

Práctica 02 Gráficos 2D con Mathematica

Mathematica dispone de varias instrucciones para representar gráficamente funciones, curvas o elementos geométricos en el plano. La instrucción Plot nos permite representar la gráfica de una función, $y=f(x)$. Sin embargo, no todas las curvas del plano pueden representarse como la gráfica de una función. Por ejemplo, la circunferencia unitaria centrada en el origen viene dada por la ecuación:

$$x^2+y^2=1.$$

Dicha curva no se corresponde con la gráfica de una función dado que hay dos valores de la variable y para cada valor de la variable x :

$$y=+\sqrt{1-x^2} \text{ e } y=-\sqrt{1-x^2}.$$

Si bien, en este caso, podemos considerar la circunferencia como la gráfica de dos funciones, no siempre será posible despejar la variable y en una expresión del tipo $f(x,y)=0$. Mathematica incorpora la instrucción ContourPlot para la representación gráficas curvas dadas por una expresión implícita (donde la y no está despejada).

Como sabemos, la ecuación de la circunferencia también puede venir dada por las ecuaciones paramétricas,

$$x=\cos(t), \quad y=\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

Para la representación gráfica de una curva dada mediante las ecuaciones paramétricas:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t \in I,$$

donde I es un cierto intervalo real, utilizaremos la instrucción ParametricPlot.

1.-Representación de curvas dadas en forma explícita

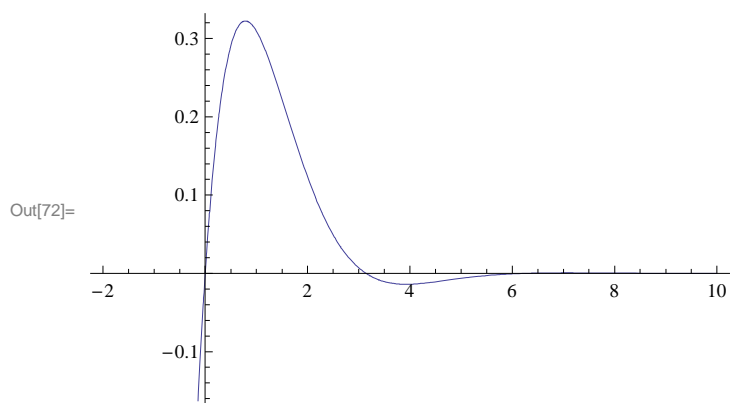
Una curva en forma explícita viene dada por una ecuación del tipo $y=f(x)$, donde f es una función definida en algún subconjunto D de la recta real que se denomina dominio de la función. La gráfica de una función es el conjunto de puntos dado por

$$\text{Gr}(f)=\{(x,y): x \in D, y=f(x)\}$$

La representación gráfica de este conjunto de puntos en un sistema de coordenadas XY nos proporciona, por lo general, una curva en el plano. Para representar la gráfica de una curva dada en forma explícita con el programa Mathematica se utiliza la instrucción Plot.

Ejemplo 1.1 Representar la gráfica de la función $y = e^{-x} \sin(x)$ en el intervalo $[-2, 10]$.

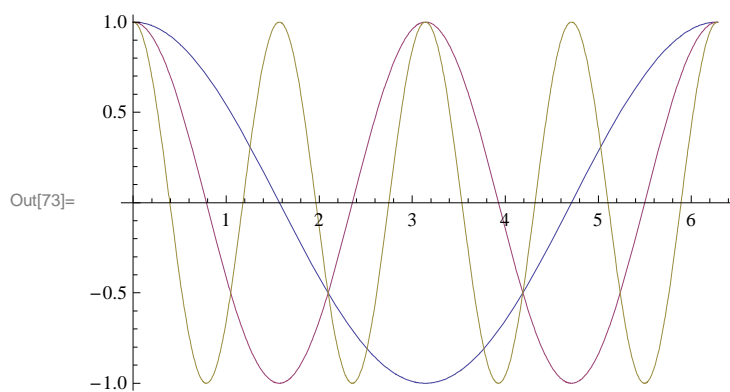
In[72]:= `Plot[e-x Sin[x], {x, -2, 10}]`



Mathematica nos permite visualizar simultáneamente la gráfica de varias funciones dadas en forma explícita: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ..., $y = f_n(x)$, en un mismo intervalo

Ejemplo 1.2 Representar en unos mismos ejes coordenados la gráfica de las funciones $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ e $y = \cos 4x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

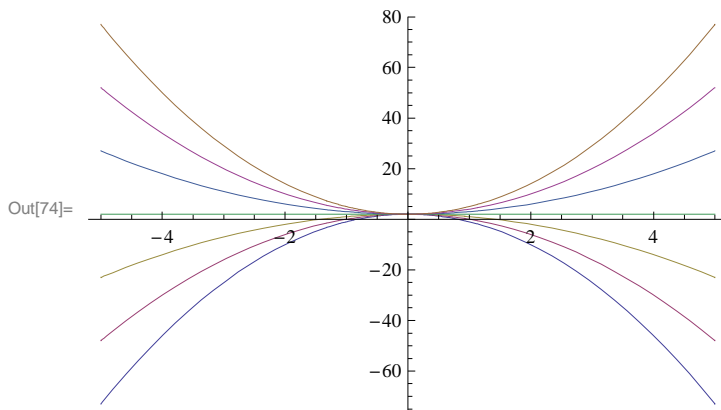
In[73]:= `Plot[{Cos[x], Cos[2 x], Cos[4 x]}, {x, 0, 2 π}]`



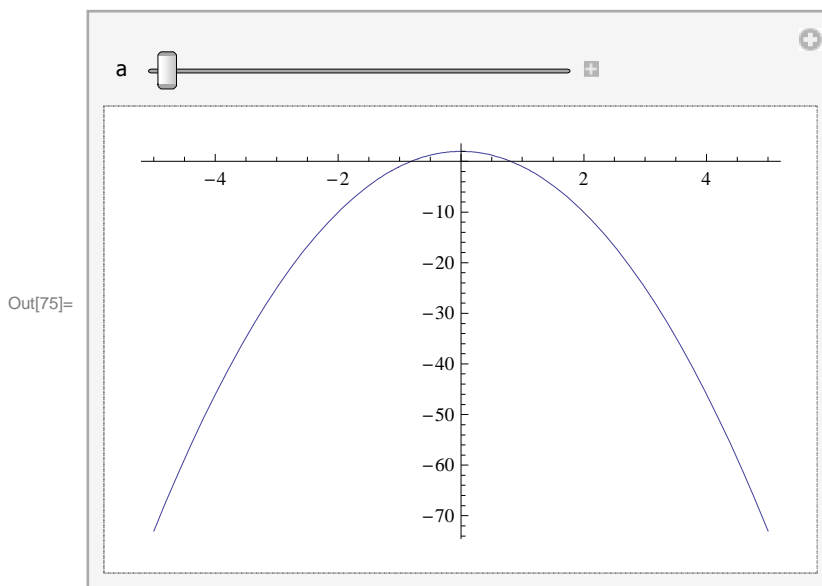
O una familia de curvas definidas en función de un parámetro:

