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$ centrado en el punto $x = a$ viene dado por

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

El polinomio de Taylor es una buena aproximación de la función en un entorno del punto $x = a$. Cuando $a = 0$ el polinomio de Taylor se denomina también polinomio de MacLaurin.

Ejemplo 2 ***Calcular el polinomio de MacLaurin de orden 3 de la función f(x) = sen x***

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Sin[x]
```

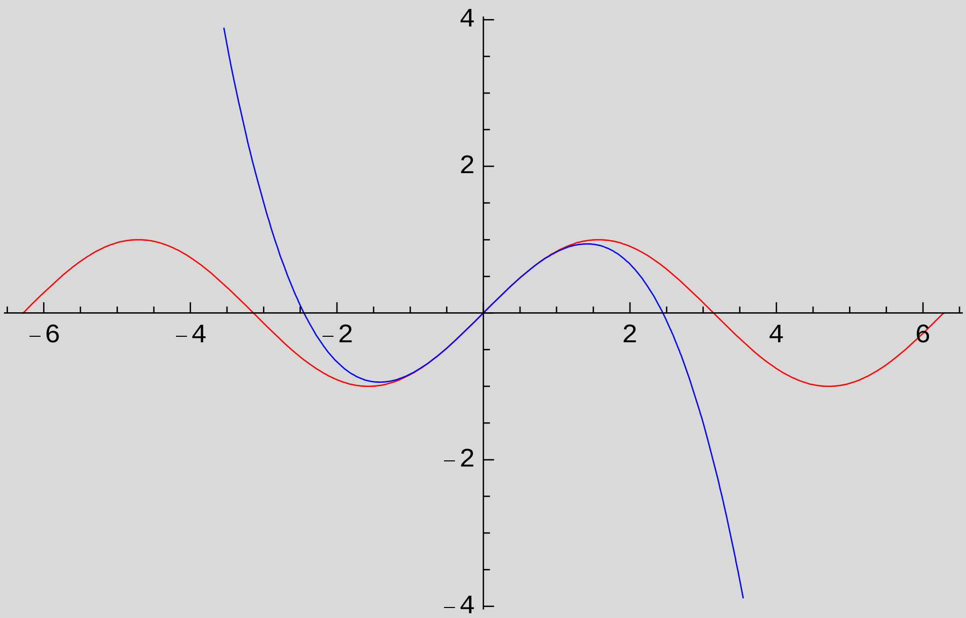
Calculamos el polinomio de MacLaurin de orden 3

$$p[x\_] = f[0] + \frac{f'[0]}{1!} x + \frac{f''[0]}{2!} x^2 + \frac{f'''[0]}{3!} x^3$$

$$x - \frac{x^3}{6}$$

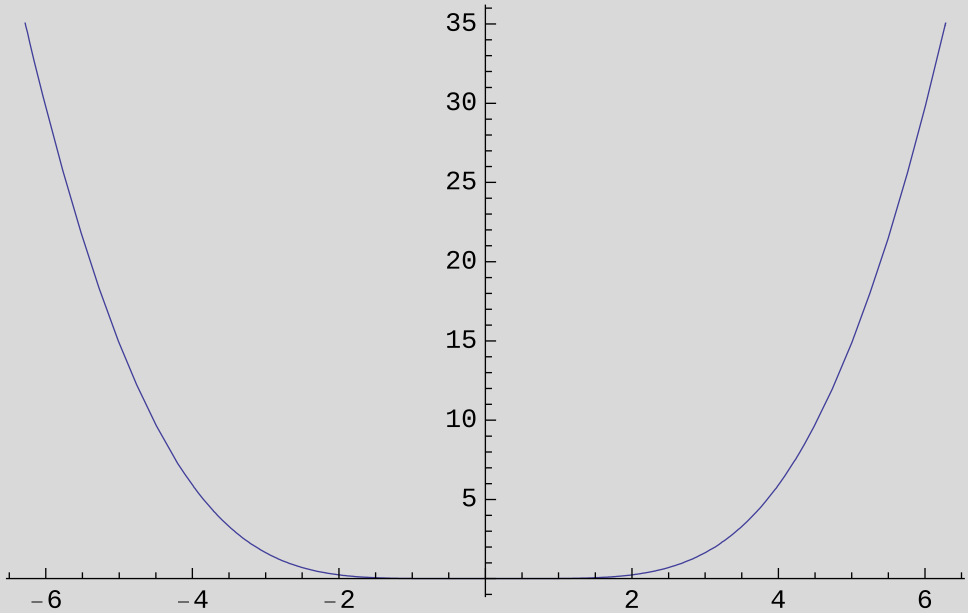
Representación gráfica

