Práctica 1.- Sucesiones y series

El programa Mathematica nos sirve de ayuda para estudiar el comportamiento de sucesiones y series de números reales, mediante las instrucciones Limit y $\sum$, que nos permitirán, en la mayoría de los casos, calcular el límite de una sucesión y la suma de una serie, respectivamente.

1. - Sucesiones de números reales

Ejercicio 1.1 Estudiar la sucesión de término general $a_n = \frac{3}{n^2+1}$.

• Definimos la sucesión

In[1]:=
```
Clear["Global`*"]
a[n_] := 3/(n^2 + 1)
```

• Generamos una tabla con los 20 primeros términos de la sucesión

In[3]:=
```
terminos = Table[a[n], {n, 1, 20}]
```

Out[3]=
$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \frac{3}{26}, \frac{3}{37}, \frac{3}{50}, \frac{3}{65}, \frac{3}{82}, \frac{3}{101}, \frac{3}{122}, \frac{3}{145}, \frac{3}{170}, \frac{3}{197}, \frac{3}{226}, \frac{3}{257}, \frac{3}{290}, \frac{3}{325}, \frac{3}{362}, \frac{3}{401}\right\}$$

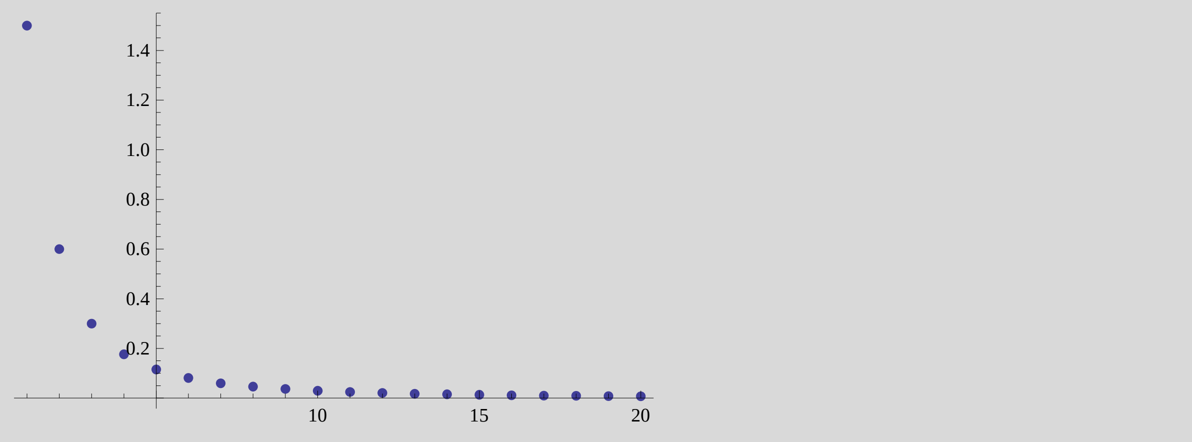
In[4]:=
```
Table[a[n], {n, 1, 20}] // N
```

Out[4]=
```
{1.5, 0.6, 0.3, 0.176471, 0.115385, 0.0810811, 0.06, 0.0461538,
 0.0365854, 0.029703, 0.0245902, 0.0206897, 0.0176471, 0.0152284,
 0.0132743, 0.0116732, 0.0103448, 0.00923077, 0.00828729, 0.0074813}
```

• Los visualizamos gráficamente

In[5]:=
```
ListPlot[terminos, PlotStyle -> PointSize[0.015], PlotRange → All]
```

Out[5]=



• También podemos hallar un término cualquiera de la sucesión :

In[6]:=
```
a[3]
```

Out[6]= $\frac{3}{10}$

In[7]:=
```
a[31]
```

Out[7]= $\frac{3}{962}$

Gráficamente se observa que la sucesión es decreciente, acotada y que tiende a 0. Veamos como podemos estudiar estos aspectos con Mathematica.

• Crecimiento :

In[8]:=
```
Simplify[a[n] ≥ a[n + 1]]
```

Out[8]= $\frac{3}{1+n^2} \geq \frac{3}{1+(1+n)^2}$

El programa no nos da información sobre si la desigualdad planteada es cierta o no. Esto es debido, entre otras cosas, a que el programa no reconoce a la variable n como un número natural. La siguiente instrucción resuelve este problema.