Ejemplo 1.3 Representar gráficamente la familia de parábolas $y = ax^2 + 2$, en el intervalo $[-5, 5]$, para valores enteros de a entre -3 y 3

```
In[74]:= Plot[Evaluate[Table[a x^2 + 2, {a, -3, 3}], {x, -5, 5}]
```



```
In[75]:= Manipulate[Plot[a x^2 + 2, {x, -5, 5}], {a, -3, 3}]
```



2.- Representación gráfica de curvas dadas en forma paramétrica

Una curva en el plano viene dada mediante una aplicación:

$$s(t)=(x(t),y(t)), \quad t \in I,$$

donde I es un intervalo de la recta real. La variable t recibe el nombre de parámetro. A cada valor del parámetro t le hacemos corresponder un punto del plano que denotamos por $s(t)$ y cuyas coordenadas vienen dadas por: $(x(t), y(t))$. Las ecuaciones,

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t \in I$$

reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de la curva s .

o La gráfica de una función $y=f(x)$ con $x \in D$, siempre puede expresarse en forma paramétrica mediante las ecuaciones:

$$x=t, \quad y=f(t), \quad t \in D.$$

o Las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $P=(x_0, y_0)$ y tiene la dirección del vector $v=(v_1, v_2)$ son

$$x=x_0+v_1t, \quad y=y_0+v_2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

o Las ecuaciones paramétricas de una elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b vienen dadas por

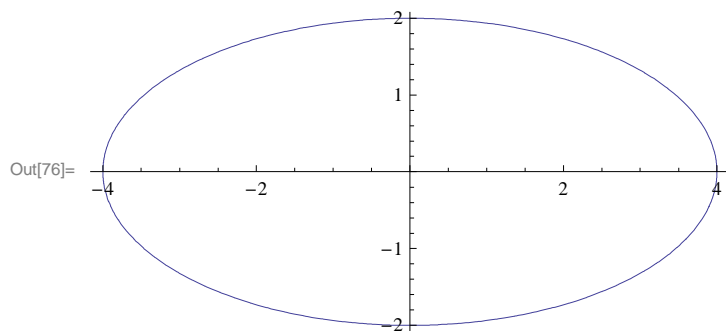
$$x=x_0+a \cos(t), \quad y=y_0+b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

En el caso particular de que $a = b = r$ se tratará de una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r .

Ejemplo 2.1

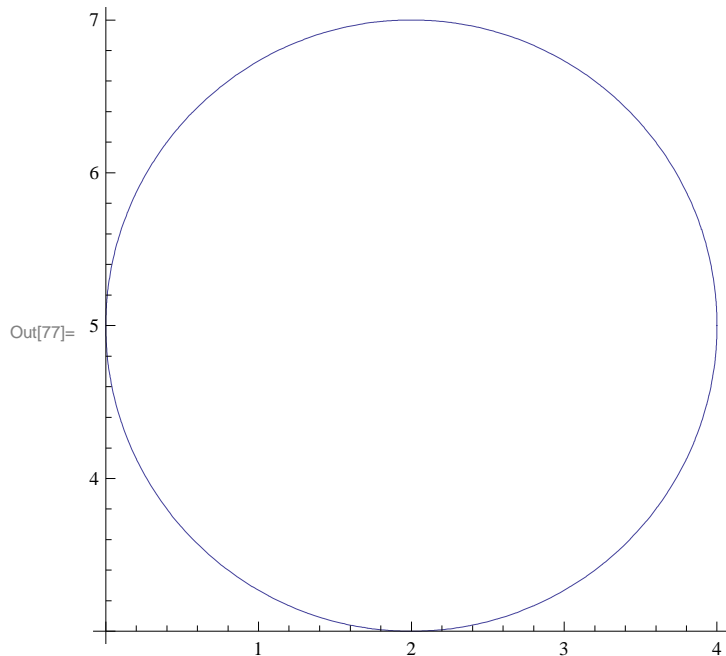
a) Una elipse con centro el origen y de semiejes 4 y 2.

```
In[76]:= ParametricPlot[{4 Cos[t], 2 Sin[t]}, {t, 0, 2 π}]
```



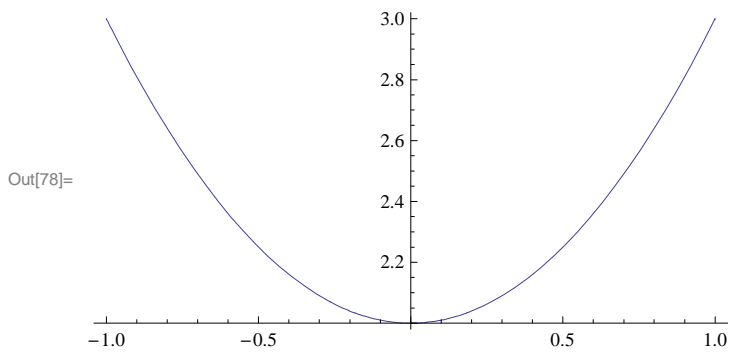
b) Una circunferencia con centro el punto (2,5) y de radio 2.

```
In[77]:= ParametricPlot[{2 + 2 Cos[t], 5 + 2 Sin[t]}, {t, 0, 2 π}]
```



c) Una parábola

```
In[78]:= ParametricPlot[{t, t^2 + 2}, {t, -1, 1}]
```

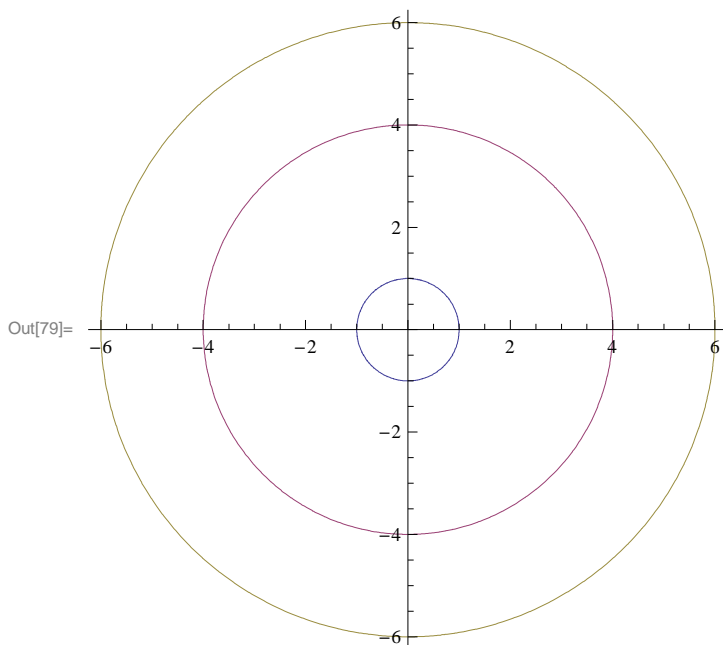


De forma análoga a la instrucción Plot también podemos representar un conjunto de curvas expresadas en forma paramétrica en el mismo sistema de coordenadas, en función del mismo parámetro y en el mismo rango de variación del parámetro.

