Análisis Matemático. Curso 2010/11.
Grado en Estadística y Empresa. Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales
Departamento de Matemáticas. Universidad de Jaén.

Convocatoria de Febrero. Curso 2010/2011.

APELLIDOS	NOMBRE	DNI	NOTA

1. **(1 punto)** Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+2n-1}{5n^3-7n} \qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$$

2. **(1.5 puntos)** Considérese la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<1,\\ \dfrac{\ln(x)}{x}, & x\geq 1.\end{cases}$$

   a) Estudiar si es continua en $x=1$.
   b) Estudiar si es derivable en $x=1$.
   c) Determinar si tiene alguna asíntota horizontal.

3. **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^x$

   a) Encontrar sus extremos relativos.
   b) Calcular sus valores máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-3,1]$.

4. **(1 punto)** Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x)=\cos(1-x)$ centrado en $x=1$. Utilizarlo para dar un valor aproximado de $\cos(1/2)$ y calcular el error cometido.

5. **(1 punto)** Clasificar los puntos críticos de la siguiente función

$$f(x,y)=x^3-4\,x\,y+2\,x^2+y^2-2.$$

6. **(2 puntos)** Calcular

$$\int\int_D \mathrm{e}^{y^2}\,dx\,dy$$

   siendo D la región limitada por $0\leq x\leq 1$, $2\,x\leq y\leq 2$.

7. **(2 puntos)** Calcular la integral doble

$$\int\int_D x^2\,dx\,dy$$

   siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ \ y\geq 0\}$.

Soluciones

1. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+2n-1}{5n^3-7n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2n^3+2n-1}{n^3}}{\dfrac{5n^3-7n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{5-\dfrac{7}{n^2}} = \dfrac{2}{5} \neq 0.$

   En consecuencia no se cumple la condición necesaria de convergencia para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+2n-1}{5n^3-7n}$ y por tanto **la serie no converge**.

   b) Como $a_n = \dfrac{4^n}{n!} > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n!}$ es una serie de términos positivos por lo que podemos aplicar el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{4^n}{n!}} = \frac{4^{n+1}n!}{4^n(n+1)!} = \frac{4}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0 = L,$$

   y como $L < 1$ el criterio del cociente nos garantiza que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n!}$ **es convergente**.

2. *a*) Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ calculamos los límites laterales cuando $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

   Como $f(1) = 0 = f(1^-) = f(1^+)$ **la función es continua en** $x = 1$.

   b) Como la función es continua en $x = 1$ puede ser derivable o no. Para estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ calculamos primero $f'(x)$ para $x \neq 1$ usando las reglas de derivación

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x, & x < 1, \\ \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

   Ahora calculamos las derivadas laterales en $x = 1$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2,$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 1.$$

   Como $f'(1^-) = 2 \neq 1 = f'(1^+)$ **la función no es derivable en** $x = 1$.

   c) <u>Asíntotas horizontales</u>. Calculamos los siguientes límites, usando en el primer caso la Regla de L'Hôpital al aparecer una indeterminación del tipo ∞/∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 1 = +\infty.$$

   Entonces $y = 0$ **es la única asíntota horizontal**.

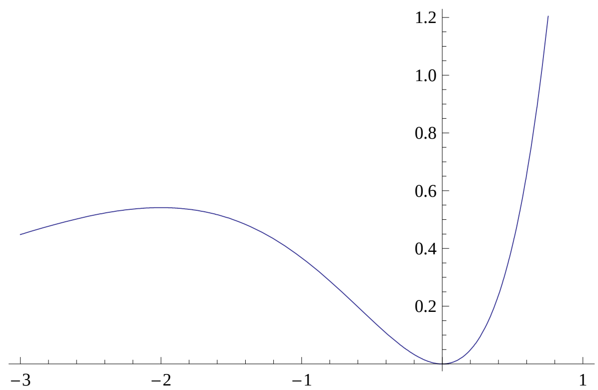

Figura 1: Gráfica de $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$ en $[-3, 1]$.

