Capítulo 4

Derivación de funciones de una variable real

4.1. Derivada de una función

4.1.1. Introducción

Definición 4.1.1. *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Se dice que la función f es derivable en el punto x_0 si existe y es finito el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1.1}$$

Al valor de este límite se le llama derivada de la función f en el punto x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

La expresión $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se llama cociente incremental o tasa de variación media de la función f en el intervalo de extremos x y x_0, y mide la variación de la función $f(x)$ con respecto a la variación de la variable x.

Si hacemos $x - x_0 = h$ en (4.1.1) podemos expresar la derivada en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4.1.2. Derivadas laterales

Definición 4.1.2. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f está definida en un intervalo de la forma $[x_0, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$. Si existe el límite*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

diremos que la función f es derivable por la derecha en x_0. Al valor de este límite lo llamaremos derivada por la derecha de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^+)$.

Análogamente, si f está definida en un intervalo de la forma $(x_0-\delta, x_0]$ con $\delta > 0$, podemos considerar el límite

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si este límite existe diremos que f es derivable por la izquierda en x_0. Al valor de ese límite lo llamaremos derivada por la izquierda de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^-)$.

Proposición 4.1.1. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Entonces, f es derivable en x_0 si y sólo si f es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0 y además*

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0).$$

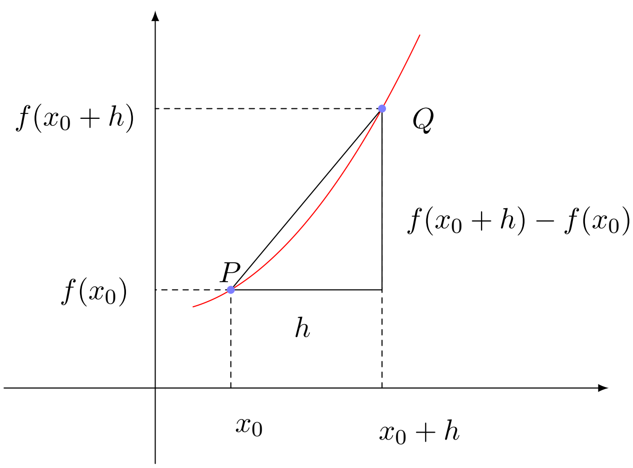
4.1.3. Interpretación geométrica y física de la derivada

Interpretación geométrica

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es derivable en un punto $x_0 \in (a,b)$. El cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P \equiv (x_0, f(x_0))$ y $Q \equiv (x_0+h, f(x_0+h))$.



Cuando $h \to 0$, la recta que pasa por los puntos P y Q se aproxima a la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$. Por tanto, la derivada $f'(x_0)$ se corresponde geométricamente con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Interpretación física

Supongamos una partícula que se mueve en línea recta y que recorre una distancia $s = s(t)$ al cabo de un cierto tiempo t. La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ viene dada por el cociente incremental

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}.$$

Si en la expresión anterior tomamos el límite cuando h tiende a cero obtenemos la velocidad instantánea en t_0 dada por

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = s'(t_0),$$

es decir, la velocidad en el instante $t = t_0$ es la derivada de la función $s(t)$ en el punto t_0.

4.1.4. Ecuaciones de la recta tangente y la recta normal

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in (a, b)$. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene de pendiente $f'(x_0)$ por lo que su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es perpendicular a la recta tangente se denomina recta normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Pueden presentarse dos situaciones:

1) Si $f'(x_0) \neq 0$, la pendiente de la recta normal es $-1/f'(x_0)$ y su ecuación viene dada por
$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0).$$

2) Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es la recta horizontal de ecuación $y = f(x_0)$. En este caso la recta normal será la recta vertical de ecuación $x = x_0$.

4.2. Propiedades de las funciones derivables

TEOREMA 4.2.1 (Derivable $\Rightarrow$ Continua). *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.*

EJERCICIO 4.2.1. *Poner un ejemplo de una función continua en un punto que no sea derivable en ese punto.*

PROPOSICIÓN 4.2.1. *Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces*

1. $f + g$ es derivable en x_0 y
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. $f\,g$ es derivable en x_0 y se cumple que
$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

3. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

4. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función $\lambda\,f$ es derivable en x_0 y se cumple que
$$(\lambda\,f)'\,(x_0) = \lambda\,f'(x_0).$$

TEOREMA 4.2.2 (Regla de la cadena). *Sean f, g dos funciones tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ y consideremos la función compuesta $g \circ f$.*

Si f es derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom(f)}$ y g es derivable en $f(x_0) \in \mathrm{Dom}(g)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y además
$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\,f'(x_0).$$

EJERCICIO 4.2.2. *Aplicar la regla de la cadena a la composición $f^{-1} \circ f$ para obtener la fórmula para la derivada de la función inversa.*

Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable, podemos definir la función derivada f' como

$$\begin{array}{rccc} f': & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

La función derivada se expresa también como

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d\, f(x)}{dx}.$$

Si la función f' también es derivable podemos definir la derivada segunda $f'' := (f')'$. La derivada segunda se expresa también como

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\, f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

De forma similar podemos definir la derivada de orden n o derivada enésima de la función f.

