PRÁCTICA 2.- Límites y continuidad de funciones

1. Límite de funciones reales de una variable real

La orden que permite realizar el cálculo del límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a es **Limit.** La sintaxis de la instrucción **Limit** es la siguiente:

Limit[*expresión*, *variable*→**a]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* (finito o infinito)

Limit[*expresión*, *variable*→**a, Direction→-1]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* por la derecha.

Limit[*expresión*, *variable*→**a, Direction→1]**

Calcula el límite de la *expresión* dada cuando la *variable* indicada tiende hacia el punto *a* por la izquierda

- **Ejemplo 1.** ***Calcular los siguientes límites:***

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

```
Limit[Sin[x]/x, x -> 0]

1
```

b) $\lim_{x\to\infty} x \ln\left[\frac{x+3}{x-3}\right]$

```
Limit[x Log[(x + 3)/(x - 3)], x → ∞]

6
```

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

```
Limit[(1 - ⅇ^(1/x))/(1 + ⅇ^(1/x)), x -> 0, Direction → -1]
```

```
-1
```

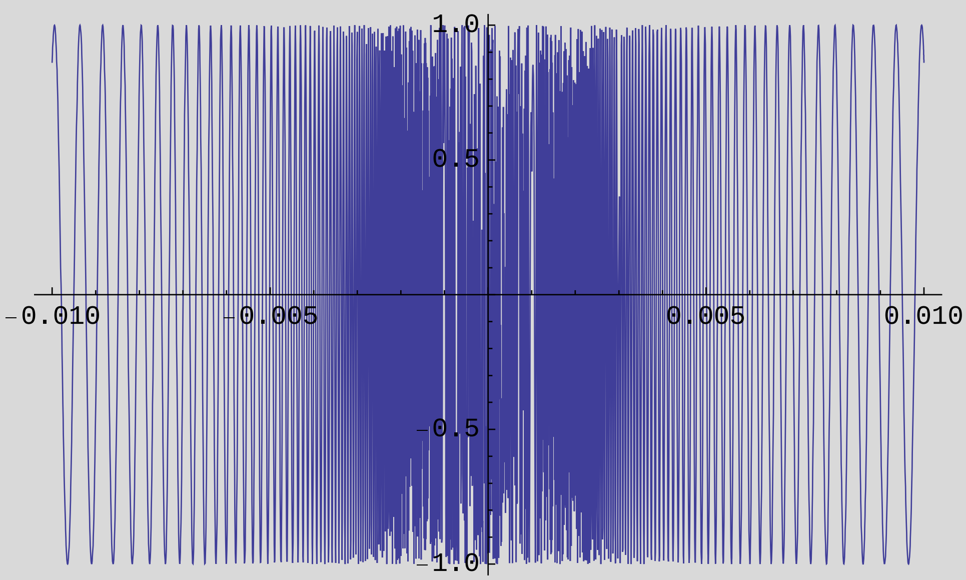
d) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

```
Limit[Cos[1 / x], x -> 0]
```

```
Interval[{-1, 1}]
```

El programa *Mathematica* no ha sido capaz de calcular el límite anterior. En este caso, esto es debido a que dicho límite no existe. De hecho la información facilitada por el programa nos indica que cualquier punto del intervalo [-1,1] es un límite de oscilación de la función cuando x tiende a 0. Esto se aprecia observando la gráfica de la función:

```
Plot[Cos[1/x], {x, -0.01, 0.01}]
```



1.1. Asíntotas de una función

Asíntotas verticales: La recta vertical $x = a$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ si se cumple que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ó \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales: La recta horizontal $y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ en la dirección $+\infty$

si cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

Análogamente, la recta horizontal $y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ en la dirección $-\infty$ si cumple que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

<u>Asíntotas oblicuas</u>: La recta $y = m\,x + n$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ si se cumple que:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\mathrm{mx} + n)) = 0$$

Los valores de m y n se determinan de la siguiente manera,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

Análogamente se define para $x \to -\infty$.

