Capítulo 3

Integración de Funciones

Hemos visto que la derivada representa la tasa de variación de una función. De ahí que luego podamos interpretar la derivada de diferentes maneras como la velocidad de variación de cierto fenómeno que evoluciona con respecto al tiempo. En numerosas situaciones, es más fácil determinar la velocidad de crecimiento que el valor total que alcanza una magnitud. En esos casos debemos idear mecanismos para, a partir de la función de velocidad, poder deducir la función de valor total en cada instante. Aquí entra en juego el concepto de integral indefinida y definida. En este caso la interpretación geométrica para la integral definida como el área encerrada por una función, nos llevará también a distintas aplicaciones del concepto en distintos contextos.

3.1 Integración indefinida

La integración es el proceso inverso a la derivación. Dada una función $f(x)$, podemos calcular su derivada $f'(x)$. Ahora lo que pretendemos es calcular una función $F(x)$ cuya derivada coincida con $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Es lo que en la siguiente definición llamamos primitiva de $f(x)$.

Definición 1. *Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : D \to \mathbb{R}$, llamamos primitiva de f a cualquier función derivable, $F : D \to \mathbb{R}$, tal que*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in D.$$

Ejemplo 2. Dada la función $f(x) = x$, podemos calcular distintas primitivas:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 3, \quad F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 10.$$

Es evidente que $F'(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = x$.

Se puede demostrar que cualquier función continua tiene al menos una primitiva. De forma más concreta tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad 3. *Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua, siempre existe $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Por tanto, el conjunto de funciones para las que existe primitiva es amplio e incluye a todas las funciones elementales, a todas las funciones obtenidas por composición u operación de funciones elementales y a las funciones definidas a trozos que sean continuas.

En realidad, en el **Ejemplo 2** vemos que una misma función tiene infinidad de primitivas pero todas ellas deben seguir un patrón común. Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la misma función, $f(x)$, entonces en todo punto tendremos

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \Rightarrow (G - F)'(x) = 0.$$

Pero si una función tiene derivada cero, debe ser una constante así que

$$G(x) - F(x) = C \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x) = F(x) + C.$$

De este modo, fijada una primitiva $F(x)$, todas las demás se obtienen añadiéndole una constante tal y como sucede en el último ejemplo. Esto mismo aparece reflejado con más precisión a continuación.

Propiedad 4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y una función $f : I \to \mathbb{R}$, entonces, si la función $F : I \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, se tiene que*

$$G : I \to \mathbb{R} \textit{ es una primitiva de } f \Leftrightarrow G = F + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Por tanto, dada $f(x)$, la representación de todas sus primitivas será de la forma

$$F(x) + C,$$

donde C es una constante que puede tomar cualquier valor. A esa representación uniparamétrica (aparece un único parámetro) es lo que llamamos integral indefinida en la próxima definición.

Definición 5. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f : I \to \mathbb{R}$, llamamos integral indefinida de f y la notamos*

$$\int f\ dx \quad \textit{ó} \quad \int f(x)\ dx$$

a cualquier fórmula uniparamétrica que nos permite, dando valores a su parámetro, al cual llamaremos constante de integración, obtener todas las primitivas de la función f.

Obsérvese que, dada una función $f : I \to \mathbb{R}$, si conocemos una de sus primitivas, F, entonces teniendo en cuenta lo anterior la integral indefinida de f será

$$\int f\ dx = F + C,$$

siendo C la constante de integración.

Ejemplo 6. Consideremos la función $f(x) = x$ definida en todo $\mathbb{R}$. Es evidente que la función

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

es una primitiva de f. Entonces, la integral indefinida de f será

$$\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Si en la expresión anterior damos valores reales al parámetro C podemos obtener todas las primitivas de la función $f(x) = x$.

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I, es claro que

$$\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$$

3.2 Cálculo de la integral indefinida

Si bien hemos visto en la sección anterior que toda función continua tiene una primitiva y por tanto integral indefinida, el cálculo explícito de esa primitiva no siempre es sencillo. El cálculo de la integral indefinida de una función es un problema complicado que exige el conocimiento, en primer lugar, de las derivadas de todas las funciones elementales y de las reglas de derivación y, en segundo lugar, de métodos específicos para la integración de funciones más complicadas. El conocimiento de las propiedades de derivación y de las funciones elementales nos permite obtener las siguientes reglas de integración que, a fin de cuentas son la traducción directa de las propiedades vistas en el Capítulo 2:

- Dadas las funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$, definidas en el intervalo I, se cumple que:
  - $\displaystyle\int (f+g)dx = \int f\ dx + \int g\ dx.$
  - $\displaystyle\int k \cdot f\ dx = k \cdot \int f\ dx.$
- Dadas $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ tales que $f(I) \subseteq J$, se tiene que
$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\ dx = (g \circ f)(x).$$
- $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ \forall n \in \mathbb{N}.$
- $\displaystyle\int x^\alpha\ dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}.$
- $\displaystyle\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}.$
- $\displaystyle\int a^{kx}\ dx = \frac{1}{k\log(a)}a^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}, a \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \log(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cos(x)\ dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \tan(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen}(x) + C, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cosh(x)\ dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\ dx = \cosh(x) + C.$

Es evidente que no toda función se ajusta a alguna de las que aparecen en la lista anterior. Para esos casos hemos de idear mecanismos que permitan reducir la integral de cualquier función a la integral de las funciones que acabamos de ver. Para ello emplearemos fundamentalmente dos métodos: La integración por cambio de variable y la integración por partes.

Integración por cambio de variable

Consideremos la integral indefinida de la función f,

$$\int f(x)\ dx.$$

Esta integral aparece expresada en términos de la variable x. Sin embargo podría ser interesante expresarla en función de otra variable que esté relacionada con x mediante cierta fórmula. Supongamos que la variable t está relacionada con la variable x mediante la ecuación

$$\varphi(t) = \phi(x).$$

Derivemos esta expresión mediante la siguiente regla mnemotécnica en la que introducimos el diferencial con respecto a t, dt, y el diferencial con respecto a x, dx,

$$\varphi'(t)dt = \phi'(x)dx.$$

Si reunimos estas dos igualdades obtenemos dos ecuaciones,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(t) = \phi(x), \\ \varphi'(t)\ dt = \phi'(x)\ dx, \end{array}\right.$$

a través de las cuales podemos despejar x en función de t y dx en función de dt y t para posteriormente sustituir los resultados obtenidos en la integral que pretendemos calcular. Se resuelve la integral en función de la variable t y luego se deshace el cambio.

Ejemplos 7.