DEFINICIÓN 4.2.1. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Notaremos por $C^n(I)$ al conjunto de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son n veces derivable en I y tales que la función $f^{n)}$ es continua en I. A las funciones de $C^n(I)$ las llamaremos funciones de clase n en I.*

Llamaremos $C^\infty(I)$ al conjunto de todas las funciones definidas en I que admiten derivadas de cualquier orden en I. Dichas funciones se llamarán funciones de clase infinito en I.

4.2.1. Técnicas de derivación

Derivación de funciones elementales

a) $\dfrac{d}{dx}\, x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

b) $\dfrac{d}{dx}\, a^x = a^x \,\ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, e^x = e^x.$

c) $\dfrac{d}{dx}\, \log_a x = \dfrac{1}{x}\, \log_a e, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, \ln x = \dfrac{1}{x}\,.$

d) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{sen} x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, \cos x = -\operatorname{sen} x.$

e) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\,\operatorname{cotg} x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$

f) $\dfrac{d}{dx}\,\text{arsen}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\,\text{arcos} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

g) $\dfrac{d}{dx}\,\text{artg}\,x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

h) $\dfrac{d}{dx}\,\text{sh}\,x = \text{ch}\,x$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\,\text{ch}\,x = \text{sh}\,x$.

Reglas de derivación

a) $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^\alpha = \alpha\,[f(x)]^{\alpha-1}\; f'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \dfrac{f'(x)}{n\,\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$.

c) $\dfrac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\log_a e$, $\qquad \dfrac{d}{dx}[\ln\, f(x)] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

d) $\dfrac{d}{dx}\left[a^{f(x)}\right] = a^{f(x)}\, f'(x)\,\ln a$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)}\, f'(x)$.

e) $\dfrac{d}{dx}[\text{sen}\, f(x)] = [\cos f(x)]\; f'(x)$, $\qquad \dfrac{d}{dx}[\cos\, f(x)] = -\,[\text{sen}\, f(x)]\; f'(x)$.

f) $\dfrac{d}{dx}[\text{tg}\; f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\cos^2\, f(x)}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}[\text{cotg}\, f(x)] = -\,\dfrac{f'(x)}{\text{sen}^2\, f(x)}$.

g) $\dfrac{d}{dx}[\,\text{arsen}\, f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f'(x)]^2}}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}[\text{arcos} f(x)] = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f'(x)]^2}}$.

h) $\dfrac{d}{dx}[\,\text{artg}\, f(x)] = \dfrac{f'(x)}{1+[f'(x)]^2}$.

i) $\dfrac{d}{dx}[\,\text{sh}\, f(x)] = [\,\text{ch}\, f(x)]\, f'(x)$, $\qquad \dfrac{d}{dx}[\,\text{ch}\, f(x)] = [\,\text{sh}\, f(x)]\, f'(x)$.

4.3. Teorema de Rolle

4.3.1. Máximos y mínimos relativos

DEFINICIÓN 4.3.1. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$*. Diremos que* f *tiene un máximo relativo en* x_0 *si existe un* $r > 0$*, tal que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{4.3.1}$$

Análogamente, diremos que f tiene un mínimo relativo en x_0 si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{4.3.2}$$

En cualquiera de los dos casos anteriores se dice que f tiene un extremo relativo en x_0. El extremo es estricto si las desigualdades anteriores son estrictas. El extremo es absoluto si las desigualdades se cumplen para todo $x \in D$.

TEOREMA 4.3.1 (Condición necesaria de extremo relativo). *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0 y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.*

OBSERVACIÓN 4.3.1. *La condición $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para garantizar que una función tenga un máximo o mínimo relativo en $x = x_0$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ verifica que $f'(0) = 0$ y sin embargo no tiene ningún extremo relativo en $x_0 = 0$.*

4.3.2. El teorema de Rolle

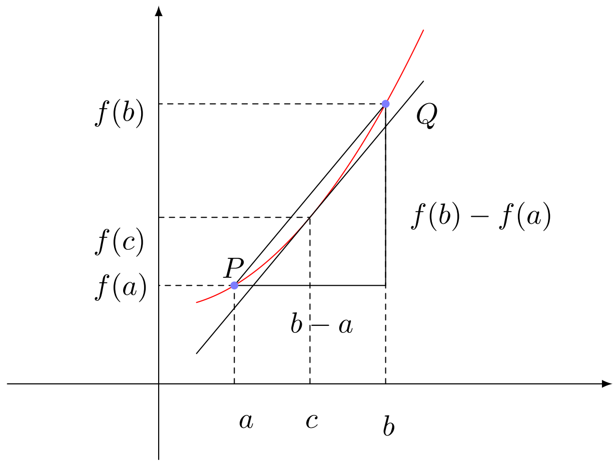
TEOREMA 4.3.2 (Teorema de Rolle). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

COROLARIO 4.3.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Se cumple que:*

1) *Si f tiene n raíces reales distintas en I entonces f' tiene al menos $n - 1$ raíces reales distintas en I.*

2) *Si f' tiene n raíces reales en I entonces f tiene a lo sumo $n + 1$ raíces reales distintas en I.*

TEOREMA 4.3.3 (Teorema del valor medio o de Lagrange). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y supongamos f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*



Si consideramos los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$, entonces $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q. Por otra parte, $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $C = (c, f(c))$. Por tanto, el teorema del valor medio nos asegura que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ es paralela a la recta que une los extremos de la gráfica.