3. *a*) La condición necesaria para tener un extremo relativo es $f'(x) = 0$. Resolvemos esta ecuación, teniendo en cuenta que $\mathrm{e}^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + x^2)\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -2.$$

Luego los candidatos a extremos relativos son:

$$x_1 = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = 0.$$

Para clasificarlos utilizamos el criterio de la derivada segunda:

$$f''(x) = (2 + 4x + x^2)\mathrm{e}^x$$

$$f''(-2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0 \Rightarrow \text{En } x = -2 \text{ hay un } \textbf{máximo relativo}.$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ hay un } \textbf{mínimo relativo}.$$

b) Como la función f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[-3, 1]$ entonces f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en dicho intervalo. Los puntos donde puede alcanzarse el máximo y el mínimo absolutos son los puntos críticos (es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ calculadas en el apartado anterior) que estén en el interior del intervalo, en este caso $x_1 = -2$ y $x_2 = 0$, junto con los extremos del intervalo $x_3 = -3$ y $x_4 = 1$. Para ver cuál es el máximo y el mínimo absolutos evaluamos la función en los candidatos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-2) = 4\mathrm{e}^{-2} = 0{,}541341,\\ f(x_2) &= f(0) = 0,\\ f(x_3) &= f(-3) = 9\mathrm{e}^{-3} = 0{,}448084,\\ f(x_4) &= f(1) = \mathrm{e} = 2{,}71828. \end{aligned}$$

El valor más grande de los anteriores, 2,71828**, es el máximo absoluto de la función** f **que se alcanza en** $x = 1$ y el valor más pequeño, 0**, es el mínimo absoluto de la función** f **que se alcanza en** $x = 0$ (véase la gráfica de f en el intervalo $[-3, 1]$ en la Figura 1).

4. El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \cos(1 - x)$ centrado en $x = 1$ viene dado por la fórmula

$$p_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3.$$

Como

$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos(1-x) & \Rightarrow f(1)=\cos(0)=1, \\ f'(x)=\operatorname{sen}(1-x) & \Rightarrow f'(1)=\operatorname{sen}(0)=0, \\ f''(x)=-\cos(1-x) & \Rightarrow f''(1)=-\cos(0)=-1, \\ f'''(x)=-\operatorname{sen}(1-x) & \Rightarrow f'''(1)=-\operatorname{sen}(0)=0, \end{array}$$

se tiene que

$$\mathbf{p_3(x)=1-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Como $p_3(x)\approx f(x)=\cos(1-x)$, para calcular un valor aproximado de $\cos(1/2)$ tenemos en cuenta que

$$\cos(1/2)=\cos(1-1/2)=f(1/2)\approx p_3(1/2).$$

Luego el valor aproximado pedido es

$$\mathbf{p_3(1/2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875}$$

El valor exacto es $\cos(1/2)=0{,}877583$ (Recuerda que tienes que tener la calculadora en modo RADIANES) y por tanto el error cometido es

$$\text{Error}=|\cos(\mathbf{1/2})-\mathbf{0{,}875}|=\mathbf{0{,}002583}.$$

5. Como la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2-4y+4x=0, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-4x+2y=0. \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación $y=2x$ y sustituyendo en la primera obtenemos $3x^2-4x=0\Leftrightarrow x(3x-4)=0\Leftrightarrow x=0$ ó $x=\frac{4}{3}$. Como $y=2x$ **los puntos críticos son** $(0,0)$ **y** $(\frac{4}{3},\frac{8}{3})$.

Ahora para clasificar los puntos críticos usamos el criterio del Hessiano

$$H(x,y)=det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} 6x+4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $H(0,0)=det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=8-16=-8<0\Rightarrow f$ tiene en $(0,0)$ un **punto de silla**.
- $H(\frac{4}{3},\frac{8}{3})=det\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=24-16=8>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{4}{3},\frac{8}{3})=12>0\Rightarrow f$ tiene en $(\frac{4}{3},\frac{8}{3})$ un **mínimo relativo**.

