Capítulo 2

Sucesiones y series de números reales

2.1. Sucesiones de números reales

2.1.1. Introducción

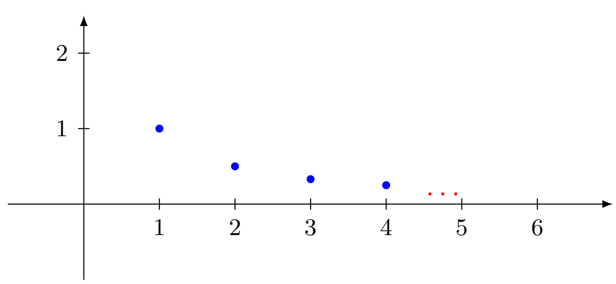
DEFINICIÓN 2.1.1. *Llamamos sucesión de números reales a una función* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \rightarrow f(n) = x_n$.

Habitualmente denotaremos la sucesión como $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ *o simplemtente por* $\{x_n\}$.

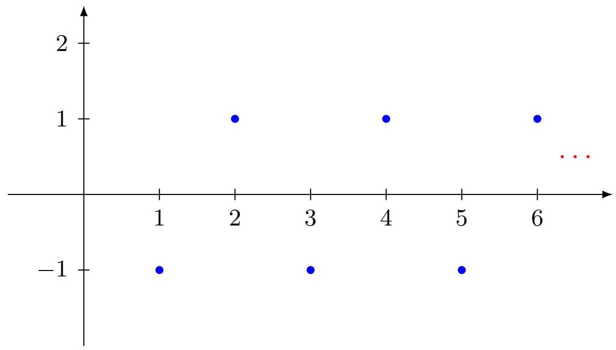
A los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, se les llama términos de la sucesión, siendo x_n el término enésimo o término general de la sucesión. La sucesión se representa por $\{\, x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente por $\{\, x_n\}$ y al conjunto de sus imágenes por $\{\, x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\,\}$.

EJEMPLO 2.1.1. *A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones*

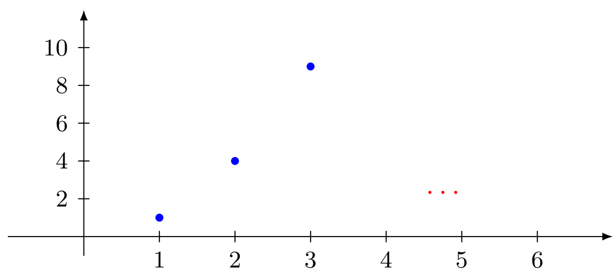
1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$



2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$



3. $\{n^2\} = \{1, 4, 9, \ldots\}$



No es necesario expresar $\{x_n\}$ en función de n mediante una fórmula. Por ejemplo el conjunto de los números primos forma una sucesión $\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, a pesar de que no se conoce ninguna fórmula expícita que genere $\{p_n\}$.

2.1.2. Límite de una sucesión

DEFINICIÓN 2.1.2. *Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ (escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.*

En tal caso decimos que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Si una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se llama convergente.

Intuitivamente, "*$\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$*" significa que el término x_n está tan próximo "como queramos"del número real x siempre que n sea "suficientemente grande".

Como $|x_n - x| < \varepsilon$ es equivalente a $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, podemos afirmar que una sucesión de números reales $\{ x_n\}$ converge a x si en cualquier entorno de x se encuentran todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, salvo quizás un número finito.

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Dada una sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0$
2. $\{x_n\} \to 0 \;\Leftrightarrow\; \{|x_n|\} \to 0.$
3. *La sucesión $\{y_n\} = \{x_{n+p}\}$, $p \in \mathbb{N}$ fijado, es convergente si y sólo si $\{x_n\}$ es convergente, en cuyo caso el límite de ambas coincide.*

EJEMPLO 2.1.2.

1. *Usar la definición de límite para probar que* $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.
2. *¿La sucesión $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ es convergente?*
3. *Probar que la sucesión constante $\{c, c, c, \ldots\}$ converge a c.*

Una propiedad importante del límite de una sucesión es que si existe es único.

TEOREMA 2.1.1 (**Unicidad del límite**). *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen dos números reales, x e y, tales que $\{x_n\} \to x$ y también $\{x_n\} \to y$. Entonces $x = y$.*

DEFINICIÓN 2.1.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.*

1) *Decimos que $\{x_n\} \to +\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

2) *Decimos que $\{x_n\} \to -\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ decimos que la sucesión es divergente.

DEFINICIÓN 2.1.4. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales.*

Llamamos subsucesión o sucesión parcial de la sucesión $\{x_n\}$ a la sucesión $\{x_{n_k}\}$.

PROPOSICIÓN 2.1.2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ también es convergente y tiene el mismo límite.*

La proposición anterior resulta muy útil para demostrar que una sucesión no es convergente usándola de la siguiente forma: si una sucesión admite dos subsucesiones con límites distintos o una subsucesión no convergente entonces la sucesión de partida no es convergente.