EJERCICIO 4.3.1. *Supongamos que un coche ha recorrido 350 km. en 2 horas y media. Probar que ha superado el límite de velocidad en algún momento.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados, que en particular nos permiten estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

COROLARIO 4.3.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.*

1. *Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*

2. *Si $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*

3. *Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente creciente en I.*

4. *Si $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función decreciente en I.*

5. *Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente decreciente en I.*

6. *Sea $g : I \to \mathbb{R}$. Si $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in I.$$

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Decimos que f es convexa en I si la gráfica de f es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I. Si la gráfica de f es menor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I decimos que f es cóncava en I. Si f es convexa a un lado de I y cóncava al otro diremos que f tiene en x_0 un punto de inflexión.

EJEMPLO 4.3.1. *La función $f(x) = x^2$ es convexa en $\mathbb{R}$ mientras que $g(x) = -x^2$ es cóncava en $\mathbb{R}$.*

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

COROLARIO 4.3.3. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo abierto I.*

1. *Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ entonces f es cóncava en I.*
3. *Si f tiene en x_0 un punto de inflexión entonces $f''(x_0) = 0$.*

El siguiente resultado resulta de gran utilidad para resolver indeterminaciones del tipo $0/0$.

TEOREMA 4.3.4 (**Regla de L'Hôpital**). *Sean f, g dos funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, para algún $r > 0$, tales que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Si $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ y existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además ambos límites coinciden

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OBSERVACIÓN 4.3.2. *La regla de L'Hôpital es aplicable también cuando*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

lo que permite utilizarla para resolver indeterminaciones del tipo ∞/∞, y es también aplicable cuando $x \to \pm\infty$ para resolver indeterminaciones del tipo $0/0$ y ∞/∞.

4.4. Polinomio de Taylor

DEFINICIÓN 4.4.1. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función que admite derivadas de orden n en un punto $x_0\in(a,b)$. Se define el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0 como*

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (4.4.1) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que el polinomio de Taylor de orden n de una función f en el punto x_0 satisface que

$$P^{k)}(x_0)=f^{k)}(x_0),\quad 0\le k\le n, \qquad (4.4.2)$$

es decir, el polinomio de Taylor de orden n coincide con la función f y sus derivadas sucesivas hasta el orden n en el punto $x=x_0$. En lo sucesivo usaremos la notación $T_n(f,x_0)$ para este polinomio.

TEOREMA 4.4.1 (Fórmula del resto de Lagrange). *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ donde I es un intervalo. Si $f\in C^{n+1}(I)$ y $x_0\in I$, entonces dado cualquier $x\in I$, $x\neq x_0$, existe un valor c perteneciente al intervalo abierto de extremos x_0 y x tal que*

$$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0)(x)=\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4.4.3)$$

COROLARIO 4.4.1 (Acotación del resto). *Sea $f\in C^{n+1}(I)$, $x_0\in I$ y supongamos que $|f^{n+1)}(x)|\le M$, $\forall x\in I$. Entonces,*

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}, \qquad \forall x\in I.$$

EJERCICIO 4.4.1. *Dada $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ calcular su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x_0=0$. ¿Hasta qué grado debemos desarrollar el polinomio de Taylor si queremos que el error cometido en el intervalo $[-1,1]$ sea menor que 0.001?*

COROLARIO 4.4.2 (Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos). *Sea I un intervalo abierto, $x_0\in I$, $f:I\to\mathbb{R}$ tal que $f\in C^n(I)$ y supongamos que*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{n-1)}(x_0)=0,\ f^{n)}(x_0)\neq 0.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$, entonces la función f tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.*

2. *Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$, entonces la función f tiene un máximo relativo en $x = x_0$.*

3. *Si n es impar, entonces la función f no tiene un extremo relativo en $x = x_0$.*

COROLARIO 4.4.3 (Condición suficiente para la existencia de puntos de inflexión). *Sea I un intervalo abierto, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^n(I)$ y supongamos que $f''(x_0) = 0$. Si n es el orden de la primera derivada de f mayor que dos que no se anula en x_0, es decir,*

$$f''(x_0) = \cdots = f^{n-1)}(x_0) = 0,\ f^{n)}(x_0) \neq 0,$$

entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 si y sólo si n es impar.