Capítulo 6

Funciones de varias variables reales

6.1. Introducción

En muchas situaciones habituales aparecen funciones de dos o más variables, por ejemplo:

- $w = F \cdot D$ (Trabajo realizado por una fuerza)
- $V = \pi r^2 h$ (Volumen de un cilindro circular recto)
- $V = xyz$ (Volumen de un solido rectangular)
- $z = e^x + \operatorname{sen}(y) = f(x, y)$
- $w = f(x, y, z) = x^2 + 3yz$

Definición 6.1.1. *Una función*

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \end{array}$$

se dice que es una función de n variables reales con valores reales. El dominio de f es $D \subset \mathbb{R}^n$ y su imagen el conjunto $\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}$.

La manera más habitual de describir una función de varias variables es mediante una ecuación. A menos que se diga lo contrario el dominio de la función será el mayor conjunto de puntos para el que la ecuación está definida.

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma forma que las funciones de una variable:

- $(f \pm g)(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$ *(Suma o diferencia).*
- $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$ *(Producto).*
- $(f/g)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ si $g(x,y) \neq 0$ *(Cociente).*
- Si $f(x,y),\ g(z)$ y $Rango(f) \subset Dom(g)$

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) \quad \textit{(Función compuesta).}$$

6.1.1. Gráficas y curvas de nivel

La gráfica de una función de dos variables $f(x,y)$ es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) tales que $z = f(x,y)$ para $(x,y) \in Dom(f)$. La gráfica de $f(x,y)$ es una superficie en el espacio.

EJEMPLO 6.1.1. *Representar la gráfica de la función* $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$.

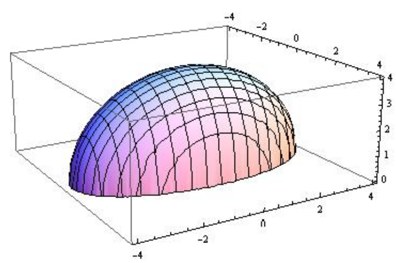

Figura 6.1: Gráfica de $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Otra forma de obtener información gráfica acerca de una función son las curvas de nivel. Éstas se obtienen intersecando la gráfica de $f(x,y)$ (cuya ecuación es $z = f(x,y)$) con planos horizontales (de ecuación $z = c$, $c \in \mathbb{R}$), es decir, intersecando

$$\begin{cases} z = f(x,y), & \text{(Gráfica de } f\text{)}, \\ z = c, & \text{(Plano horizontal de altura } c\text{)}. \end{cases}$$

Por tanto la ecuación implícita de cada curva de nivel viene dada por

$$f(x,y) = c.$$

Variando el valor de c obtenemos las distintas curvas de nivel. Cada curva de nivel une los puntos del plano en los que f toma el mismo valor.

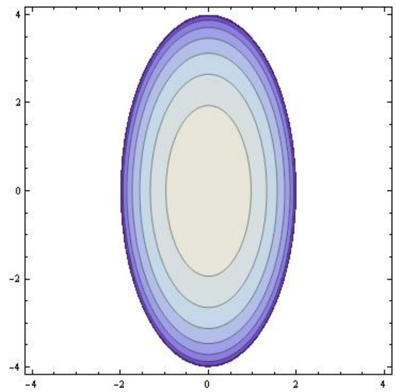

Figura 6.2: Curvas de nivel de $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

OBSERVACIÓN 6.1.1. *Si* $f(x,y,z)$ *es una función de tres variables entonces la ecuación* $f(x,y,z) = c$ *determina sus superficies de nivel.*

EJEMPLO 6.1.2. *Algunas de las curvas de nivel más conocidas son las siguientes:*

1. *Isobaras: curvas de nivel de la función presión atmosférica*

2. *Isotermas: curvas de nivel de la función presión temperatura*

3. *Líneas equipotenciales: curvas de nivel de la función potencial eléctrico.*

4. *Líneas topográficas: curvas de nivel de la función altitud con respecto al mar.*

EJERCICIO 6.1.1. *Dibujar las curvas de nivel de la función* $f(x,y) = y^2 - x^2$.

6.2. Límite de una función de dos variables

Utilizaremos la siguiente notación

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2},$$

$$B((a,b),r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(a,b)) < r\}.$$

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ y $(a,b) \in D$ diremos que (a,b) es un punto interior $(a,b) \in int(D)$ si existe $r > 0$ tal que $B((a,b),r) \subset D$. Diremos que D es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores.

DEFINICIÓN 6.2.1 (Límite de una función de dos variables). *Si* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in int(D)$ *y* $L \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, / \, 0 < d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

OBSERVACIÓN 6.2.1. *La principal diferencia con el cálculo de límites de una variable es que para determinar si una función* $f(x)$ *tiene límite cuando* $x \to a$ *sólo se necesita comprobar que pasa cuando* $x \to a^-$ *y cuando* $x \to a^+$ *. Sin embargo en el caso de una función de dos variables la expresión*

$$(x,y) \to (a,b)$$

significa que (x,y) *puede aproximarse al punto* (a,b) *a través de cualquier trayectoria en el plano. Si el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

depende de la dirección o trayectoria que usemos para acercarnos al punto (a,b)*, entonces el límite en dos variables no existe.*

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de una variable.