1) Calcular $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2+x}\ dx$.

$$\begin{aligned} \int (2x+1)e^{x^2+x}\ dx &= \left(\begin{array}{l} t = x^2+x \\ dt = (2x+1)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x+1} \end{array}\right) = \int e^t\ dt = e^t + C \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = e^{x^2+x} + C. \end{aligned}$$

2) Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\mathrm{Ln}^2(x)}}\ dx$.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x\sqrt{1-\mathrm{Ln}^2(x)}}\ dx = \\ &= \left(\begin{array}{lll} \mathrm{sen}(t) = \mathrm{Ln}(x) & \Rightarrow & t = \mathrm{arcsen}\big(\mathrm{Ln}(x)\big) \\ \cos(t)\ dt = \frac{1}{x}\ dx & \Rightarrow & dx = x\cos(t)\ dt \end{array}\right) = \int \frac{x\cos(t)\ dt}{x\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(x)}} \\ &= \int \frac{\cos(t)\ dt}{\sqrt{\cos^2(x)}} = \int \frac{\cos(t)dt}{\cos(t)} = \int dt = t + C = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = \mathrm{arcsen}(\mathrm{Ln}(x)) + C. \end{aligned}$$

Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la propiedades de derivación del producto de funciones. Sabemos que

$$\int (f(x)\cdot g(x))'\ dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

y además

$$\int (f(x)\cdot g(x))'\ dx = \int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))\ dx = \int f'(x)\cdot g(x)\ dx + \int f(x)\cdot g'(x)\ dx$$

de manera que uniendo las dos igualdades

$$\int f'(x)\cdot g(x)\ dx + \int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

de donde

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx + C$$

y finalmente, incluyendo el parámetro de integración, C, en la integral indefinida del segundo miembro, hemos demostrado la siguiente:

Propiedad 8. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en el intervalo I, entonces*

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx.$$

La propiedad anterior no se utiliza directamente sino a través del siguiente esquema que se denomina **método de integración por partes** para el cálculo de la integral $\int f(x)g(x)dx$:

$$\int (\underbrace{f(x)}_{=u(x)}\cdot\underbrace{g(x)}_{=v'(x)})\ dx = \int (u(x)\cdot v'(x))\ dx = \left\{\begin{array}{ll} u(x) = f(x) & \\ v'(x) = g(x) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u'(x) = f'(x) \\ v(x) = \int g(x)\ dx \end{array}\right\}$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{usando la}\\ \text{propiedad}\end{array}\right) = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ dx.$$

Ejemplo 9.

$$\begin{aligned}\int x\log(x)\ dx &= \left\{\begin{array}{lcl} u = \log(x) & & u' = (\log(x))' = \frac{1}{x} \\ & \Rightarrow & \\ v' = x & & v = \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(x) - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

El método de integración por partes se puede aplicar para obtener la integral de funciones del tipo

$$p(x)\cdot f(x),$$

donde $p(x)$ es un polinomio y $f(x)$ es una función logarítmica, exponencial o trigonométrica. En tales casos es posible que sea necesario aplicar la integración por partes sucesivamente para obtener el resultado. También es indicado el uso del método de integración por partes para el cálculo de la integral del producto de una función trigonométrica por una exponencial.

Ejemplos 10.

1) Calcular $\displaystyle\int (x^2 + x - 1)e^x\ dx$.

$$\int (x^2 + x - 1)e^x\ dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2+x-1 & \\ v' = e^x & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2x+1 \\ v = \int e^x\ dx = e^x \end{array} \right\} = (x^2+x-1)e^x$$

$$- \int (2x+1)e^x\ dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+1 \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2 \\ v = \int e^x\ dx = e^x \end{array} \right\}$$

$$= (x^2+x-1)e^x - \left((2x+1)e^x - \int 2e^x\ dx \right)$$

$$= (x^2+x-1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = (x^2-x)e^x + C.$$

2) Calcular $\displaystyle\int \log(x)\ dx$.

Véase que

$$\log(x) = 1 \cdot \log(x)$$

y tenemos el producto de un polinomio de grado 0 ($p(x) = 1$) por una función logarítmica ($f(x) = \log(x)$), con lo que aplicaremos integración por partes como sigue:

$$\int \log(x)\ dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \log(x) \\ \\ v' = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ \\ v = \int 1\ dx = x \end{array} \right\} = x\log(x) - \int \frac{1}{x} x\ dx$$

$$= x\log(x) - x + C.$$

3) Calcular $\displaystyle\int x\cos(x)dx$. Tenemos el producto de un polinomio, $p(x) = x$, por una función trigonométrica, $f(x) = \cos(x)$. Resolveremos integrando por partes:

$$\int x\cos(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ \\ v' = \cos(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 1 \\ \\ v = \int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) \end{array} \right\}$$

$$= x\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)dx = x\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + C.$$

4) También podemos emplear el método de integración por partes para calcular la integral del producto de una función exponencial por una trigonométrica. En este caso será necesario aplicar integración por partes dos veces para poder despejar la integral deseada. Veamos un ejemplo.

$$\int e^x \cos(x)dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = -\mathrm{sen}(x) \\ \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x\cos(x) + \int e^x \mathrm{sen}(x)dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \mathrm{sen}(x) \\ \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = \cos(x) \\ \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\}$$

$$= e^x\cos(x) + e^x\mathrm{sen}(x) - \int e^x\cos(x)dx$$

En definitiva, tenemos que

$$\underline{\int e^x\cos(x)dx} = e^x\cos(x) + e^x\mathrm{sen}(x) - \underline{\int e^x\cos(x)dx}$$

y observamos que en ambos miembros de la igualdad hemos obtenido la integral que pretendíamos calcular. Entonces, será suficiente despejar para obtener

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos(x) + e^x \text{sen}(x)\right) + C.$$

Veremos a continuación una relación de técnicas que nos permiten resolver ciertos tipos específicos de integrales usando para ello los dos métodos que acabamos de ver, cambios de variable e integración por partes, en diferentes puntos.

3.2.1 Integrales inmediatas

Cuando, para la resolución de una integral, podemos aplicar directamente alguna regla de integración procedente de la tabla que hemos visto en la página 83, decimos que tal integral es una integral inmediata. A continuación enumeramos algunos tipos de integrales inmediatas de interés:

Integrales inmediatas de tipo potencial

Son integrales que pueden fácilmente transformarse hasta la forma

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C.$$

Ejemplos 11.
1) Calcular $\int x^2(3x^3+14)^3$. Tenemos que

$$\int x^2(3x^3+14)^3 = \frac{1}{9}\int 9x^2(3x^3+14)^3\ dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = 3x^3+14 \\ f'(x) = 9x^2 \end{array}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot(3x^3+14)^4 + C.$$

2) Calcular $\int \frac{x-1}{\big((x-1)^2+4\big)^2}\ dx$. En este caso procederemos como sigue

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\big((x-1)^2+4\big)^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int 2(x-1)\big((x-1)^2+4\big)^{-2}\ dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = (x-1)^2+4 \\ f'(x) = 2(x-1) \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{-1}\big((x-1)^2+4\big)^{-1} = \frac{-1}{2\big((x-1)^2+4\big)} + C.\end{aligned}$$

3) Calcular $\int \cos(x)\cdot\text{sen}^3(x)\ dx$. Tenemos que

$$\int \cos(x)\cdot\text{sen}^3(x)\ dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = \text{sen}(x) \\ f'(x) = cos(x) \end{array}\right) = \frac{1}{4}\text{sen}^4(x) + C.$$