Ejemplo 2.2

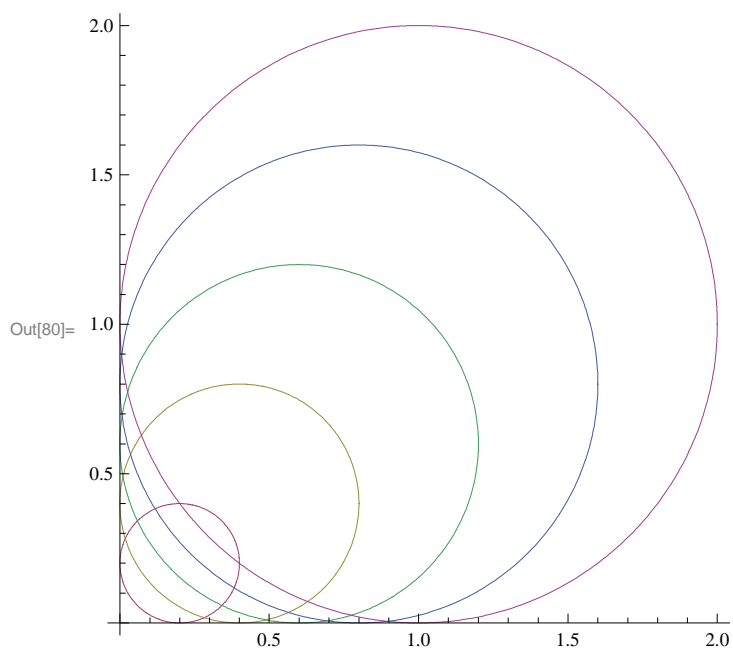
a) Dibujar tres círculos concéntricos en el origen de radios 1, 4 y 6.

```
In[79]:= ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t]}, {4 Cos[t], 4 Sin[t]}, {6 Cos[t], 6 Sin[t]}}, {t, 0, 2 π}]
```



b) Representar la familia de circunferencias que tienen su centro en la bisectriz del primer cuadrante y son tangentes a los ejes coordenados.

```
In[80]:= ParametricPlot[Evaluate[Table[{a + a Cos[t], a + a Sin[t]}, {a, 0, 1, 0.2}], {t, 0, 2 π}]
```



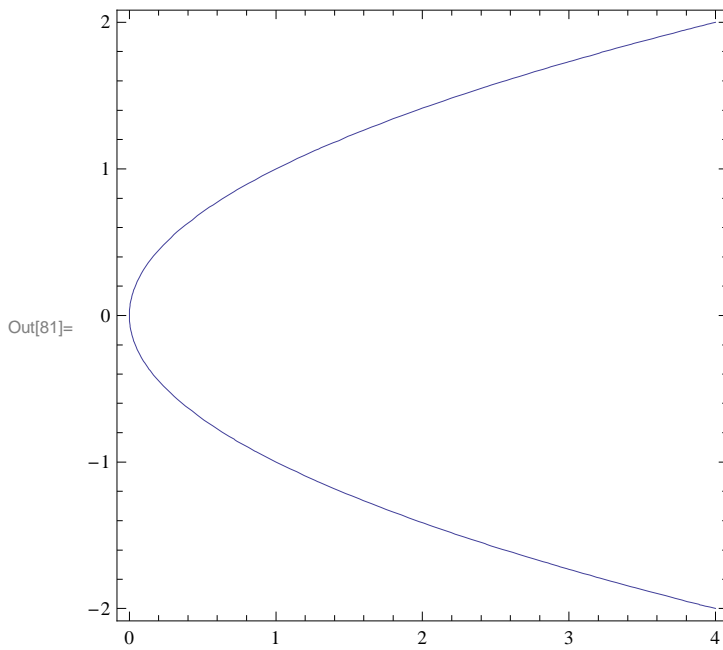
3.-Representación gráfica de curvas dadas en forma implícita.

Mathematica permite también representar la gráfica de una curva dada en forma implícita mediante una ecuación del tipo $F(x,y)=0$, es decir, donde la variable y no está dada en función de la variable x . Para ello utilizaremos la instrucción `ContourPlot`.

Ejemplo 3.1

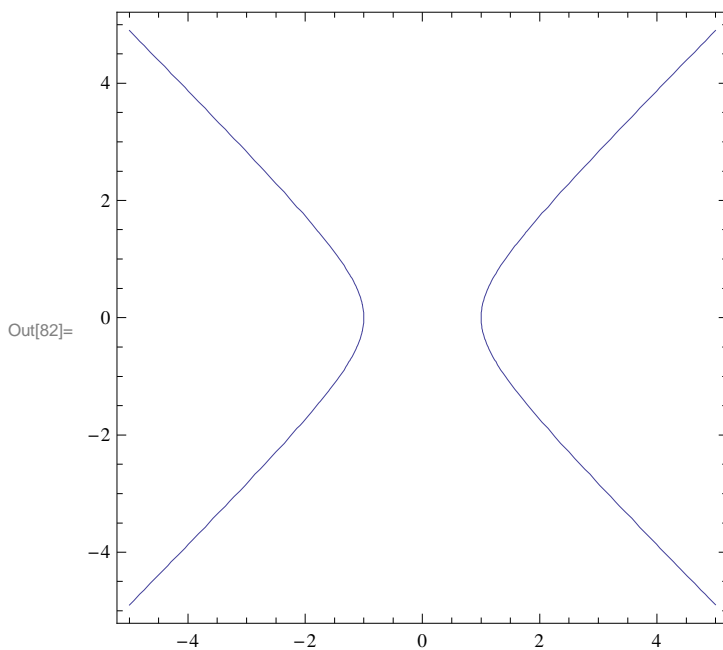
a) Representar la parábola $x=y^2$ para valores de x en el intervalo $[0,4]$.

In[81]:= `ContourPlot[x == y^2, {x, 0, 4}, {y, -2, 2}]`



b) Representar la hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = 1$, para valores de x en el intervalo $[-5, 5]$.

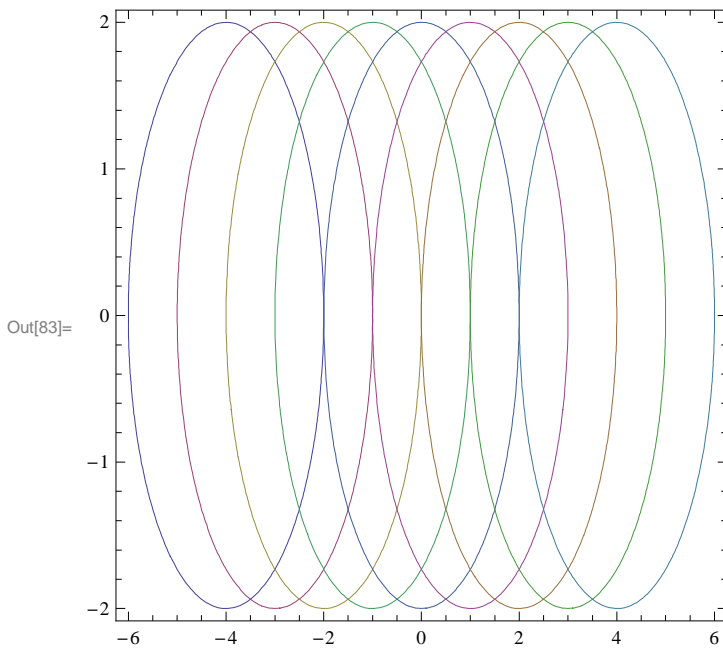
In[82]:= `ContourPlot[x^2 - y^2 == 1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]`