In[9]:=
```
Simplify[a[n] ≥ a[n + 1], n ∈ Integers ∧ n > 0]
```

Out[9]=
```
True
```

• Acotación:

In[10]:=
```
Simplify[0 ≤ a[n] ≤ 1.5, n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[10]=
```
True
```

• Límite :

In[11]:=
```
Limit[a[n], n → ∞]
```

Out[11]=
```
0
```

También podemos utilizar variables como subíndices. De esta forma, la sucesión anterior podría definirse como

In[12]:=

$$a_{n\_} := \frac{3}{n^2 + 1}$$

Esto nos permite utilizar la misma terminología que habitualmente usamos en clase, aunque si utilizamos esta notación en *Mathematica* hemos de tener mucho cuidado al escribir los subíndices.

Ejemplo 1.2 Calcular el límite de la sucesión de término general $b_n = \frac{2^n}{n^3+\pi^n}$

• Definimos la sucesión

In[13]:=
```
Clear["Global`*"]
```

$$b_{n\_} := \frac{2^n}{n^3 + \pi^n}$$

• Calculamos su límite

In[15]:=
```
Limit[bn, n → ∞]
```

Out[15]=
```
0
```

Ejemplo 1.3 Calcular el límite de la sucesión de término general $c_n = \cos(n\,\pi)$

• Definimos la sucesión

In[16]:=
```
Clear["Global`*"]
cn_ := Cos[n π]
```

• Calculamos su límite con Mathematica

In[18]:=
```
Limit[cn, n → ∞]
```

Out[18]=
```
Interval[{-1, 1}]
```

En este caso *Mathematica* no es capaz de darnos el valor del límite debido a que se trata de una sucesión oscilante, es decir, que tiene dos subsucesiones con distinto límite (por tanto, la sucesión no será convergente).

• Estudiemos la sucesión de términos pares :

In[19]:=
```
c2 n
```

Out[19]=
```
Cos[2 n π]
```

Observemos que Mathematica no identifica cos(2nπ) = 1. Esto se debe a que, como hemos comentado anteriormente, el programa no reconoce a la variable n como un número natural. Para ello debemos utilizar la instrucción :

In[20]:=
```
Simplify[c2 n, n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[20]=
```
1
```

Ahora también podemos calcular su límite

In[21]:=
```
Limit[Simplify[c2 n, n ∈ Integers ⋀ n > 0], n → ∞]
```

Out[21]=
```
1
```

• Estudiemos ahora la sucesión de términos impares :

In[22]:=
```
c2 n-1
```

Out[22]=
```
Cos[(-1 + 2 n) π]
```

In[23]:=
```
Simplify[c2 n-1, n ∈ Integers ⋀ n > 0]
```

Out[23]=
```
-1
```

In[24]:=
```
Limit[Simplify[c2 n-1, n ∈ Integers ⋀ n > 0], n → ∞]
```

Out[24]=
```
-1
```

La sucesión $\{c_n\}$ admite dos subsucesiones que tienen distinto límite. Por tanto la sucesión es oscilante.

2. - Series de números reales

Ejemplo 2.1 Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^2+3 n-2}$ es convergente. Calcular su suma.

• Definimos el término general de la serie

In[25]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$a_{n\_} := \frac{1}{2\,n^2 + 3\,n - 2}$$

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[27]:=
$$\text{Limit}[a_n,\ n \to \infty]$$

Out[27]=
```
0
```

La serie puede ser convergente.

• Criterio del cociente

In[28]:=
$$\text{Limit}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n},\ n \to \infty\right]$$

Out[28]=
```
1
```

Entonces el criterio del cociente no decide. Apliquemos el criterio de comparación por paso al límite:

In[29]:=
$$b_{n\_} := \frac{1}{n^2}$$

In[30]:=
$$\text{Limit}\left[\frac{a_n}{b_n},\ n \to \infty\right]$$

Out[30]=
$$\frac{1}{2}$$

Como el límite es un número real positivo las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n^2 + 3\,n - 2}$.

• Calculamos su suma (Mathematica puede calcula el valor exacto de la suma de diferentes tipos de series)

In[31]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n^2 + 3\,n - 2}$$

Out[31]=
$$\frac{1}{10}\,(3 + 2\,\text{Log}[4])$$

In[32]:=
```
N[\!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(n = 1\), \(\[Infinity]\)]\*FractionBox[\(1\), \(2 n^2 + 3 n - 2\)]\)]
```

$$N\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^2 + 3 n - 2}\right]$$

Out[32]= 0.577259

Ejemplo 2.2 Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ es convergente.Calcular su suma a partir de la sucesión de sumas parciales.

• Definimos el término general de la serie

In[33]:=
```
Clear["Global`*"]
```

$$a_{n\_} := \frac{n}{2^n}$$

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[35]:= $\text{Limit}[a_n, n \to \infty]$

Out[35]= 0

La serie puede ser convergente.