4) Calcular $\int \frac{x-1}{\big((x-1)^2+4\big)^2}\ dx$.

$$\int \frac{x-1}{\big((x-1)^2+4\big)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\big((x-1)^2+4\big)^{-2}\ dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = (x-1)^2+4 \\ f'(x) = 2(x-1) \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{-1}\big((x-1)^2+4\big)^{-1} = \frac{-1}{2\big((x-1)^2+4\big)} + C.$$

5) Una integral del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx$ con $n > 1$ puede resolverse como sigue:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx &= \frac{1}{A}\int A(Ax+B)^{-n}dx = \begin{pmatrix} f(x) = Ax+B \\ f'(x) = A \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{A}\frac{(Ax+B)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{A(-n+1)}\frac{1}{(Ax+B)^{n-1}} + C.\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{(9x-1)^7}dx = \frac{1}{9\cdot(-6)}\frac{1}{(9x-1)^6} = \frac{-1}{54(9x-1)^6} + C.$$

Cuando $n = 1$ no es posible resolver la integral empleando este método y hay que recurrir al último apartado de esta sección en el que se tratan las integrales inmediatas de tipo logarítmico.

6) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx$ con $n > 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx &= \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B-B}{(Ax+B)^n}dx \\ &= \frac{1}{A}\int \frac{1}{(Ax+B)^{n-1}}dx - \frac{B}{A}\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx.\end{aligned}$$

Ahora, la integral $\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx$ puede resolverse siguiendo el ejemplo anterior y podemos hacer los mismo para $\int \frac{1}{(Ax+B)^{n-1}}$ siempre que $n-1 > 1$. Cuando $n-1 = 1$ (es decir, cuando $n = 2$), como hemos mencionado antes, tendremos que resolver como se indica en el apartado dedicado a integrales logarítmicas.

Integrales inmediatas de tipo exponencial

Son integrales que pueden ajustarse a la forma

$$\int f'(x)a^{f(x)}\ dx = \frac{1}{\log(a)}a^{f(x)} + C$$

Ejemplos 12.

1) Para $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}\ dx$. Resolvemos como sigue:

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}\ dx = -\int -\operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}\ dx = \begin{pmatrix} f(x) = \cos(x) \\ f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix} = e^{\cos(x)} + C.$$

2) Calcúlese $\displaystyle\int x^2\cdot 7^{x^3+5}\ dx$.

$$\int x^2\cdot 7^{x^3+5}\ dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\cdot 7^{x^3+5}\ dx = \begin{pmatrix} f(x) = x^3+5 \\ f'(x) = 3x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\log(7)}7^{x^3+5} + C.$$

Integrales inmediatas de tipo logarítmico

Son integrales en las que aparece una función dividiendo a su derivada. Son del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log(f(x)) + C.$$

Ejemplos 13.
1) Calcular $\int \tan(x)\, dx$.

$$\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = \cos(x) \\ f'(x) = -\mathrm{sen}(x) \end{array} \right) = -\log(\cos(x)) + C.$$

2) Obténgase $\int \frac{4x^3+6x^2+1}{x^4+2x^3+x-1}\, dx$. Tenemos que

$$\int \frac{4x^3+6x^2+1}{x^4+2x^3+x-1}\, dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = x^4+2x^3+x-1 \\ f'(x) = 4x^3+6x^2+1 \end{array} \right) = \log(x^4+2x^3+x-1) + C.$$

3) Calculemos la integral $\int \frac{1}{Ax+B} dx$ para ciertas constantes$A, B \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{Ax+B}\, dx = \frac{1}{A}\int \frac{A}{Ax+B}\, dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = Ax+B \\ f'(x) = A \end{array} \right) = \frac{1}{A}\log(Ax+B) + C.$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{3x+6} dx = \frac{1}{3}\log(3x+6) + C.$$

4) Calcular $\int \frac{x}{Ax+B} dx$.

$$\int \frac{x}{Ax+B} dx = \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B-B}{Ax+B} dx = \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B}{Ax+B} dx - \frac{B}{A}\int \frac{1}{Ax+B} dx$$
$$= \frac{x}{A} - \frac{B}{A^2}\log(Ax+B).$$

3.2.2 Integración de funciones racionales (sólo raíces reales en el denominador)

Una función racional es una función del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios.

Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la idea es expresar la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ como suma de fracciones simples. Ello lo hacemos siguiendo los pasos que indicamos a continuación en dos casos distintos:

a) Cálculo de $\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}} \mathbf{dx}$ cuando grado$(\mathbf{p(x)}) \geq$ grado$(\mathbf{q(x)})$.

Si grado$(p(x)) \geq$ grado$(q(x))$ efectuamos la división de $p(x)$ entre $q(x)$ de manera que obtengamos un resto $r(x)$ de grado inferior al de $q(x)$. Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{array}{ll} p(x) & \lfloor q(x) \\ r(x) & \;\; s(x) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \\ \\ \text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x)) \end{cases}.$$

Posteriormente efectuaremos la integral de la expresión obtenida,

$$\int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) \, dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Vemos que aparece la integral del polinomio $s(x)$ que es fácil de calcular. También aparece la integral de la función racional $\frac{r(x)}{q(x)}$ pero ahora tenemos que el grado del numerador (grado de $r(x)$) es menor que el grado del denominador (grado de $q(x)$). Para resolver esta última integral procedemos como se indica en el caso **b)**.

Ejemplo 14. Calcular la integral

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}dx.$$

Se trata de la integral de una función racional. Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador dividiremos ambos polinomios:

$$\begin{array}{cc} x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12 & \lfloor x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ x & x + 3 \end{array}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &\frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \\ &= x + 3 + \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int &\frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \\ &= \int (x+3)dx + \int \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}dx. \end{aligned}$$

Queda pendiente de resolver la última integral en la que aparece una función racional pero ahora con grado del numerador inferior al grado del denominador.

---

b) Cálculo de $\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ cuando grado$(\mathbf{p(x)}) <$ grado$(\mathbf{q(x)})$.

Si grado$(p(x)) <$ grado$(q(x))$ descompondremos la función racional en una suma de fracciones simples en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_k.$$

Para determinar cuáles son las fracciones S_1, S_2,$\ldots S_k$ seguimos los siguientes pasos:

1. Calcularemos todas las soluciones de la ecuación polinómica

$$q(x) = 0.$$

Ejemplo 15. Siguiendo con el **Ejemplo 14**, para resolver la integral que quedó pendiente, igualaremos a cero el denominador

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

y calcularemos las soluciones de la ecuación así obtenida. El cálculo de estas soluciones lo hacemos empleando el método de Ruffini como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
1 & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \lfloor 0 \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \lfloor 0 & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

Obtenemos la solución $x = 2$ dos veces (es decir $x = 2$ con multiplicidad 2) y la solución $x = 1$ una vez ($x = 1$ con multiplicidad 1).

