

## Capítulo 5

# Integración de funciones de una variable real

### 5.1. Introducción

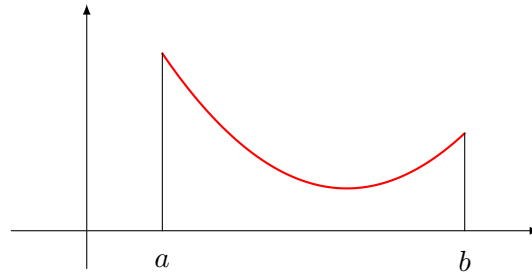
Los inicios del Cálculo Integral se remontan a Arquímedes, matemático, físico e ingeniero griego del S.III A.C., quién calculó el área de numerosas figuras planas así como volúmenes y longitudes de curvas. En particular obtuvo la primera aproximación razonablemente buena del número  $\pi$  inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en un círculo de radio 1.

Por otra parte el Cálculo Diferencial, que estudiamos en el tema anterior, fue creado por Newton y Leibniz en el siglo XVII como una potente herramienta para estudiar el movimiento de los cuerpos (si  $x(t)$  representa la posición de un objeto dependiendo del tiempo entonces  $x'(t)$  representa su velocidad y  $x''(t)$  su aceleración) y motivado también por el problema de las tangentes: dada una curva, ¿cómo se puede calcular su tangente en un punto?

A primera vista el Cálculo Integral y el Diferencial parecen no tener nada en común: cada uno tiene su propia metodología y se aplican para resolver problemas diferentes. Hicieron falta dos genios de la talla de Newton y Leibniz para descubrir que en realidad la derivación y la integración son operaciones inversas (véase el Teorema Fundamental del Cálculo).

### 5.2. La integral definida

Dada  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva queremos definir  $\int_a^b f(x)dx$  como el área comprendida entre la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .



La idea es dividir el intervalo  $[a, b]$  en pequeños subintervalos y aproximar el área bajo la curva por la suma de las áreas de rectángulos. Vamos a precisar un poco más estas nociones.

DEFINICIÓN 5.2.1. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Llamamos *partición del intervalo*  $[a, b]$  a toda colección finita de puntos de  $[a, b]$

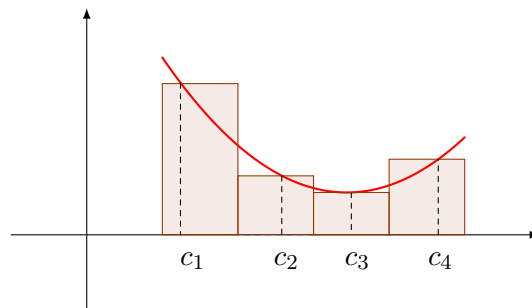
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ con } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Los intervalos  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , se llaman *subintervalos de la partición*  $P$ . Si llamamos  $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$  a la *amplitud del subintervalo*  $I_k$  se define la *norma de la partición*  $\|P\|$  como el máximo de los  $\Delta_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

DEFINICIÓN 5.2.2. Dada una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$  se definen las *sumas de Riemann de la función*  $f$  asociadas a la partición  $P$  como

$$SR(f, P) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

donde  $c_k$  es un punto arbitrario del intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .



DEFINICIÓN 5.2.3. Si  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de particiones del intervalo  $[a, b]$  tales que  $\|P_n\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  se define

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} SR(f, P_n). \quad (5.2.1)$$

Se puede demostrar que cuando  $f$  es continua en  $[a, b]$  el límite anterior existe y es independiente de los puntos  $c_k$  elegidos en las sumas de Riemann.

Cuando  $P_n$  es una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos iguales, es decir,  $x_k = a + k(b - a)/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , y tomamos  $c_k = x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , entonces (5.2.1) conduce a la fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.2.2)$$

Una fórmula análoga se obtiene si tomamos  $c_k = x_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . En ese caso, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.2.3)$$

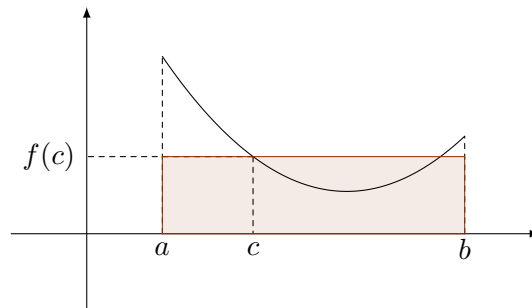
**PROPOSICIÓN 5.2.1** (Propiedades de la integral de Riemann). *Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $[a, b]$ . Se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
2. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$
3. Si  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$
4.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$
5. Si  $a < c < b$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