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Si $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, entonces $\{ x_n + y_n\} \to x + y$.*
2) *Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n\, y_n\} \to 0$.*
3) *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.*
4) *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y \neq 0$, con $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n/y_n\} \to x/y$.*
5) *(Regla del encaje o del sandwich). Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen por límite l y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*
$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ también es convergente y su límite es l.
6) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$.*
7) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ está acotada superiormente, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$.*
8) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ y existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $y_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$.*
9) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$.*
10) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$.*
11) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ $\{y_n\} \to y \neq 0$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$ cuando $y > 0$ y $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$ cuando $y < 0$.*
12) *Si $x_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n\} \to 0 \Leftrightarrow \{1/\,|x_n|\} \to +\infty$.*

2.1.3. Cálculo de límites

El número e

La sucesión de números reales dada por

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\},$$

es monótona creciente y acotada por lo que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente. Se define el número e (en honor de Euler) como el límite de la sucesión $\{x_n\}$, es decir,

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\cdots$$

Si $\{x_n\} \to +\infty$, siendo $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, también se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Otros criterios para el cálculo de límites

En todos los criterios que presentamos a continuación el límite L puede ser tanto un número real como $\pm\infty$.

Criterio de Stolz

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales que satisfacen:

1. $\{b_n\}$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente).
2. O bien $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, o bien $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

Criterio de la raíz

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $x_n > 0$ para todo n. Entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L.$$

2.2. Series de números reales

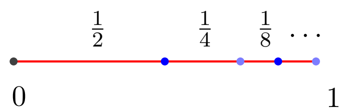
2.2.1. Introducción

Intuitivamente una serie es una “suma infinita”

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Por ejemplo, es fácil convencerse de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$



Sin embargo, no resulta tan claro qué significado tiene la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\dots$$

Para definir de forma rigurosa el concepto de serie consideramos la sucesión de sumas parciales

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots,\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

y pasamos al límite.

Definición 2.2.1. *Una serie de números reales $\sum a_n$ se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.*

Al límite de la sucesión $\{s_n\}$ lo llamaremos suma de la serie y lo denotaremos como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por tanto, estudiar la convergencia de una serie de números reales consiste en estudiar la convergencia de su sucesión de sumas parciales. Como no siempre será posible hallar explícitamente la expresión de s_n nos interesará disponer de criterios de convergencia para series que dependan del término general $\{a_n\}$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar el carácter de una serie (convergencia o divergencia) no importa eliminar un número finito de términos.

Teorema 2.2.1. *Sea $k \in \mathbb{N}$ fijado. La serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la serie $\sum a_{n+k}$ es convergente, en cuyo caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ \dots\ + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Teorema 2.2.2 (**Condición necesaria de convergencia de series**).

Si $\sum a_n$ es una serie de números reales convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observación 2.2.1. *1. El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la serie $\sum 1/n$, (serie armónica) de término general $a_n = 1/n$, cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y, sin embargo, no es convergente (es fácil comprobar que $s_{2^n} > \dfrac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

2. *El teorema anterior resulta de gran utilidad para probar que una serie no es convergente usándolo de la siguiente manera: si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *entonces la serie* $\sum a_n$ *no converge.*

PROPOSICIÓN 2.2.1 (**Propiedades de las series**). *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de números reales y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Si* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son convergentes, entonces la serie* $\sum (a_n + b_n)$ *es también convergente y su suma viene dada por*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2) *Si* $\sum a_n$ *es convergente, entonces la serie* $\sum (\lambda\, a_n)$ *es también convergente y su suma viene dada por*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\, a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2.2.2. Suma de series geométricas

Las series geométricas son series del tipo $\sum r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por
$$s_n = r + r^2 + \ldots + r^n.$$
Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r, se obtiene
$$r\, s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1}.$$
Restando ambas expresiones de deduce que
$$s_n(1 - r) = r - r^{n+1},$$
y por tanto
$$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Finalmente, como $|r| < 1$, se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1} = 0,$$
y entonces la serie $\sum r^n$ es convergente y
$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1 - r}. \tag{2.2.1}$$

2.2.3. Series de términos positivos

DEFINICIÓN 2.2.2. *Diremos que la serie* $\sum a_n$ *es una serie de términos positivos si se cumple que* $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

OBSERVACIÓN 2.2.2.
1. *Una serie de términos positivos o bien es convergente o bien tiende a* $+\infty$, *puesto que su sucesión de sumas parciales es monótona creciente.*
2. *Las series de términos negativos (*$a_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$*) se estudian de igual forma sin más que cambiar el signo para pasar a una serie de términos positivos.*
3. *Se pueden tratar como series de términos positivos aquellas cuyos términos son positivos a partir de un término en adelante.*

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos. Supongamos que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{2.2.1}$$

Entonces se cumple que:

1) $\sum a_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum b_n$ *divergente.*
2) $\sum b_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum a_n$ *convergente.*

OBSERVACIÓN 2.2.3. *A la hora de usar en la práctica el criterio de comparación es importante conocer el carácter de la serie armónica generalizada* $\sum 1/n^p$, $p \in \mathbb{R}$, *que es convergente para* $p > 1$ *y divergente para* $p \leq 1$.

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1) *Si* $L \in \mathbb{R}^+$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2) *Si* $L = 0$ *y además*

   a) $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
   b) $\sum a_n$ *es divergente entonces* $\sum b_n$ *es divergente.*

3) *Si* $L = +\infty$ *y además*

   a) $\sum b_n$ *es divergente entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*
   b) $\sum a_n$ *es convergente entonces* $\sum b_n$ *es convergente.*

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1) *Si* $L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*

2) *Si* $L > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

3) *Si* $L = 1$ *estamos en un caso dudoso.*