También podemos dibujar varias curvas o una familia de curvas dadas en forma implícita:

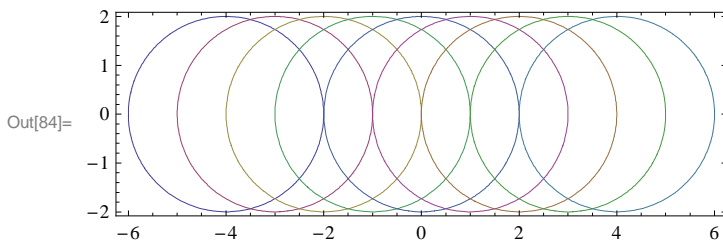
Ejemplo 3.2 Dibujar una familia de circunferencias de radio 2 con centro en el eje OX

```
In[83]:= ContourPlot[Evaluate[Table[(x - a)^2 + y^2 == 4, {a, -4, 4}], {x, -6, 6}, {y, -2, 2}]
```



Observa que en la gráfica anterior las circunferencias parecen elipses. Ello se debe a que *Mathematica* no está utilizando la misma escala en los dos ejes. Si queremos que use la misma escala debemos usar la opción `AspectRatio → Automatic`. Observa la diferencia

```
In[84]:= ContourPlot[Evaluate[Table[(x - a)^2 + y^2 == 4, {a, -4, 4}], {x, -6, 6}, {y, -2, 2}, AspectRatio → Automatic]
```



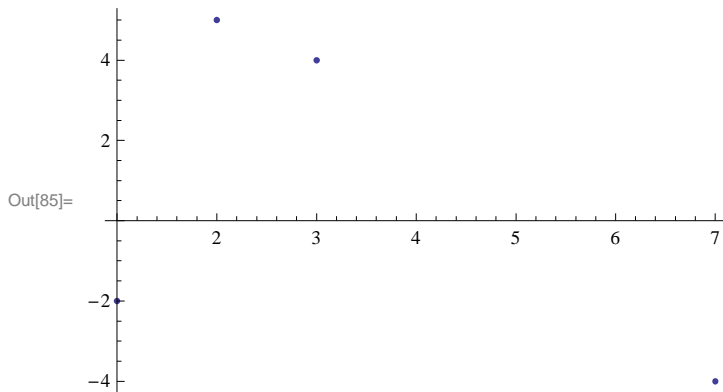
4.-Representación gráfica de un conjunto finito de puntos en el plano.

En la práctica, cuando trabajamos con datos o medidas obtenidas experimentalmente, suele ser habitual que no conozcamos una fórmula explícita de nuestra función sino una serie de valores y_i en determinados puntos $x_i, i=1, \dots, n$. Se dice entonces que la función está dada mediante la tabla de valores $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$. El programa *Mathematica* permite la representación gráfica de estos puntos mediante la instrucción:

$$\text{ListPlot}[\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_n, y_n\}\}]$$

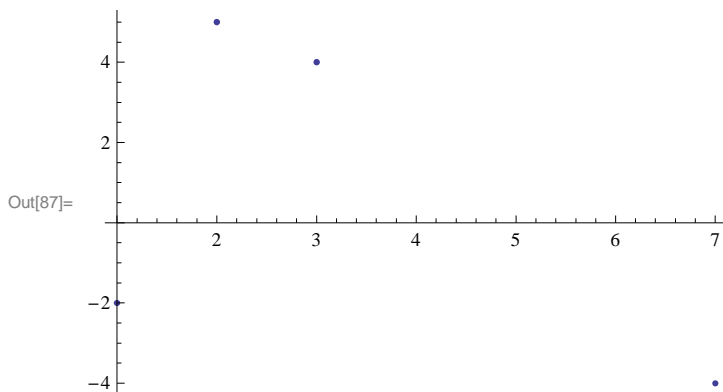
Ejemplo 4.1 Dibujar la tabla de puntos $\{(1,-2), (2,5), (3,4), (7,-4)\}$


```
In[85]:= ListPlot[{{1, -2}, {2, 5}, {3, 4}, {7, -4}}]
```



o En ocasiones puede resultar aconsejable almacenar la tabla de valores en una variable. Esto nos permitirá volver a utilizar la misma tabla sin necesidad de tener que volver a escribirla.

```
In[86]:= puntos = {{1, -2}, {2, 5}, {3, 4}, {7, -4}};
ListPlot[puntos]
```

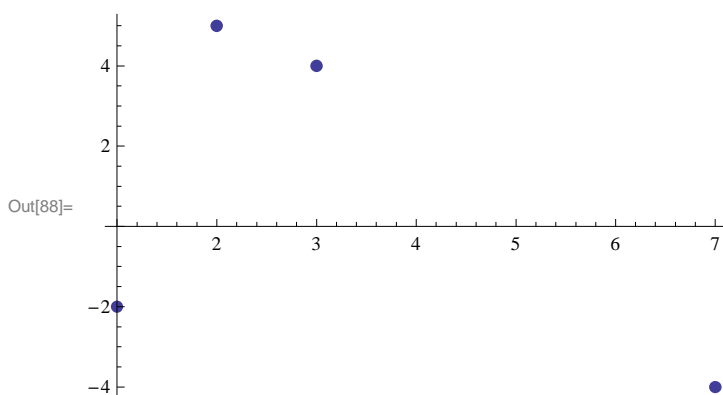


o Podemos conseguir agrandar el tamaño de los puntos para visualizarlos mejor, mediante la opción:

PlotStyle → PointSize[tamaño de punto],

donde tamaño de punto es un número entre 0 y 1, que indica el porcentaje del tamaño del punto respecto del tamaño total del dibujo. Por ejemplo: 0.02 significa que el tamaño del punto será el 2% del tamaño total del gráfico.