■ Ejemplo 2. Determinar las asíntotas de la función $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$

Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := (2 x + 1)/(x^2 - 4)
```

```
Solve[x^2 - 4 == 0, x]
```

```
{{x → -2}, {x → 2}}
```

Asíntotas verticales: Dado que el denominador se anula para $x = -2$ y $x = 2$, dichas rectas (verticales) son candidatas a ser asíntotas. Para ello estudiamos los límites laterales en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

```
Limit[f[x], x → -2, Direction → -1]
```

∞

```
Limit[f[x], x → -2, Direction → 1]
```

$-\infty$

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → -1]

∞
```

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → 1]

-∞
```

Por tanto, las rectas verticales $x = -2$, $x = 2$ son asíntotas de la función.
Asíntotas horizontales: Calculamos el límite en $+\infty$ y $-\infty$

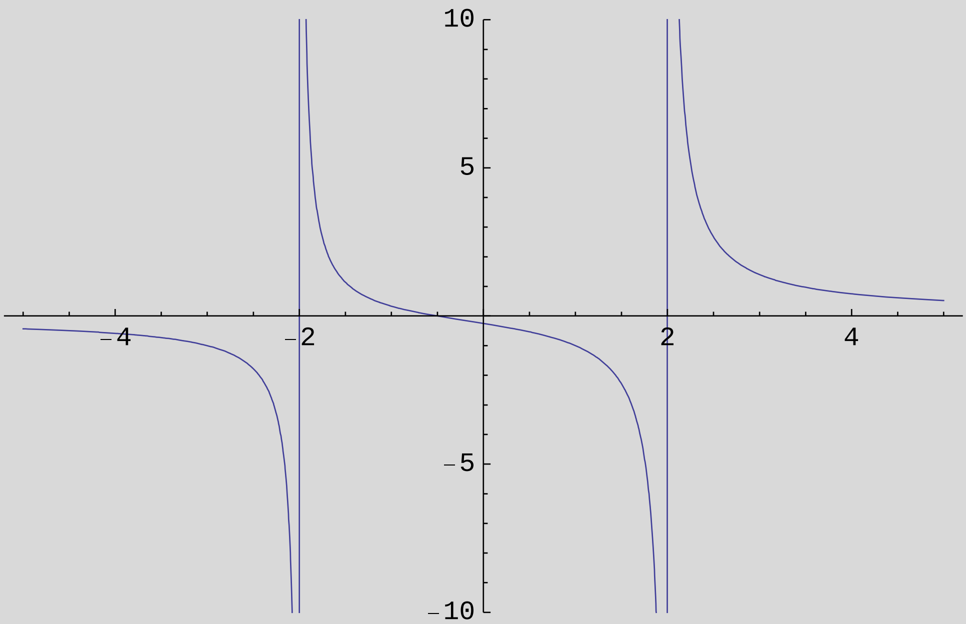
```
Limit[f[x], x → ∞]

0
```

```
Limit[f[x], x → -∞]

0
```

Esto nos dice que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función en las direcciones $+\infty$ y $-\infty$.

Gráfica de la función:

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotRange → {-10, 10}]
```



2. Continuidad

Una función $f: D \to R$ es continua en un punto $a \in D$ si se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

■ Ejemplo 3. Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{2}{1-e^{1/x}}$, *si* $x \neq 0$; $f(0) = 0$

a) Definimos la función

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := 2/(1 + e^(1/x))
f[0] = 0;
```

Estudiamos la continuidad. Sólo es necesario estudiar la continuidad en $x = 0$. Calcularemos los límites laterales en $x = 0$.

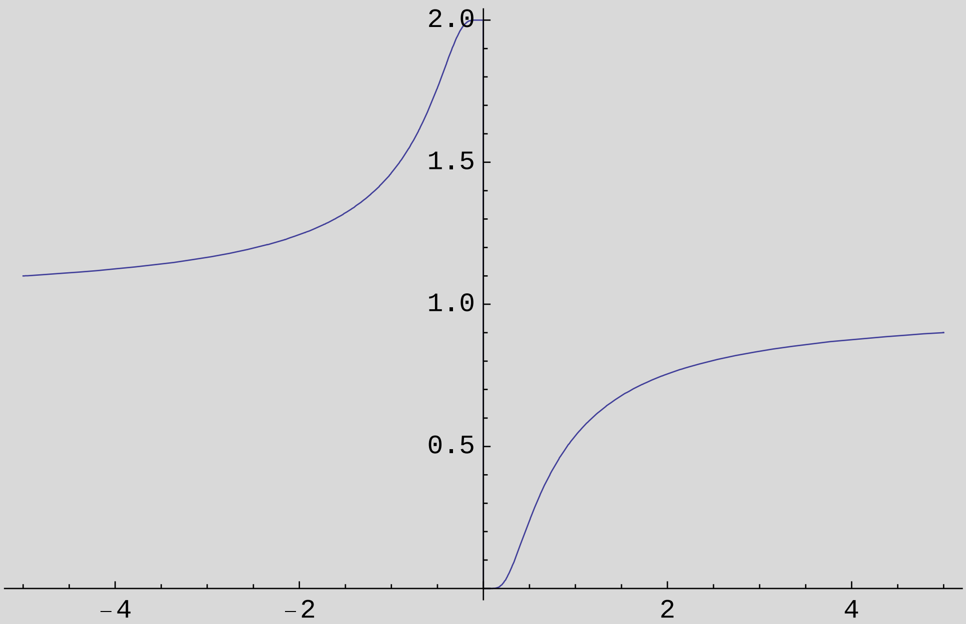
```
Limit[f[x], x → 0, Direction → -1]