---

2. Por cada solución real, $\alpha \in \mathbb{R}$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición de la función racional el siguiente grupo de fracciones simples

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Véase que si hay multiplicidad de k añadiremos k fracciones simples para la solución α.

Los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son, en principio, desconocidos y deberán ser calculados una vez sepamos todas las fracciones simples que intervienen en la descomposición de la función que estamos integrando.

Ejemplo 16.
1) Continuando con el ejemplo 15, veamos qué fracciones simples añadiremos para cada solución:

- La solución $\alpha = 2$ tiene multiplicidad 2. Para ella añadiremos dos fracciones simples,

$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}.$$

- La solución $\alpha = 1$ tiene multiplicidad 1. Para ella añadimos una sola fracción simple,

$$\frac{A_3}{x-1}.$$

Hemos estudiado las fracciones a añadir para cada solución. Reuniremos todas ella para obtener la descomposición en fracciones simples de la función que intentábamos integrar:

$$\frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-1}. \tag{3.1}$$

Los coeficientes A_1, A_2 y A_3 han de ser calculados ahora. Teniendo en cuenta que

$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-1} =$$

$$\frac{A_1(x-2)(x-1)+A_2(x-1)+A_3(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

y que

$$x^3-5x^2+8x-4=(x-2)^2(x-1),$$

la ecuación (3.1) nos lleva a que

$$x=A_1(x-2)(x-1)+A_2(x-1)+A_3(x-2)^2.$$

Dando distintos valores a la variable x en la igualdad anterior obtenemos un sistema de ecuaciones del que despejaremos dichos coeficientes:

$$\left.\begin{array}{ll} x=1\Rightarrow & 1=A_3 \\ x=2\Rightarrow & 2=A_2 \\ x=0\Rightarrow & 0=2A_1-A_2+4A_3 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$A_1=-1,\ A_2=2,\ A_3=1.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, la descomposición en fracciones simples es

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4}= \\ & \quad =\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

La integral de todas la fracciones simples que aparecieron puede realizarse empleando métodos indicados anteriormente. Así, la primera y la tercera son inmediatas de tipo logarítmico y la segunda es inmediata de tipo potencial. Así pues,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4}= \\ = &\ -\int\frac{1}{x-2}+2\int\frac{1}{(x-2)^2}+\int\frac{1}{x-1} \\ = &\ -\log(x-2)-2(x-2)^{-1}+\log(x-1)+C. \end{aligned}$$

3.3 Integral definida

La integral indefinida de una función $f(x)$ es, más una constante de integración, una primitiva de la función $F(x)$. Si tomamos un intervalo (a,b) en el que está definida la función $f(x)$ definiremos en esta sección lo que se denomina integral definida de $f(x)$ entre a y b. Mientras que la integral indefinida es una función (la función primitiva), la integral definida será un número.

Por sus importantes aplicaciones la integral definida es una herramienta fundamental en matemáticas y otras disciplinas. La relación entre la integral definida y la indefinida queda establecida en algunos de los resultados más importantes del análisis matemático como el Teorema Fundamental del Cálculo, regla de Barrow, etc. El estudio de esos resultados se escapa de los objetivos del curso pero nos basaremos en ellos para dar una definición sencilla de integral definida.

Veamos a continuación la definición precisa de integral definida.

Definición 17.

i) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$. Supongamos que f es continua y acotada en (a, b) y que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que es derivable en (a, b) y que $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x),$$

es decir, F es una primitiva de f en (a, b). Entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

ii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$ y supongamos que f es acotada en (a, b) y continua en (a, b) excepto a lo sumo en los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx.$$

Definimos la integral definida de f entre b y a como

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ acotada y dado $a \in \mathbb{R}$ definimos la integral definida de f entre a y a como

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

La diferencia $F(b) - F(a)$ suele denotarse como $[F(x)]_a^b$ con lo que tenemos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

Con esta definición las propiedades clásicas de la integral definida surgen de forma inmediata. En particular el Teorema Fundamental del Cálculo será consecuencia de la definición y de la **Propiedad ??** del Capítulo 2 para la derivación de funciones definidas a trozos. Asimismo, la fórmula del cambio de variable es una consecuencia directa de la regla de la cadena para la derivación de funciones.

Propiedades 18.

i) Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$, de modo que f y g están en las condiciones del apartado ii) de la **Definición 17** *para dicho intervalo, entonces:*

1. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b f(x)\ dx$.*
2. *$\forall c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.*
3. *(Teorema Fundamental del Cálculo) Si consideramos la función*

$$\begin{array}{c} F : [a, b] \to \mathbb{R} \\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array},$$

entonces F es una función continua en $[a, b]$ y derivable en todos aquellos puntos $x \in (a, b)$ en los que f es continua, teniéndose en tales casos que

$$F'(x) = f(x).$$

4. *Si modificamos la función f en un conjunto finito de puntos, el valor de su integral entre a y b no varía.*

ii) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

iii) (Fórmula del cambio de variable) Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c, d] \to [a, b]$ en las condiciones del apartado ii) de la **Definición 17** *para sus respectivos dominios. Supongamos que g es derivable en $[c, d]$, entonces*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx.$$

3.3.1 Aplicaciones de la integral definida

Cálculo del área a partir de la integral definida

La integral definida entre dos puntos permite calcular el área encerrada por la función sobre el intervalo determinado por ellos.

Propiedad 19. *Dada la función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 17**, *el área comprendida entre el eje $y = 0$, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función f se calcula mediante la integral definida*

$$\int_a^b f(x)dx$$

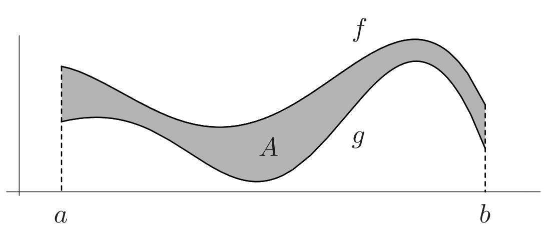
de modo que si f es positiva en (a, b) dicha integral proporcionará el área con signo positivo y si f es negativa lo hará con signo negativo.

Como se indica en la propiedad, puesto que $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, si la función f es negativa, la integral definida entre a y b proporcionará el valor del área pero con signo negativo. Ello debe ser tenido en cuenta a la hora de trabajar con funciones que cambian de signo.

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.



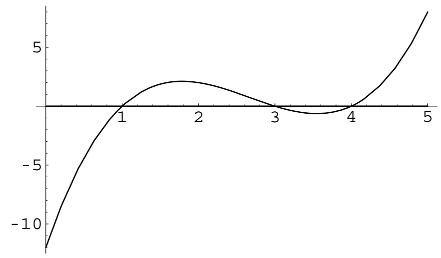
Es claro que A será la diferencia entre el área que queda bajo f y la que queda bajo g. Por tanto,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

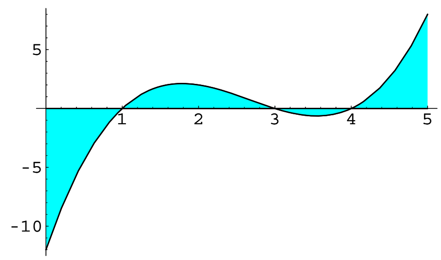
A este respecto, nuevamente es preciso tener en cuenta los posibles puntos de corte entre las funciones f y g que podrían hacer variar el signo de la integral anterior.