• Criterio del cociente

In[36]:= $\text{Limit}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}, n \to \infty\right]$

Out[36]= $\frac{1}{2}$

Como el límite es L=$\frac{1}{2}$ < 1 el criterio del cociente garantiza que la serie es convergente. Calculemos la sucesión de sumas parciales:

In[37]:= $s_{n\_} = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Out[37]= $2^{-n} \left(-2 + 2^{1+n} - n\right)$

Mathematica nos facilita en este caso una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Ahora podemos calcular el valor de la suma de la serie estudiando el límite de la sucesión $\{s_n\}$.

In[38]:= $\text{Limit}[s_n, n \to \infty]$

Out[38]= $\frac{\text{Log}[4]}{\text{Log}[2]}$

In[39]:=
```
FullSimplify[%]
```

Out[39]=
```
2
```

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ tiene como suma $S = 2$. El valor de la suma también podría haberse obtenido directamente

In[40]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Out[40]=
```
2
```

Ejemplo 2.3 Probar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^n}$ es convergente.Calcular su suma .

• Definimos el término general de la serie

In[41]:=
```
Clear["Global`*"]
```
$$a_{n\_} := \frac{1}{\text{Log}[n]^n}$$

Se trata de una serie de términos positivos.Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

• Condición necesaria de convergencia

In[43]:=
$$\text{Limit}[a_n, n \to \infty]$$

Out[43]=
```
0
```

La serie puede ser convergente.

• Criterio del cociente

In[44]:=
$$\text{Limit}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}, n \to \infty\right]$$

Out[44]=
```
0
```

Como el límite es L=0 < 1 el criterio del cociente garantiza que la serie es convergente. Calculemos la sucesión de sumas parciales:

In[45]:=
$$s_{n\_} = \sum_{k=2}^{n} a_k$$

Out[45]=
$$\sum_{k=2}^{n} \text{Log}[k]^{-k}$$

En este caso, Mathematica no ha sido capaz de darnos una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{s_n\}$

de sumas parciales.

In[46]:=
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

Out[46]=
$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{Log}[n]^{-n}$$

El programa Mathematica tampoco ha podido darnos el valor exacto de la suma. Sin embargo, podemos pedirle que nos de un valor aproximado usando el comando N.

In[47]:=
$$N\left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n\right]$$

Out[47]= 3.24261

Si bien el comando N puede servirnos en la mayoría de los casos, para obtener un valor aproximado de la suma de una serie el programa *Mathematica* incorpora la instrucción NSum[a_n, {n, n_{min}, n_{max}}]

In[48]:=
```
NSum[aₙ, {n, 2, ∞}]
```

Out[48]= 3.24261

Ejemplo 2.4 Calcular un valor aproximado de la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(2 n^2 - n + 1\right)$

Valor aproximado

In[49]:=
$$\text{NSum}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(2 n^2 - n + 1\right), \{n, 1, \infty\}\right]$$

Out[49]= -0.232

Valor exacto

In[50]:=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(2 n^2 - n + 1\right)$$

Out[50]=
$$-\frac{29}{125}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

Valor aproximado

In[51]:=
```
NSum[(-1)^n/(3 n - 2), {n, 1, ∞}]
```

Out[51]= -0.835649

Valor exacto

In[52]:= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

Out[52]= $\frac{1}{9}\left(-\sqrt{3}\,\pi - 3\,\mathrm{Log}[2]\right)$

In[53]:= $N\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}\right]$

Out[53]= -0.835649

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+4n-3}{n!-3}$

Valor aproximado

In[54]:=
```
NSum[(n^4 + 4 n - 3)/(n! - 3), {n, 1, ∞}]
```

Out[54]= 28.7388

Valor exacto

In[55]:= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+4n-3}{n!-3}$

Out[55]= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3+4n+n^4}{-3+n!}$

En este caso Mathematica no es capaz de obtener el valor exacto de la serie.

3. - Ejercicios propuestos

1.-Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2}{n^2-7}$, se pide :

a) Escribir los 20 primeros términos y representarlos gráficamente.

b) Estudiar el crecimiento y la acotación,

c) Calcular el límite.

2.-Probar que la sucesión de término general $b_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{4}$ es oscilante, estudiando las subsucesiones $\{b_{2n}\}$ y $\{b_{2n-1}\}$.

3.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$.

4.-Obtener la suma de

a) los n primeros números naturales,

b) los n primeros números impares.

5.- Probar que las siguientes series son convergentes. Calcular el valor de la suma o, en su caso, un valor aproximado.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{4n^5+9n^3-2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

6.-Calcular la suma de la serie $\sum \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ de las dos formas siguientes:

a) calculando el límite de la sucesión de sumas parciales,

b) directamente con el programa *Mathematica*.

7.- Estudiar el carácter de la serie $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.