```
Plot[{f[x], p[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Puede observarse que la gráfica de la función (rojo) y la gráfica del polinomio (azul) son muy parecidas en las proximidades del punto $x = 0$. Esta "buena aproximación" puede también constatarse si representamos la gráfica de la función $|f(x) - p(x)|$ (función que nos da el error cometido al sustituir la función $f(x)$ por su polinomio de Taylor).

```
Plot[Abs[f[x] - p[x]], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → All]
```



Se aprecia en la gráfica que el error aumenta a medida que nos alejamos del punto $x = 0$, siendo muy pequeño en el intervalo [-2,2].

Mathematica incorpora la instrucción **Series** que nos permite calcular directamente el polinomio de Taylor de orden *n* de una función en un punto. La sintaxis de esta instrucción es:

Series[f[x],{x,a,n}]

En nuestro ejemplo anterior podemos escribir

```
Series[f[x], {x, 0, 3}]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$$

El término $O(x^4)$ nos indica que el error cometido al sustituir la función $f(x)$ por el polinomio será del orden de x^4, lo cual viene a decirnos que para valores de x próximos a 0 el error será muy pequeño.

Podemos pedirle a *Mathematica* que nos muestre el polinomio de Taylor sin que aparezca el orden del error mediante la instrucción:

```
Normal[Series[f[x], {x, 0, 3}]]
```

$$x - \frac{x^3}{6}$$

Ejemplo 3 *Calcular el valor aproximado de* $\sqrt[3]{1.2}$ *a partir del polinomio de Taylor de orden* 5 *centrado en a=*1 *de la función f dada por f(x) =*$\sqrt[3]{x}$.

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := ∛x
```

Calculamos el polinomio de Taylor de orden 5 centrado en $a = 1$

```
p[x_] = Normal[Series[f[x], {x, 1, 5}]]
```

$$1 + \frac{1}{3}(-1+x) - \frac{1}{9}(-1+x)^2 + \frac{5}{81}(-1+x)^3 - \frac{10}{243}(-1+x)^4 + \frac{22}{729}(-1+x)^5$$

Valor aproximado de utilizando el polinomio

```
p[1.2]
```

```
1.06266
```

Error cometido

```
Abs[f[1.2] - p[1.2]]
```

1.29364×10^{-6}

3. Ejercicios propuestos

1.- Encontrar los extremos relativos de las siguientes funciones en el dominio que se indica. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado obtenido.

- **f(x)=**$\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}$**, |x|>1.**
- **f(x)=sen(**$\frac{x}{x-2}$**), x>3**
- **f(x)=**$3x - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{4}$**, x∈R.**

2.-Calcular a y b para que la función f(x)=a $(x-1)^2+2$ si x<1 y f(x)=x^3-2bx si x≥1 sea derivable en x=1. Representar gráficamente la función para distintos valores de los parámetros a y b.

3.-Calcular las derivadas laterales de la función

$$f[x]=\frac{|x|}{x^2+1}$$

en el punto $x=0$. ¿Es derivable la función en x=0?

4.- Determinar los puntos de la gráfica $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$ en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y=-3x+1$.

5.- Calcular el valor aproximado (indicando el error cometido) de cos(π / 8) utilizando el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f[x]=\mathrm{Cos}[2x]$ centrado en x=0.