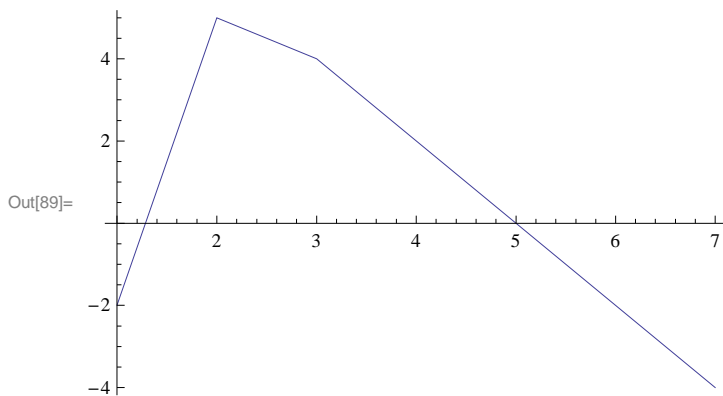
```
In[88]:= ListPlot[puntos, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



El programa Mathematica también nos permite dibujar la gráfica de la poligonal obtenida al unir los puntos, mediante la opción:

Joined → True

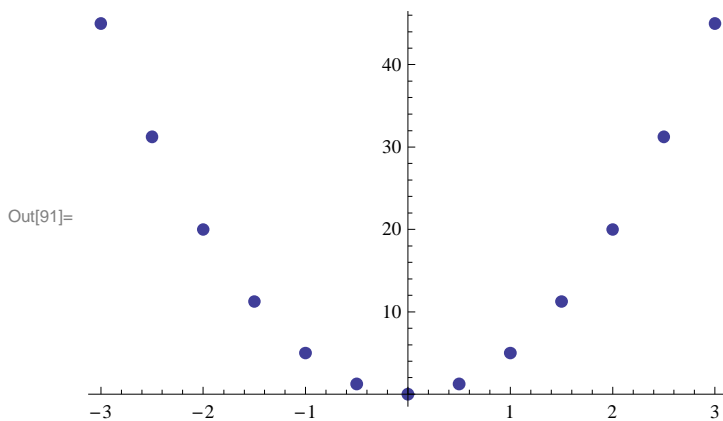
```
In[89]:= ListPlot[puntos, Joined → True]
```



En el siguiente ejemplo generamos una tabla de puntos sobre la parábola $y=5x^2$ usando la instrucción Table.

Ejemplo 4.2 Representar la tabla de valores $\{(k, 5k^2)\}$ para valores de k entre -3 y 3 con un incremento de 0.5 .

```
In[90]:= puntos = Table[{k, 5 k^2}, {k, -3, 3, 0.5}];
ListPlot[puntos, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



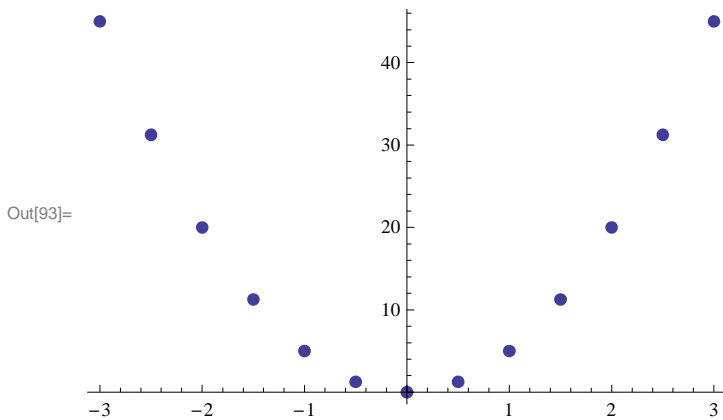
5.-Combinando gráficos: La instrucción Show.

La instrucción Show permite visualizar un gráfico ya existente o visualizar simultáneamente varios gráficos previamente creados, aún cuando se trate de gráficos de diferentes tipos. Esto es posible porque Mathematica guarda la información de cualquier gráfico realizado con anterioridad, de forma que se puede volver a visualizar usando la instrucción Show.

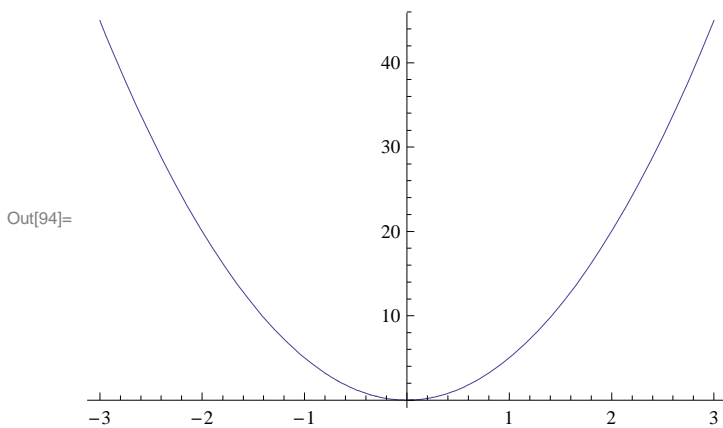
Ejemplo 4.2 Visualizar la gráfica de la tabla de puntos creada en el ejemplo anterior junto con la gráfica de la parábola $y=x^2$.

IMPORTANTE: Si dibujamos una gráfica que posteriormente tenemos intención de volver a utilizar es aconsejable guardarla en una variable asignándole un nombre apropiado que nos permita referirnos a ella con facilidad.

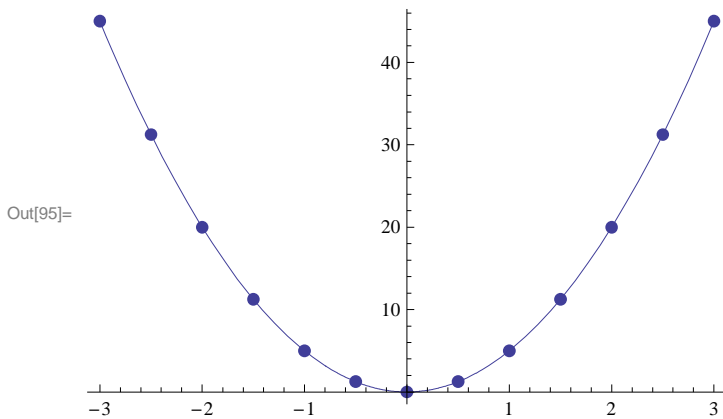
```
In[92]:= puntos = Table[{k, 5 k^2}, {k, -3, 3, 0.5}];
g1 = ListPlot[puntos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