### 5.3. Teorema Fundamental del Cálculo

**TEOREMA 5.3.1.** (Teorema del valor medio del cálculo integral). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces existe un punto  $c \in [a, b]$  tal que*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a). \quad (5.3.1)$$



El Teorema del valor medio integral admite una interpretación geométrica sencilla: si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función positiva y continua, entonces el área del recinto limitado por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  es igual al área de un rectángulo que tiene base  $b - a$  y cuya altura viene dada por el valor de la función  $f$  en un cierto punto  $c \in [a, b]$ .

El Teorema Fundamental del Cálculo, que presentamos a continuación, nos dice que los conceptos de derivada y de integral definidos independientemente el uno del otro, resultan estar íntimamente relacionados. En efecto, hablando sin mucha precisión la derivación y la integración son operaciones inversas, como la suma y la resta o el producto y la división.

**TEOREMA 5.3.2** (Teorema Fundamental del Cálculo).

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$ . Se considera la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces se satisface que  $F$  es derivable en  $[a, b]$  y además

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es la Regla de Barrow que nos proporciona un método práctico para el cálculo de integrales.

**COROLARIO 5.3.1** (Regla de Barrow). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva cualquiera de  $f$  en  $[a, b]$  (es decir,  $G'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

## 5.4. Técnicas elementales de integración

La regla de Barrow nos permite obtener un valor de  $\int_a^b f(x) dx$  conocida una primitiva  $F(x)$  de  $f(x)$ . Por ello es importante disponer de métodos que nos permitan obtener una primitiva de una función dada  $f(x)$ .

PROPOSICIÓN 5.4.1 (Integrales inmediatas).

$$a) \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1.$$

$$b) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

$$c) \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C. \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$d) \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C.$$

$$e) \int f'(x) \operatorname{sen}[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + C.$$

$$f) \int f'(x) \cos[f(x)] dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C.$$

$$g) \int f'(x)(1 + \operatorname{tg}^2[f(x)]) dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C.$$

$$h) \int f'(x)(1 + \operatorname{cotg}^2[f(x)]) dx = \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]} dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + C.$$

$$i) \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \operatorname{arsen}[f(x)] + C.$$

$$j) \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{artg}(f(x)) + C.$$

$$k) \int f'(x) \operatorname{sh}[f(x)] dx = \operatorname{ch}[f(x)] + C.$$

$$l) \int f'(x) \operatorname{ch}[f(x)] dx = \operatorname{sh}[f(x)] + C.$$

$$m) \int \frac{f'(x)}{\operatorname{ch}^2[f(x)]} dx = \operatorname{tgh}[f(x)] + C.$$

$$n) \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} dx = \operatorname{argsh} [f(x)] + C = \ln \left| f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 + 1} \right| + C.$$

$$\tilde{n}) \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}} dx = \operatorname{argch} [f(x)] + C = \ln \left| f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - 1} \right| + C.$$

$$o) \int \frac{f'(x)}{1 - [f(x)]^2} dx = \operatorname{argth} (f(x)) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \right| + C.$$

### 5.4.1. Integración por cambio de variable

La fórmula de integración por cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Si  $F(x)$  es una primitiva de la función  $f(x)$  y  $g(x)$  es una función derivable, aplicando la regla de la cadena se obtiene que

$$d[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))g'(x)dx,$$

y aplicando la Regla de Barrow se sigue que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b d[F(g(x))]dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

### 5.4.2. Integración por partes

La fórmula de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto. Si  $u, v$  son derivables entonces

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Integrando en ambos miembros y despejando se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Obviamente esta fórmula tiene interés práctico si la integral del segundo miembro resulta más sencilla o del mismo tipo que la integral dada.

## 5.5. Integrales impropias

### 5.5.1. Integrales en intervalos no acotados. Integrales impropias de primera especie

- 1) Sea  $a$  un número fijo y supongamos que la función  $f$  es integrable en  $[a, t]$  para todo  $t > a$ . Entonces se define la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx,$$

en caso de que este límite exista y entonces decimos que la integral impropia es convergente.