6.2.1. Límites según un subconjunto

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in int(D)$ y C un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se "aproxime" al punto (a,b) (generalmente C será una curva contenida en D que pase por (a,b)). Entonces podemos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(a,b),(x,y)\in C} f(x,y).$$

En caso de que este límite exista lo llamaremos límite de la función f en el punto (a,b) según el conjunto C.

TEOREMA 6.2.1. *Si existe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

entonces para cualquier conjunto C *que se "aproxime" al punto* (a,b) *se cumple que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b),(x,y)\in C} f(x,y) = L.$$

Los límites según subconjuntos más habituales son:

- *Límites direccionales: nos acercamos a través de rectas que pasan por el punto* (a, b)*,*

$$y = b + m(x - a), \quad m \in \mathbb{R}, \quad x = a.$$

- *Límites parabólicos: nos acercamos a través de parábolas que pasan por el punto* (a, b)*,*

$$y = b + m(x - a)^2, \quad x = a + m(y - b)^2, \quad m \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 6.2.1. *Calcular los límites direccionales en los siguientes ejemplos. ¿Qué podemos concluir acerca de la existencia del límite en dos variables?*

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

OBSERVACIÓN 6.2.2. *Estudiar los límites direccionales es cómodo porque son límites en una variable (y pueden usarse todas las herramientas disponibles para ello, como por ejemplo la regla de L'Hôpital). Sin embargo este estudio sólo es concluyente si encontramos dos direcciones distintas a lo largo de las cuales la función tenga límites diferentes, en cuyo caso el límite no existe.*

6.2.2. Coordenadas polares

El cambio a coordenadas polares en el punto (a, b) viene dado por

$$\begin{aligned} x &= a + \rho\cos(\theta), \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\ y &= b + \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \end{aligned}$$

donde ρ es la distancia del punto (x, y) al punto (a, b) y θ es el ángulo que forma el vector que une (a, b) y (x, y) con la horizontal medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Mediante este cambio de variables podemos escribir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\cos(\theta), b + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) = \lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta).$$

TEOREMA 6.2.2. *Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) Existe $\displaystyle\lim_{\rho\to 0} F(\rho, \theta) = L$*, independiente del valor de* θ*.*

(ii) *Es posible determinar una función* $\varphi(\rho)$ *tal que*

$$|F(\rho,\theta) - L| \leq \varphi(\rho) \quad \forall\theta \in [0, 2\pi].$$

(iii) $\lim\limits_{\rho\to 0} \varphi(\rho) = 0.$

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

OBSERVACIÓN 6.2.3. *1. Si no existe el límite* $\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$*, o bien existe pero toma valores distintos según el ángulo* θ*, entonces podemos asegurar que no existe el límite en dos variables.*

2. La condición (i) es equivalente a decir que existen todos los límites direccionales y que su valor coincide.

6.3. Continuidad de funciones de dos variables

DEFINICIÓN 6.3.1. *Sean* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* D *un conjunto abierto y* $(a,b) \in int(D)$*. Entonces* f *es continua en el punto* (a,b) *si y solo si*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

Diremos que la función f *es continua en la región* D *si es continua en todo punto* (a,b) *de* D*.*

Intuitivamente la anterior definición nos dice que podemos hacer que $f(x,y)$ esté tan cerca de $f(a,b)$ "como nosotros queramos" con tal de tomar (x,y) "suficientemente" próximo a (a,b).

TEOREMA 6.3.1 (Caracterización de la continuidad usando límites). f *es continua en* (a,b) $\iff \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$

TEOREMA 6.3.2. *Si* $k \in \mathbb{R}$ *y* f, g *son continuas en el punto* (a,b) *entonces las siguientes funciones también son continuas en* (a,b)*:*

1. $k \cdot f$ *(Múltiplo escalar).*

2. $f \pm g$ *(Suma y diferencia).*

3. $f \cdot g$ *(Producto).*

4. *f/g si $g(a,b) \neq 0$ (Cociente).*

5. *Si $f(x,y)$ es continua en (a,b) y $h(z)$ es continua en $z_0 = f(a,b)$ entonces*

$$(h \circ f)(x,y) = h(f(x,y)) \quad \textit{(Función compuesta)}$$

es continua en (a,b).

El teorema anterior garantiza la continuidad de las funciones polinómicas (suma de funciones de la forma $cx^m y^n$, $c \in \mathbb{R}$,$n, m \in \mathbb{N}$) y racionales (cociente de dos funciones polinómicas) en todo punto de su dominio. También nos permite probar fácilmente que las siguientes funciones son continuas

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+y^2), \quad Dom(f) = \mathbb{R}^2, \quad f \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.$$

$$f(x,y) = \cos(y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Dom(f) = \mathbb{R}^2, \quad f \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio 6.3.1. *Analizar la continuidad de las siguientes funciones:*

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+(x-y)^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

6.4. Derivadas parciales

Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función de varias variables respecto a una de sus variables independientes se utiliza el proceso de derivación parcial.