Ejemplos 20.

1) Calculemos el área encerrada entre la función $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ y el eje x sobre el intervalo $[0, 5]$. Si representamos la función $f(x)$ en el intervalo indicado obtenemos la gráfica



El área encerrada por la función será por tanto la región que aparece sombreada en la siguiente figura:



Sabemos que el área encerrada por una función en un intervalo se calcula realizando la integral definida de la función en ese intervalo. Sin embargo, observamos en ambas gráficas que la función $f(x)$ presenta varios cambios de signo en el intervalo $[0, 5]$ por lo que no podremos calcular el área directamente realizando la integral

$$\int_0^5 f(x)dx.$$

Debemos determinar en primer lugar en qué intervalos es positiva o negativa la función. Si bien en este caso es posible observar a simple vista en la representación gráfica de $f(x)$ los intervalos en los que es positiva o negativa, no siempre dispondremos la gráfica de la función por lo que procederemos como si no contáramos con ella.

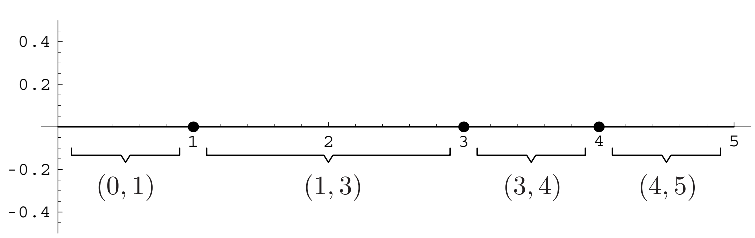
De este modo, debemos determinar cuándo

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) < 0.$$

Para ello comenzamos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, es decir,

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0.$$

Si aplicamos el método de Ruffini es fácil comprobar que las soluciones de esta ecuación son $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$ que dividen al intervalo $[0, 5]$ en cuatro subintervalos



y sabemos, como consecuencia del Teorema de Bolzano (véase la página 39), que dentro de cada uno de esos intervalos la función $f(x)$ no puede cambiar de signo. Basta entonces comprobar el signo de la función en un punto de cada intervalo para deducir que

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (0,1). \\ f(x) > 0 \text{ en } (1,3). \\ f(x) < 0 \text{ en } (3,4). \\ f(x) > 0 \text{ en } (4,5). \end{cases}$$

Por tanto, en los intervalos $(0,1)$ y $(3,4)$ la integral definida proporcionará el área encerrada por la función f pero con signo negativo. Para calcular el área correctamente debemos cambiar el signo al resultado de la integral definida sobre estos dos intervalos. De este modo obtendremos el valor exacto del área encerrada por $f(x)$ sobre el intervalo $[0,5]$ como sigue

$$\text{área} = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx.$$

Puesto que la integral indefinida de $f(x)$ es

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 8x^2 + 19x - 12)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x + C,$$

finalmente tenemos

$$\text{área} = -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_1^3 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_3^4$$

$$+ \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_4^5 = \frac{133}{12} = \frac{59}{12} + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = 11.0833.$$

2) Calculemos el área comprendida entre las funciones $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$ y $f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$ sobre el intervalo $[1,3]$. Sabemos que el área comprendida entre ambas funciones se obtiene mediante la integral definida

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Sin embargo, nuevamente hemos de tener en cuenta los posibles cambios de signo que vendrán determinados por los cruces entre las dos funciones. En este caso hemos de determinar si

$$f_1(x) - f_2(x) < 0 \quad \text{ó} \quad f_1(x) - f_2(x) > 0$$

y para ello comenzamos resolviendo la ecuación $f_1(x) - f_2(x) = 0$, es decir,

$$x^2 - 2x + 2 - (-x^2 + 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0.$$

Aplicando la fórmula para la ecuación de segundo grado comprobamos que las soluciones de esta ecuación son

$$\begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0.6339 \\ x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 2.3660 \end{cases}.$$

De estas dos soluciones solamente la segunda está en el intervalo $[1,3]$ que nos interesa dividiéndolo en dos subintervalos, $(1, \frac{3+\sqrt{3}}{2})$ y $(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, 3)$. Nuevamente es suficiente comprobar un punto de cada uno de estos intervalos para deducir que

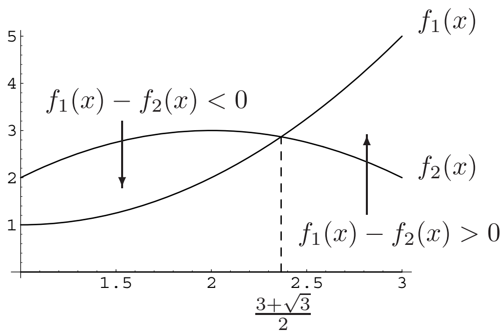
$$\begin{cases} f_1(x) - f_2(x) < 0 \text{ en } (1, \frac{3+\sqrt{3}}{2}). \\ f_1(x) - f_2(x) > 0 \text{ en } (\frac{3+\sqrt{3}}{2}, 3). \end{cases}$$

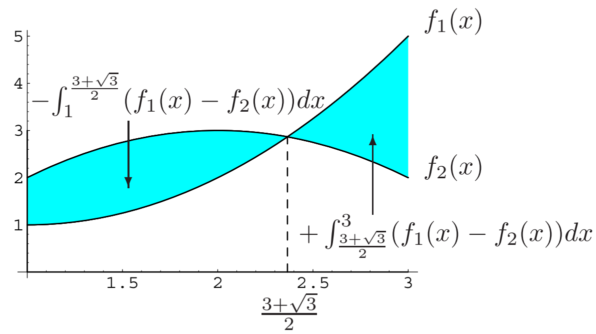
De modo que obtendremos al área deseada compensando el signo negativo de la integral definida en el primer intervalo como sigue:

$$\text{área} = -\int_1^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} (f_1(x) - f_2(x))dx + \int_{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}^{3} (f_1(x) - f_2(x))dx$$

$$= -\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 3x\right]_1^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} + \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 3x\right]_{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}^{3} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} + \sqrt{3} = 2.3987.$$

Si observamos la gráfica de ambas funciones en el intervalo $[1,3]$ y la región que ellas delimitan, podemos comprobar que efectivamente se cortan en el punto $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ del intervalo $[1,3]$ con lo que es necesario cambiar el signo de la integral definida en el primer subintervalo tal y como aparece en la gráfica.





Cálculo de la función de valor total a partir de la función de velocidad

Ya comentábamos al principio de este Capítulo que en muchas ocasiones se dispone de la función que determina la velocidad de cierto fenómeno pero no de la función de valor total o acumulado. En tales circunstancias el apartado *ii)* de la **Propiedad 18** permite recuperar la función de valor acumulado si disponemos de algún dato inicial.