```
In[94]:= g2 = Plot[5 x^2, {x, -3, 3}]
```



```
In[95]:= Show[g1, g2]
```



6.-Mejorando nuestros gráficos

A continuación damos una lista de opciones que podemos utilizar con cualquier de las instrucciones Plot, ListPlot, ParametricPlot y Show, y el valor asignado por defecto.

AspectRatio \rightarrow 1/GoldenRatio Indica la razón entre la altura y la anchura del rectángulo donde se mostrará un gráfico.

Axes \rightarrow True Determina si se han de dibujar los ejes

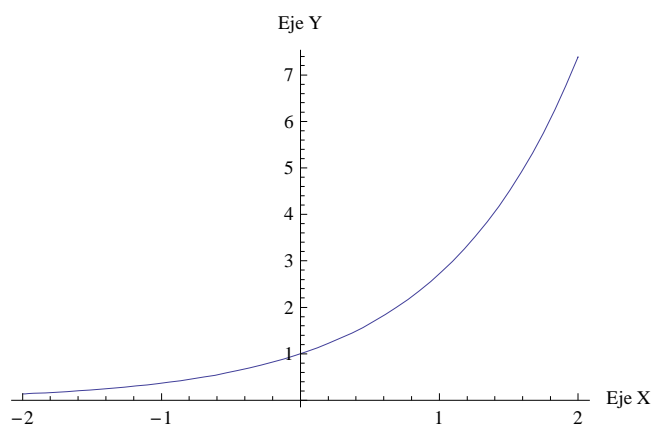
AxesLabel→None	Proporciona rótulos para los ejes
AxesOrigin→Automatic	Determina el punto donde se ha de colocar el origen de coordenadas.
AxesStyle→Automatic	Especifica las opciones para el estilo de los ejes.
Background→Automatic	Selecciona el color de fondo del gráfico
DefaultColor→Automatic	Color por omisión de los elementos del gráfico
Frame→False	Determina si el gráfico se realiza con marco
FrameLabel→None	Especifica los rótulos del marco
FrameStyle→Automatic	Especifica el estilo del marco
FrameTicks→Automatic	Para marcas en el marco
GridLines→None	Para trazar rejillas
PlotLabel→None	Rótulo para el
PlotRange→Automatic	Rango de valores que se van a incluir
PlotRegion→Automatic	Indica la región que se va a rellenar
RotateLabel→True	Determina si se han de girar los rótulos
Ticks→Automatic	Indica en qué puntos del eje OX y del eje OY se van a escribir las marcas en los ejes

Ejemplo 4.2

a) La opción AxesLabel

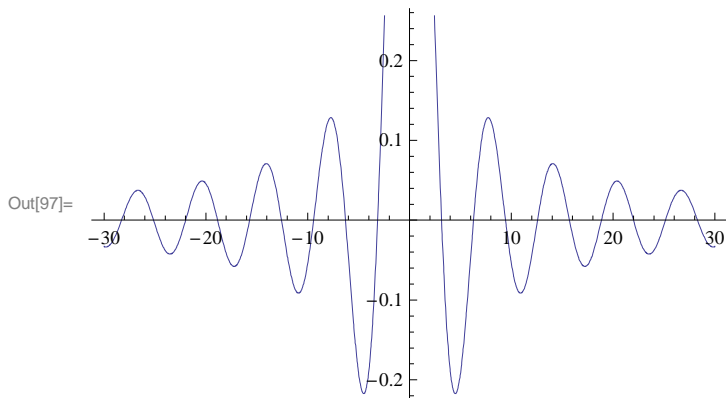
```
In[96]:= Plot[E^x, {x, -2, 2}, AxesLabel -> {"Eje X", "Eje Y"}]
```

Out[96]=



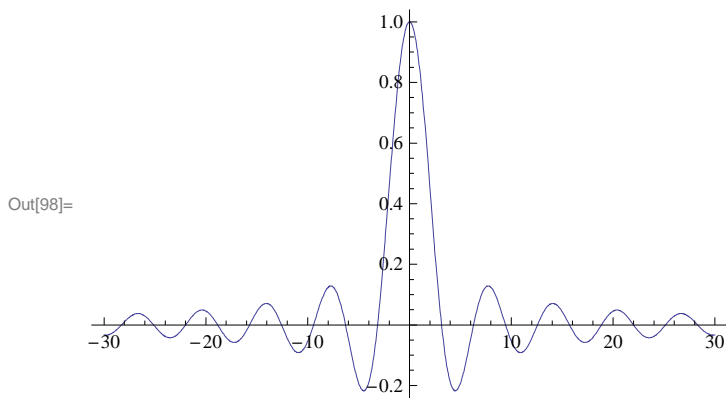
b) La opción PlotRange→All

```
In[97]:= Plot[Sin[x] / x, {x, -30, 30}]
```



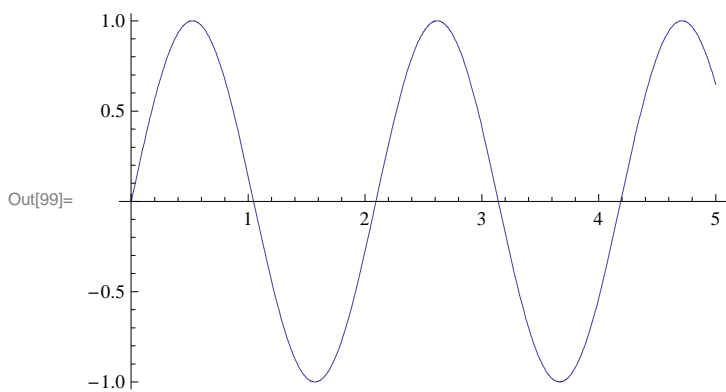
Si queremos visualizar la gráfica completa hemos de modificar el rango de visualización mediante la opción PlotRange→ All

```
In[98]:= Plot[Sin[x] / x, {x, -30, 30}, PlotRange → All]
```



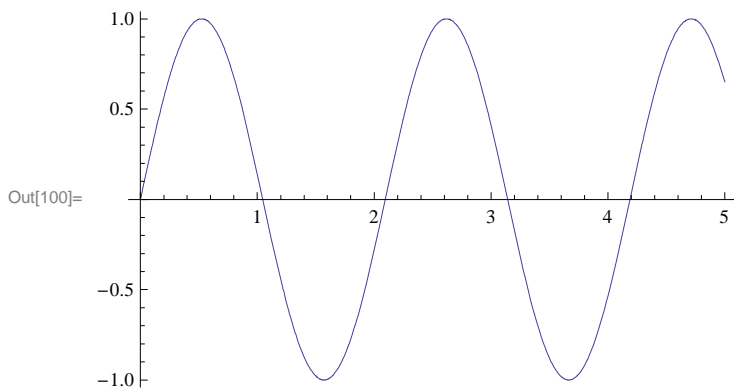
c) La opción DisplayFunction

```
In[99]:= g1 = Plot[Sin[3 x], {x, 0, 5}, DisplayFunction → Identity]
```



Con la opción DisplayFunction→Identity generamos el gráfico pero no éste no se muestra en pantalla. Cuando queramos visualizarlo podemos utilizar la instrucción Show

```
In[100]:= Show[g1, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Observemos que hemos utilizado la opción:

`DisplayFunction -> $DisplayFunction`

para poder visualizar el gráfico.

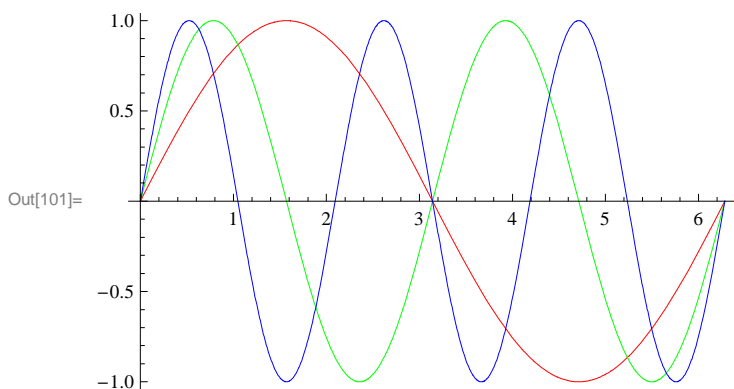
d) La opción `RGBColor`

Cuando visualizamos varias gráficas simultáneamente puede resultar útil dibujar cada una de las gráficas con un color distinto. Esto se consigue con la opción:

`RGBColor[c1,c2,c3]`

Los argumentos `c1,c2,c3` pueden tomar un valor comprendido entre 0 y 1 e indican el porcentaje de rojo,verde y azul que se utilizarán para formar nuestro color.

```
In[101]:= Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, 0, 2 Pi},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

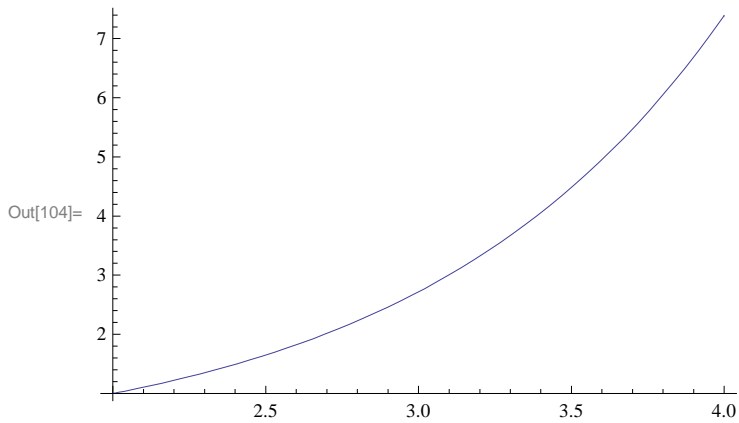
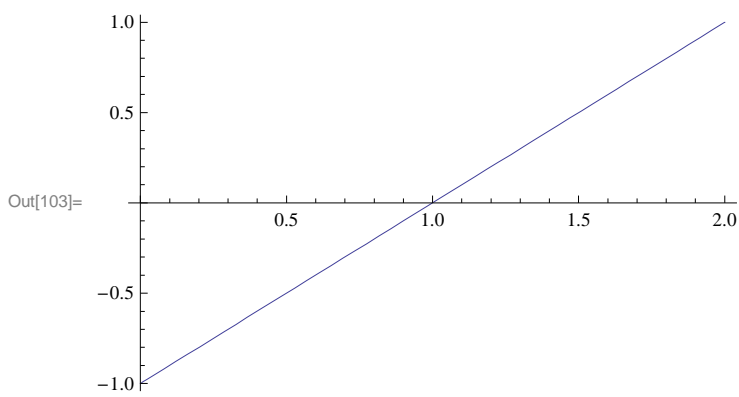
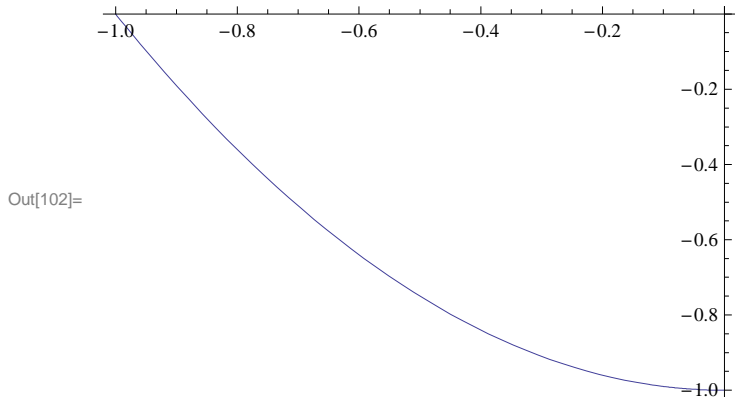


7.-Representación gráfica de funciones definidas a trozos. Supongamos que queremos representar la gráfica de una función definida a trozos. Una primera opción para ello sería representar la gráfica de cada uno de los trozos que forman la función f y a continuación utilizar la instrucción `Show` para visualizar toda la gráfica.

```

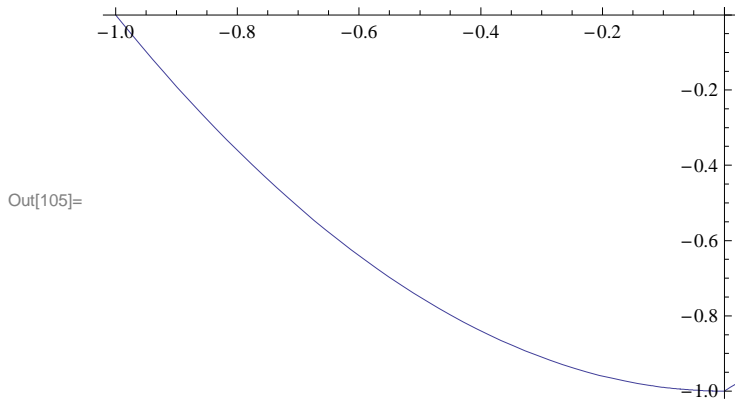
In[102]:= g1 = Plot[x^2 - 1, {x, -1, 0}, DisplayFunction -> Identity]
          g2 = Plot[x - 1, {x, 0, 2}, DisplayFunction -> Identity]
          g3 = Plot[e^x-2, {x, 2, 4}, DisplayFunction -> Identity]

```



Observemos que hemos utilizado la opción `DisplayFunction->Identity` para generar cada uno de los gráficos pero sin mostrarlos en pantalla. Ahora podemos utilizar la instrucción `Show`, con la opción `DisplayFunction->Identity`, para visualizar la gráfica completa de la función

```
In[105]:= Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

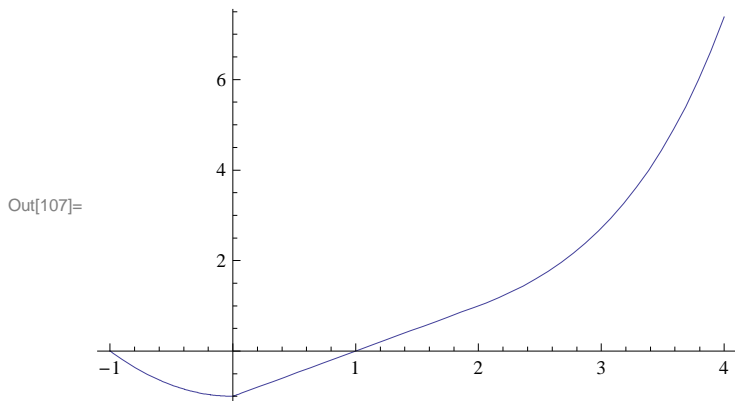


Otra forma de representar la gráfica de la función f es utilizando la instrucción `Which` que nos permite definir una función a trozos:

```
In[106]:= f[x_] := Which[-1 ≤ x ≤ 0, x^2 - 1, 0 ≤ x ≤ 2, x - 1, 2 ≤ x ≤ 4, e^{x-2}]
```

Ahora podemos utilizar la instrucción `Plot` para dibujar su gráfica en el intervalo $[-1, 4]$

```
In[107]:= Plot[f[x], {x, -1, 4}]
```

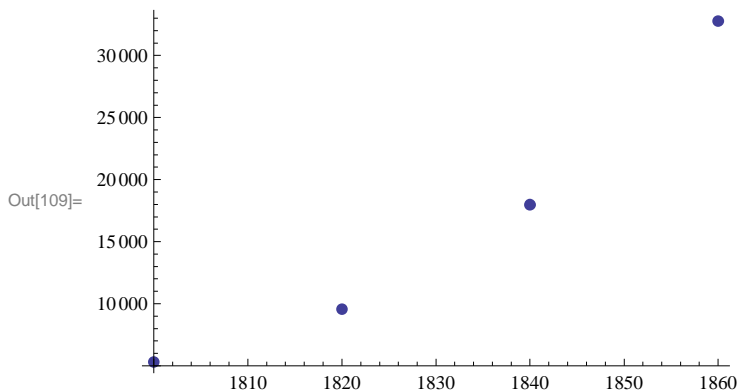


8.-Un poco más sobre gráficos

Mathematica no siempre dibuja la intersección de los ejes coordenados en el punto $(0,0)$, veámoslo con el siguiente ejemplo:

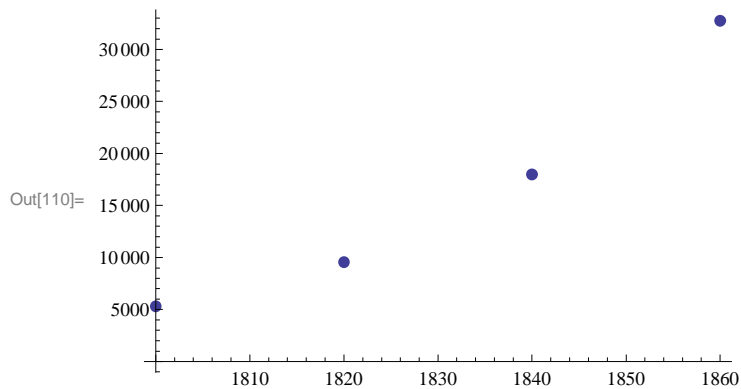
```
In[108]:= datos = {{1800, 5310}, {1820, 9562}, {1840, 17982}, {1860, 32765}};
```

```
In[109]:= ListPlot[datos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



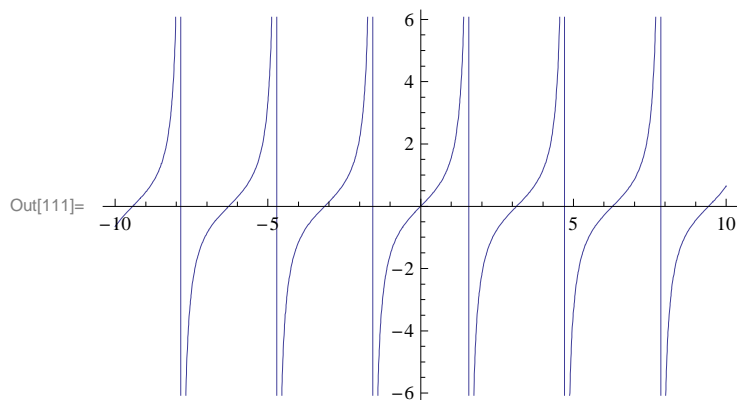
Sin embargo, podemos situar el punto de intersección de los ejes donde a nosotros nos interese:

```
In[110]:= ListPlot[datos, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesOrigin -> {1800, 0}]
```

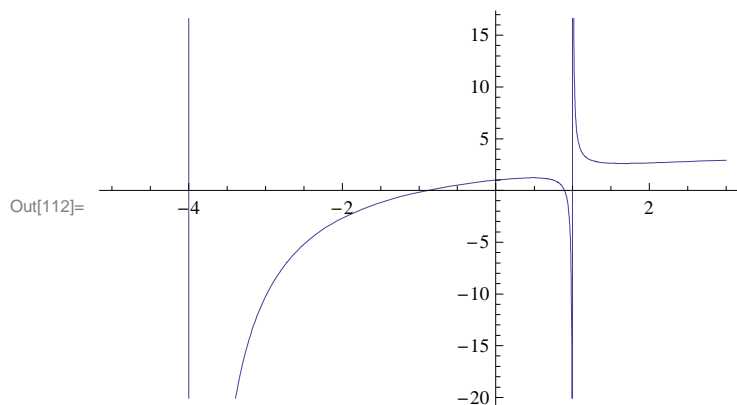


Si una función $y=f(x)$ presenta una asíntota vertical en un $x=a$, el programa *Mathematica* la localiza automáticamente.

```
In[111]:= Plot[Tan[x], {x, -10, 10}]
```



```
In[112]:= Plot[ $\frac{5x^2 - 4}{x^2 + 3x - 4}$ , {x, -5, 3}]
```



9.-Ejercicios propuestos

1.-Dibuja la gráfica de las funciones $y=x$, $y=x^2$, $y=x^2$, en el mismo sistema de coordenadas, en el intervalo $[-2,2]$, dibujando cada una de ellas con un color diferente.

2.-Dibuja en unos mismos ejes coordenados la gráfica de la parábola $y=x^2-5x+2$ junto con la de su recta tangente en el punto $x=2$.

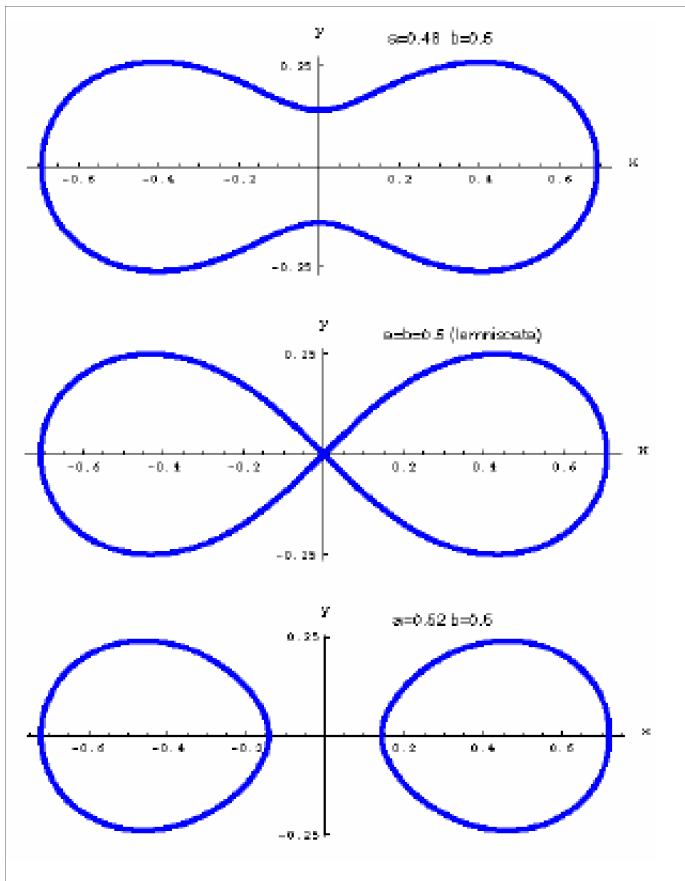
3.-Representar gráficamente la espiral de ecuaciones paramétricas $x=t \sin t$, $y=t \cos t$, para valores del parámetro en el intervalo $[0,4\pi]$.

4.-Dibuja la curva dada por la ecuación implícita $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=1$ (astroide) para los valores $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

5.-Los óvalos de Cassini son el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos P y P' es una constante b^2 , siendo $2a=\text{distancia}(P,P')$. (Para $a=0$ se obtiene una circunferencia). Los óvalos de Cassini tienen por ecuación implícita:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4 a^2 x^2 - b^2 = 0.$$

Ejemplos de óvalos de Cassini son:



Representar gráficamente para $b=2$ un conjunto de óvalos de Cassini variando el parámetro a de 0 a 4 con incrementos de 0.5 en 0.5.