Definición 6.4.1 (Derivadas parciales de una función de dos variables). *Si $z = f(x,y)$ las primeras derivadas parciales de f con respecto a las variables x e y son las funciones definidas como*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h},$$

siempre y cuando el límite correspondiente exista.

OBSERVACIÓN 6.4.1. *La definición indica que para calcular* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *se considera la variable* y *como una constante y se deriva con respecto a* x. *Análogamente, para calcular* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *se considera la variable* x *como una constante y se deriva con respecto a* y.

6.4.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Si $y = y_0$ entonces $z = f(x, y_0)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por tanto $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la curva intersección en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Análogamente, $z = f(x_0, y)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$ y entonces $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la curva intersección en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Diremos que los valores $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ son las pendientes de la superficie en las direcciones de x e y, respectivamente.

Las derivadas parciales también se pueden interpretar como las tasas de variación, velocidades o ritmos de cambio respecto de la variable que estamos derivando cuando las demás variables permanecen constantes.

6.4.2. Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias es posible calcular las segundas, terceras, cuartas... derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan.

Por ejemplo la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \textit{(Derivar dos veces respecto a } x\textit{)}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \textit{(Derivar respecto a } x\textit{, luego respecto a } y\textit{)}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \textit{(Derivar respecto a } y\textit{, luego respecto a } x\textit{)}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \textit{(Derivar dos veces respecto a y)}$$

Teorema 6.4.1 (Igualdad de las derivadas parciales mixtas). *Si $f(x,y)$ es tal que f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas en un abierto D entonces*

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$$

Ejemplo 6.4.1. *Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $f(x,y) = x\mathrm{e}^y + \operatorname{sen}(xy)$. Comprobar que las derivadas parciales mixtas coinciden.*

6.5. Regla de la cadena para funciones de varias variables

Estudiaremos dos casos: cuando hay solo una variable independiente y cuando hay dos.

6.5.1. Regla de la cadena: una variable independiente

Teorema 6.5.1. *Si $w = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas y $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son derivables entonces*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ejemplo 6.5.1. *Sea $w = x^2y - y^2$, $x = \operatorname{sen}(t)$, $y = \mathrm{e}^t$. Calcular $\frac{dw}{dt}|_{t=0}$ de las dos formas siguientes:*

1. *Sustituyendo y derivando como una función de una variable.*
2. *Aplicando la regla de la cadena.*

6.5.2. Regla de la cadena: dos variables independientes

Teorema 6.5.2. *Si $w = f(x,y)$, $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ tienen derivadas parciales continuas entonces*

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ejemplo 6.5.2. *Calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = 2xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = s/t$ de las dos formas siguientes:*

1. *Sustituyendo y calculando las derivadas parciales.*

2. *Aplicando la regla de la cadena.*

6.6. Extremos de funciones de dos variables

DEFINICIÓN 6.6.1. *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a, b) \in D$. Entonces:*

1. *f tiene un máximo absoluto en (a, b) si*
$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in D.$$

2. *f tiene un máximo relativo en (a, b) si existe $r > 0$ tal que*
$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in B((a, b), r).$$

3. *f tiene un mínimo absoluto en (a, b) si*
$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in D.$$

4. *f tiene un mínimo relativo en (a, b) si existe $r > 0$ tal que*
$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in B((a, b), r).$$

El siguiente resultado es de gran importancia porque nos da condiciones que garantizan que una función alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

TEOREMA 6.6.1 (Teorema de Weiersstras). *Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces f alcanza siempre su valor máximo y mínimo absolutos en la región D.*

TEOREMA 6.6.2 (Condición necesaria para la existencia de extremos). *Sea $f(x, y)$ definida en una región abierta D y con derivadas parciales continuas en D. Si f tiene un extremo relativo en $(a, b) \in D$ entonces*
$$\nabla f(a, b) = (0, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0. \end{cases}$$
(Nota: Si $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ se dice que (a, b) es un punto crítico).

EJEMPLO 6.6.1. *Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.*

En general los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos, algunos son puntos de silla, como por ejemplo el origen para la función $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Para clasificar los puntos críticos disponemos de un criterio usando las derivadas parciales segundas.

Definición 6.6.2 (Hessiano). *Se llama Hessiano de f en (a, b) al determinante*

$$H(a,b) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)) \end{pmatrix}.$$

Teorema 6.6.3 (Criterio del Hessiano). *Sea (a, b) un punto crítico de la función f (i.e., $\nabla f(a, b) = (0, 0)$) y supongamos que existe un disco centrado en (a, b) donde las derivadas parciales segundas son continuas. Se cumple entonces que:*

1. *Si $H(a, b) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)) > 0 \Longrightarrow (a, b)$ es un mínimo relativo.*
2. *Si $H(a, b) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)) < 0 \Longrightarrow (a, b)$ es un máximo relativo.*
3. *Si $H(a, b) < 0 \Longrightarrow (a, b)$ es un punto de silla.*
4. *Si $H(a, b) = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión (en este caso tenemos que estudiar la función directamente).*

Ejemplo 6.6.2. *Identificar los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.*