- 2) Análogamente, sea  $b$  un número fijo y supongamos que la función  $f$  es integrable en  $[t, b]$  para todo  $t < b$ . Entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

en caso de que este límite exista y entonces decimos que la integral impropia es convergente.

- 3) Si las dos integrales impropias

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \tag{5.5.1}$$

convergen para un mismo valor de  $a \in \mathbb{R}$ , entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Por el contrario, si no existe ningún valor de  $a \in \mathbb{R}$  para el cual las dos integrales (5.5.1) sean convergentes, se dice que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

es divergente.

### 5.5.2. Integrales de funciones no acotadas. Integrales impropias de segunda especie

- 1) Si  $f$  no está acotada en  $[a, b]$ , pero es continua para todo  $t$  con  $a < t \leq b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

en caso de que este límite exista y entonces decimos que la integral impropia es convergente.

- 2) De manera análoga, si  $f$  no está acotada en  $[a, b]$ , pero es continua para todo  $t$  con  $a \leq t < b$ , se define

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

en caso de que este límite exista y entonces decimos que la integral impropia es convergente.

- 3) Finalmente consideramos el caso en que la función  $f$  no está acotada en  $[a, b]$ , pero es continua para todo  $t \in [a, c) \cup (c, b]$ . Si las dos integrales impropias

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x) dx \tag{5.5.2}$$

son convergentes, entonces se define

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Por el contrario, si alguna de las integrales (5.5.2) es divergente, entonces se dice que la integral impropia  $\int_a^b f(x) dx$  es divergente.

### 5.5.3. Integrales impropias de tercera especie

Se trata de integrales definidas en un intervalo no acotado y en las que además la función que integramos tampoco está acotada, pero es continua salvo en un número finito de puntos. El estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce, por la aditividad respecto al intervalo de integración, a estudiar por separado una o dos integrales de primera especie y una o varias de segunda especie. Si todas las integrales que figuran en la descomposición en sumandos de la integral original son convergentes diremos que la integral es convergente. Si al menos una es divergente la integral dada es divergente.

## 5.6. Algunas aplicaciones de la integral de Riemann

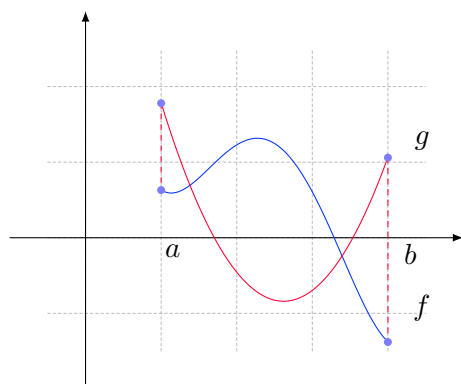
### 5.6.1. Área de una región plana

#### Área encerrada por dos curvas dadas en forma explícita

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , entonces el área de la región plana limitada por las curvas  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

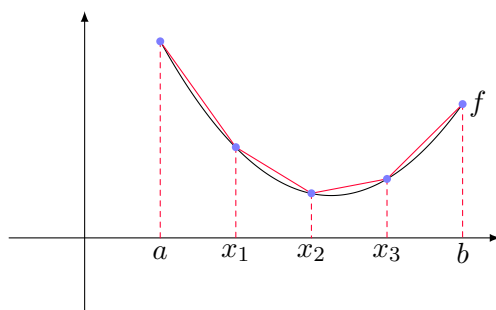




Para calcular esta integral hemos de determinar en qué regiones se satisface  $f(x) \geq g(x)$  y en cuáles  $f(x) < g(x)$ . Los puntos de separación de dichas regiones vienen dados por las soluciones de la ecuación  $f(x) = g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

### 5.6.2. Longitud de un arco de curva

Sea la curva  $y = f(x)$ , donde  $f$  es una función de clase 1 en  $[a, b]$ , y consideremos una partición  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , donde  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = (b - a)/n$ .



La longitud de la curva es el límite de las longitudes de las poligonales que interpolan a la gráfica de  $f$  en los puntos de la partición. Aplicando el teorema de Pitágoras se deduce que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{h^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio se sigue que existen puntos intermedios  $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$  tales que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(y_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(y_k)h.$$

Por tanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h \sqrt{1 + f'(y_k)^2}.$$

En este último límite aparecen sumas de Riemman de la función  $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ , por lo que la longitud de la curva entre los puntos de coordenadas  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  se puede expresar finalmente como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$