Supongamos que cierto fenómeno que evoluciona a lo largo del tiempo está determinado por una magnitud, $M(t)$, de la cual conocemos su velocidad de variación, $v(t)$, en cada instante. Supongamos además que sabemos que en el instante t_0 dicha magnitud tomaba un valor M_0. Tratamos de determinar quién es la función $M(t)$ a partir de la siguiente información:

$$\begin{cases} M'(t) = v(t), \\ M(t_0) = M_0. \end{cases}$$

Utilizando el apartado *ii)* de la **Definición 18** tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} M'(t)dt = M(t) - M(t_0) \Rightarrow M(t) - M_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \Rightarrow M(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

Esta última identidad nos proporciona el dato, en principio desconocido, del valor $M(t)$ en cualquier instante.

Ejemplo 21. Se realiza un estudio sobre las basuras que se generan en cierta ciudad durante el primer mes del año. Supongamos que la función $B : [0,30] \to \mathbb{R}$ dada por

$$B(t) = \frac{t^3}{200} - \frac{t^2}{4} + 3t + 30$$

proporciona la cantidad de basuras producidas en el día t, medida en toneladas. Tenemos entonces que $B(t)$ expresa en toneladas/día la velocidad de producción de basura que tuvimos el día t. Puesto que la función $B(t)$ proporciona valores diferentes para los distintos días, la velocidad de producción de basuras habrá ido cambiando de un día a otro. Supongamos que inicialmente ($t_0 = 0$) la cantidad de basuras acumuladas en el vertedero público era de 3200 toneladas. Pretendemos calcular ahora la función $M(t)$ que proporcione la cantidad total de toneladas acumuladas en el vertedero hasta el día t. A raíz de los comentarios anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 + \int_{t_0}^{t} B(x)dx = 3200 + \int_0^t \left(\frac{x^3}{200} - \frac{x^2}{4} + 3x + 30\right)dx = 3200 + \left[\frac{x^4}{800} - \frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} + 30x\right]_0^t \\ &= 3200 + \left(\frac{t^4}{800} - \frac{t^3}{12} + \frac{3t^2}{2} + 30t - 0\right) = \frac{t^4}{800} - \frac{t^3}{12} + \frac{3t^2}{2} + 30t + 3200. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el día $t = 15$ la cantidad de basuras acumuladas en el vertedero será igual a

$$M(15) = 3769.53$$

mientras que en el día $t = 30$ tenemos

$$M(30) = 4212.5.$$

Cálculo del valor medio de una función

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en principio positiva, sabemos que la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área que encierra la función sobre el intervalo $[a, b]$. Podemos preguntarnos si es posible encontrar una función constante $g(x) = k$ que encierre en el mismo intervalo la misma área que la función f. Tenemos que el área para g es

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b kdx = [kt]_a^b = k(b - a).$$

Si queremos que encierre la misma área que f debe cumplirse que

$$k(b - a) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow k = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx.$$

Por tanto la función constante $g(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, encierra la misma área que $f(x)$. Dicha constante es lo que suele llamarse valor medio de la función f.

Definición 22. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, llamamos valor medio de la función a la cantidad*

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx.$$

Ejemplos 23.
1) En el **Ejemplo 21** vimos cómo la función $B(t)$ proporcionaba la velocidad de producción de basuras en toneladas/día para el día t. La velocidad media durante los primeros 30 días (durante el primer mes del año sobre el que se realizó el estudio) será

$$\text{Velocidad media} = \text{Valor medio de } B(t) = \frac{1}{30 - 0}\int_0^{30} B(t)dt = \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(\frac{t^3}{200} - \frac{t^2}{4} + 3t + 30\right)dt$$

$$= \frac{1}{30}\left[\frac{t^4}{800} - \frac{t^3}{12} + \frac{3t^2}{2} + 30t\right]_0^{30} = 33.75.$$

2) Durante los 365 día de un año, el saldo de cierta cuenta bancaria viene dado por la función

$$\begin{gathered} L : [0, 365] \to \mathbb{R} \\ L(t) = 1000 + 1000 \cos\left(\tfrac{2\pi}{365}t\right) \end{gathered}$$

de modo que $L(t)$ son los euros que había en cuenta en el día t. El saldo medio de dicha cuenta será el valor medio de la función $L(t)$ en el intervalo $[0, 365]$ que calculamos del siguiente modo:

$$\text{Promedio de } L = \frac{1}{365-0}\int_0^{365} L(t)dt = \frac{1000}{365}\int_0^{365}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right)\right)dt$$

$$= \frac{1000}{365}\left[t + \frac{365}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right)\right]_0^{365} = 1000.$$

Por tanto, el saldo medio de la cuenta es de 1000 euros.

El interés variable compuesto continuamente

Existen numerosas situaciones en las que el interés que rinde cierto capital varía a lo largo del tiempo. De hecho, hipotecas, fondos de inversión, etc. con interés variable son todos ellos productos que ofrece cualquier entidad financiera.

Supondremos ahora que tenemos cierto capital inicial P_0 en una cuenta que abona un interés que no es fijo. El interés, I, variará a lo largo del tiempo de modo que en realidad lo que tendremos es una función $I(t)$ que proporciona el interés (supondremos que en tantos por uno) en cada año t. Pretendemos entonces calcular la fórmula para la función $P(t)$ que arroja el capital acumulado hasta el año t.

Estudiando la relación que existe entre la función de capital $P(t)$ y la función de interés $I(t)$, se puede demostrar que

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}}, \tag{3.2}$$

que es la fórmula para el capital sujeto a un interés compuesto continuamente, variable, $I(t)$, (en tanto por uno) cuando el capital en el año inicial t_0 es P_0.

El interés que estudiamos en este apartado es compuesto ya que los capitales recibidos como intereses pasan a su vez a producir nuevos intereses para los años siguientes. Además es compuesto continuamente ya que el pago de los intereses se produce de forma continuada. En el caso del interés variable pagado en un número determinado de períodos (en lugar de continuamente) no es posible obtener fórmulas sencillas como ésta que hemos conseguido aquí.

Ejemplos 24.
1) Invertimos 1000€ en un fondo de inversión que ofrece interés variable compuesto continuamente. El interés inicial del fondo es del 3% anual y cada año se incrementa en un 0.5%. Calcular el capital que recibiremos al cabo de 5 años.