0
```

```
Limit[f[x], x → 0, Direction → 1]
```

```
2
```

Como los límites laterales son distintos entonces la función presenta en $x = 0$ una discontinuidad esencial de primera especie (salto finito), lo que se observa gráficamente:

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



b) $f(x) = x^3 - 2x$, **si** $x < -1$; $f(x) = 3 + 2x$, *si* $-1 \leq x < 2$; $f(x) = x^2 - 2x$, **si** $x \geq 2$.

Se trata de una función definida a trozos. Cada uno de los trozos viene dado por una función continua. Por tanto, sólo tenemos que estudiar la continuidad de la función f en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

```
Clear["Global`*"]
f[x_] := Which[x < -1, x^3 - 2 x, -1 ≤ x < 2, 3 + 2 x, x ≥ 2, x^2 - 2 x]
```

Continuidad en $x = -1$

Calculamos los límites laterales en x = -1

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → 1]
```

```
1
```

```
Limit[f[x], x → -1, Direction → -1]

1
```

Calculamos el valor de f en x = -1

```
f[-1]

1
```

Como los límites laterales coinciden y son iguales al valor de la función en x = -1, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x = 2$

Calculamos los límites laterales en x = 2

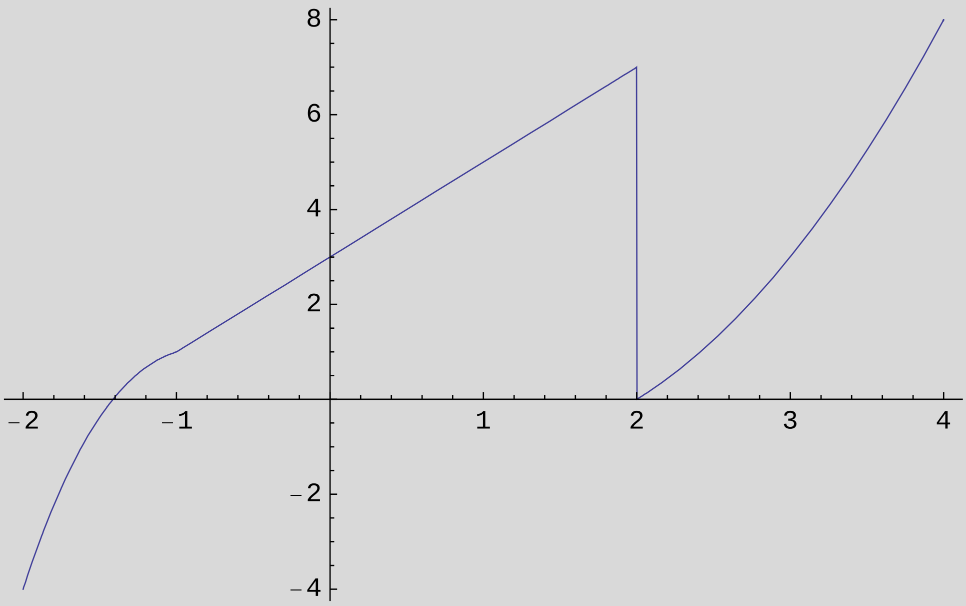
```
Limit[f[x], x → 2, Direction → 1]

7
```

```
Limit[f[x], x → 2, Direction → -1]

0
```

Como los límites son distintos, la función no es continua en dicho punto (tiene una discontinuidad de salto en $x = 2$).

Gráfica de la función

```
Plot[f[x], {x, -2, 4}]
```



3. Ejercicios propuestos

1.-Calcular los siguientes límites:

- $\lim_{x\to 0} \frac{6\,x-\operatorname{sen}(2\,x)}{2\,x+3\operatorname{sen}(4\,x)}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{a\,x}-e^{b\,x}}{x}$

- $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$

2.-Determinar las asíntotas de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado obtenido.

- $f(x)=\frac{2+x}{x^2(1-x)}$

f(x)= $2-\sqrt{1+x^2}$

3.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente para comprobar el resultado obtenido.

- **f(x)=** $\frac{\text{sen}(x-2)}{x-2}$ **si x≠2, f(2)=2.**
- **f(x)=** $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ **si x≠1, f(1)=-3.**