6. Primero dibujamos el dominio D de integración (ver Figura 2). La integral hay que calcularla en el orden $\int\int_D e^{y^2}\,dx\,dy$, ya que la función $f(y)=e^{y^2}$ no tiene una primitiva elemental si intentamos integrarla con respecto a y.

Entonces los límites de integración son $0\le y\le 2$ y $0\le x\le\frac{y}{2}$. Por lo tanto

$$\int\int_D e^{y^2}\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2}\,dx\,dy=\int_0^2 \frac{y}{2}e^{y^2}\,dy=\frac{1}{4}\int_0^2 2\,y\,e^{y^2}\,dy=\frac{1}{4}e^{y^2}\Big]_{y=0}^{y=2}=\mathbf{\frac{e^4-1}{4}}$$

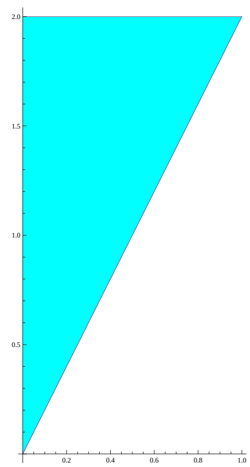

Figura 2: Dominio de integración del Ejercicio 6

7. Representando gráficamente el dominio D de integración (ver Figura 3) se observa que lo más conveniente es realizar un cambio a coordenadas polares.

   En polares D se expresa como $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, la función es $x^2 = (r\,\cos(\theta))^2 = r^2\,\cos(\theta)^2$ y el jacobiano es r.

   Por tanto

$$\int\int_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_1^2 r^2\,\cos(\theta)^2\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\cos(\theta)^2\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\cos(\theta)^2\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2}\,d\theta = \frac{15}{4}\int_0^{\pi}\cos(\theta)^2 d\theta = \frac{15}{4}\left.\left(\frac{\theta+\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{2}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{15}{4}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\mathbf{15}\,\pi}{\mathbf{8}},$$

   donde la última integral se ha resuelto por partes haciendo $\left[\begin{array}{c} u=\cos(\theta)\Rightarrow du = -\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\,\theta \\ dv=\cos(\theta)\,d\,\theta\Rightarrow v=\mathrm{sen}(\theta)\end{array}\right]$

$$\int\cos(\theta)^2\,d\,\theta = \int\cos(\theta)\cdot\cos(\theta)\,d\,\theta = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \int\mathrm{sen}(\theta)^2\,d\,\theta =$$

$$= \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \int(1-\cos(\theta)^2)\,d\,\theta = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \int 1\,d\,\theta - \int\cos(\theta)^2\,d\,\theta =$$

$$= \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \theta - \int\cos(\theta)^2\,d\,\theta.$$

   Entonces

$$2\int\cos(\theta)^2\,d\,\theta = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \theta,$$

   y despejando

$$\int\cos(\theta)^2\,d\,\theta = \frac{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)+\theta}{2} + c.$$

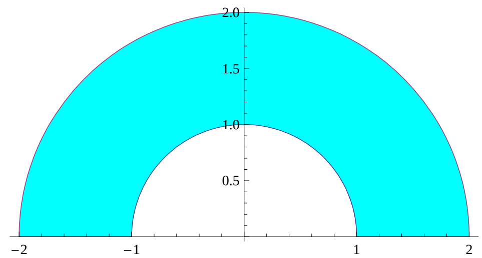

Figura 3: Dominio de integración del Ejercicio 7

Nota: La integral $\int \cos(\theta)^2 \, d\,\theta$ también puede resolverse usando la fórmula trigonométrica

$$\cos(\theta)^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}.$$