Evidentemente, en este caso el interés es variable ya que inicialmente tenemos un 0.03 por uno de interés que se incrementa en un 0.005 anual. Es evidente que para calcular el interés en el año t podremos aplicar la fórmula

$$\underbrace{0.03}_{\text{Interés inicial}} + \underbrace{0.005}_{\text{Incremento anual}} \times \underbrace{t}_{\text{Años transcurridos}}.$$

Por tanto,

$$I(t) = 0.03 + 0.005t.$$

Puesto que no sabemos en qué año concreto se realizó la inversión, para simplificar aceptaremos que ésta se realizó en el año $t_0 = 0$. Entonces, si aplicamos la fórmula (3.2), el capital vendrá dado por

$$P(t) = 1000 \cdot e^{\int_0^t (0.03+0.005t)dt} = 1000 \cdot e^{0.03t+0.005\frac{t^2}{2}}.$$

Por tanto, pasados 5 años el capital será

$$P(5) = 1000 \cdot e^{0.03\cdot 5+0.005\frac{5^2}{2}} = 1236.77€$$

2) Cierta cuenta bancaria paga un interés variable compuesto continuamente. El capital acumulado en esa cuenta viene dado por la función

$$P(t) = 1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}.$$

¿Qué interés hemos recibido cada año?. ¿En concreto qué interés obtendremos al tercer año?.

En este caso conocemos la función de capital $P(t)$ y debemos calcular la función de interés $I(t)$. Para ello recurriremos a la fórmula (3.3):

$$I(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{\left(1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}\right)'}{1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}} = \frac{1500 \cdot 0.01 \cdot 2(t+1) \cdot e^{0.01(t+1)^2}}{1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}} = 0.02(t+1).$$

Así pues, la función de interés es $I(t) = 0.02(t+1)$ y mediante ella calculamos el interés en el año tres,

$$I(3) = 0.02(3+1) = 0.08,$$

o lo que es lo mismo, un 8%.

3.4 Material Adicional

3.4.1 Integración de funciones racionales (caso general)

Ampliación de conceptos sobre integración de funciones racionales. Página 89

Como ya dijimos en la subsección 3.2.2, una función racional es una función del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios.

Comenzamos viendo varios casos de funciones racionales que pueden ser integradas de forma sencilla:

1) Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx, \quad \int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ya hemos visto que estas integrales pueden resolverse como integrales inmediatas de tipo potencial o logarítmico.

2) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx$. Resolveremos haciendo un cambio de variable para transformala en la integral inmediata $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$ (está en la tabla de la página 83). Veámoslo:

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{b^2\left(\frac{(x-a)^2}{b^2}+1\right)}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \left(\begin{array}{l} t = \frac{x-a}{b} \\ dt = \frac{1}{b}\,dx \Rightarrow dx = b\,dt \end{array}\right) = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{t^2+1} b\,dt = \frac{1}{b}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{b}\text{arctg}(t) = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = \frac{1}{b}\text{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

3) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}dx$. Puede resolverse utilizando el apartado anterior y los métodos para integrales inmediatas de tipo logarítmico. Para ello hacemos lo siguiente:

$$\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}dx =$$
$$= \int \frac{x-a+a}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx + a\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx.$$

Ahora bien, la integral $\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx$ puede calcularse como en el apartado **2)** y la integral $\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx$ es de tipo logarítmico ya que,

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = (x-a)^2+b^2 \\ f'(x) = 2(x-a) \end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left((x-a)^2+b^2\right)+C.$$

A partir de estas integrales sencillas podemos intentar resolver otras integrales racionales más complejas. Análogamente a como hicimos en la subsección 3.2.2, para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, la idea es expresar la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ como la suma de fracciones simples de las que aparecen en los apartados **1)**, **2)** y **3)** que acabamos de ver. Ello lo hacemos siguiendo los pasos que indicamos a continuación en dos casos distintos:

a) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ cuando grado(p(x)) $\geq$ grado(q(x)).

Si grado$(p(x)) \geq$ grado$(q(x))$ efectuamos la división de $p(x)$ entre $q(x)$ de manera que obtengamos un resto $r(x)$ de grado inferior al de $q(x)$. Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{array}{ll} p(x) & \underline{\lfloor q(x)} \\ r(x) & s(x) \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \\ \\ \text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x)) \end{array}\right. .$$

Posteriormente efectuaremos la integral de la expresión obtenida,

$$\int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right)\,dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Vemos que aparece la integral del polinomio $s(x)$ que es fácil de calcular. También aparece la integral de la función racional $\frac{r(x)}{q(x)}$ pero ahora tenemos que el grado del numerador (grado de $r(x)$) es menor que el grado del denominador (grado de $q(x)$). Para resolver esta última integral procedemos como se indica en el caso **b)**.

Ejemplo 25. Calcular la integral

$$\int \frac{x^6-9x^5+30x^4-33x^3-25x^2+69x-28}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}dx.$$

Se trata de la integral de una función racional. Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador dividiremos ambos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^6-9x^5+30x^4-33x^3-25x^2+69x-28 & x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20 \\ \cline{2-2} x^4-15x^2+27x-8 & \qquad x+1 \end{array}.$$

Es decir,

$$\frac{x^6-9x^5+30x^4-33x^3-25x^2+69x-28}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}=$$
$$=x+1+\frac{x^4-15x^2+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}$$

y por tanto

$$\int\frac{x^6-9x^5+30x^4-33x^3-25x^2+69x-28}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}=$$
$$=\int(x+1)dx+\int\frac{x^4-15x^2+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^4-15x^2+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20}dx.$$

Queda pendiente de resolver la última integral en la que aparece una función racional paro ahora con grado del numerador inferior al grado del denominador.

---

b) Cálculo de $\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ cuando grado$(\mathbf{p(x)}) <$ grado$(\mathbf{q(x)})$.

Si grado$(p(x))$ < grado$(q(x))$ descompondremos la función racional en una suma de fracciones simples en la forma

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=S_1+S_2+\cdots+S_k,$$

donde las expresiones S_1, S_2,... S_k son del tipo indicado en los apartados **1)**, **2)** y **3)** de esta subsección. Para determinar cuáles son las fracciones S_1, S_2,... S_k seguimos los siguientes pasos:

1. Calcularemos todas las soluciones reales y complejas de la ecuación polinómica

$$q(x)=0.$$

Ejemplo 26. Siguiendo con el **Ejemplo 25**, para resolver la integral que quedó pendiente, igualaremos a cero el denominador

$$x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20=0$$

y calcularemos las soluciones de la ecuación así obtenida. El cálculo de estas soluciones lo hacemos empleando el método de Ruffini como sigue:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -10 & 39 & -72 & 62 & -20 \\ 1 & & 1 & -9 & 40 & -42 & 20 \\ \hline & 1 & -9 & 30 & -42 & 20 & \lfloor 0 \\ 1 & & 1 & -8 & 22 & -20 & \\ \hline & 1 & -8 & 22 & -20 & \lfloor 0 & \\ 2 & & 2 & -12 & 20 & & \\ \hline & 1 & -6 & 10 & \lfloor 0 & & \end{array}$$

Obtenemos la solución $x = 1$ dos veces (es decir $x = 1$ con multiplicidad 2) y la solución $x = 2$ una vez ($x = 2$ con multiplicidad 1), quedando sin resolver el tramo de la ecuación que corresponde al polinomio $x^2 - 6x + 10$. Por tanto, para encontrar todas las soluciones, debemos resolver por último,

$$x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Aquí podemos aplicar directamente la fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado y obtendremos las soluciones complejas $x = 3 \pm i$ con multiplicidad 1 (es decir $x = 3+i$ y $x = 3-i$ ambas aparecen una sola vez). En definitiva hemos obtenido las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x = 1, & \text{con multiplicidad 2,} \\ x = 2, & \text{con multiplicidad 1,} \\ x = 3 \pm i, & \text{con multiplicidad 1.} \end{cases}$$

2. Por cada solución real, $\alpha \in \mathbb{R}$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición de la función racional el siguiente grupo de fracciones simples

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Véase que si hay multiplicidad de k añadiremos k fracciones simples para la solución α.

Los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son, en principio, desconocidos y deberán ser calculados una vez sepamos todas las fracciones simples que intervienen en la descomposición de la función que estamos integrando.

3. Por cada par se soluciones complejas, $a \pm bi$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición los sumandos

$$\frac{M_1 + N_1 x}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{M_2 + N_2 x}{\big((x-a)^2 + b^2\big)^2} + \cdots + \frac{M_k + N_k x}{\big((x-a)^2 + b^2\big)^k},$$

otra vez, tantos sumandos como indique la multiplicidad de la solución.

Nuevamente los coeficientes $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ son desconocidos y se calculan después de haber añadido las fracciones simples correspondientes a todas las soluciones.

Ejemplos 27.
1) Continuando con el ejemplo 26, veamos qué fracciones simples añadiremos para cada solución:

- La solución $\alpha = 1$ tiene multiplicidad 2. Para ella añadiremos dos fracciones simples,

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}.$$

- La solución $\alpha = 2$ tiene multiplicidad 1. Para ella añadimos una sola fracción simple,

$$\frac{A_3}{x-2}.$$

- La pareja de soluciones complejas $\alpha = 3 \pm i$ tiene multiplicidad 1. Todo número complejo es de la forma $a + bi$. En este caso $a = 3$ y $b = 1$. Añadiremos una fracción del tipo $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, es decir,

$$\frac{Mx + N}{(x-3)^2 + 1}.$$

Hemos estudiado las fracciones a añadir para cada solución. Reuniremos todas ella para obtener la descomposición en fracciones simples de la función que intentábamos integrar:

$$\frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} =$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x-3)^2+1}.$$

Los coeficientes A_1, A_2, A_3, N y M han de ser calculados ahora. Para ello daremos distintos valores a la variable x para obtener un sistema de ecuaciones del que despejaremos dichos coeficientes.

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \Rightarrow & -A_1 + A_2 - \frac{A_3}{2} + \frac{N}{10} = \frac{2}{5} \\ x=-1 \Rightarrow & -\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{3} + \frac{N-M}{17} = \frac{49}{204} \\ x=-2 \Rightarrow & -\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{9} - \frac{A_3}{4} + \frac{N-2M}{26} = \frac{53}{468} \\ x=3 \Rightarrow & \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} + A_3 + 3M + N = \frac{19}{4} \\ x=-3 \Rightarrow & -\frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{16} - \frac{A_3}{5} + \frac{N-3M}{37} = \frac{143}{2960} \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$A_1 = -2,\ A_2 = -1,\ A_3 = 1,\ M = 2,\ N = -1.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} =$$
$$= \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{2x-1}{(x-3)^2+1}.$$

La integral de todas la fracciones simples que aparecieron puede realizase empleando métodos indicados anteriormente. Así, la primera y la tercera son inmediatas de tipo logarítmico, la segunda es inmediata de tipo potencial y la última se ajusta a los casos **2)** y **3)** que vimos al principio de esta subsección. Así pues,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} &= \\ = \quad & -2\int \frac{1}{x-1} - \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x-2} + 2\int \frac{x}{(x-3)^2+1} \\ & -\int \frac{1}{(x-3)^2+1}. \\ = \quad & -2\log(x-1) + (x-1)^{-1} + \log(x-2) + 5\arctan(x-3) \\ & + \log\big((x-3)^2+1\big) + C. \end{aligned}$$

2) Calcular la integral

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 29}{x^2 - 4x + 9}\ dx.$$

El grado del numerador es mayor que el del denominador así que efectuaremos la división de uno entre el otro

$$\begin{array}{c|c} x^3 - x^2 + 29 & x^2 - 4x + 9 \\ \cline{2-2} 3x + 2 & x + 3 \end{array}$$

de manera que

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 29}{x^2 - 4x + 9}\ dx =$$
$$= \int \left(x + 3 + \frac{3x+2}{x^2 - 4x + 9}\right)\ dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{3x+2}{x^2 - 4x + 9}\ dx.$$

Para calcular esta última integral obtendremos las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4x + 9 = 0$$

que al ser una ecuación de segundo grado se resuelve fácilmente siendo sus soluciones $x = 2 + \sqrt{5}i$ y $x = 2 - \sqrt{5}i$ ambas complejas y de multiplicidad 1. Por lo tanto la función racional a integrar se descompondrá en la forma

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+9} = \frac{Mx+N}{(x-2)^2+5} = \begin{pmatrix} M=3 \\ N=2 \end{pmatrix} = \frac{3x+2}{(x-2)^2+5}$$

de manera que

$$\begin{aligned} &\int \frac{3x+2}{x^2-4x+9}\,dx = \\ &= \int \frac{3x+2}{(x-2)^2+5}\,dx = \int \frac{3(x-2)+8}{(x-2)^2+5}\,dx \\ &= 3\int \frac{x-2}{(x-2)^2+5}\,dx + \int \frac{8}{(x-2)^2+5}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\log\left((x-2)^2+5\right) + \frac{8}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

Finalmente tendremos que

$$\int \frac{x^3-x^2+29}{x^2-4x+9}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{8}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{2}\log\left((x-2)^2+5\right) + C.$$

3.4.2 Integración por cambio hasta una integral racional

Ampliación de técnicas de integración. Página 92

Denotaremos mediante $\mathbf{R}(a)$ y $\mathbf{R}(a,b)$ a cualquier expresión que se obtiene mediante suma producto y división de las expresiones a y/ó b y de constantes.

Ejemplos 28.
1) La expresión

$$\frac{\log^3(x) + 2\log^2(x) + 1}{\log^3(x) - 1}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(\log(x))$ ya que se obtiene mediante operaciones de suma, producto y división en las que intervienen $\log(x)$ y valores constantes.

2) La expresión

$$\frac{\cos^2(x) + 2x\cos(x) + x}{1 + x^2 + 2\cos^3(x)}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x, \cos(x))$ ya que se obtiene sumando multiplicando o dividiendo las expresiones x, $\cos(x)$ y valores constantes. Sin embargo no es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x)$ ni de tipo $\mathbf{R}(\cos(x))$.

Para resolver la integral

$$\int \mathbf{R}(h(x))h'(x)\ dx,$$

donde $h(x)$ puede ser alguna de entre

$$\begin{cases} a^x,\ a>0 \\ e^x \\ \log(x) \\ \arccos(x) \\ \operatorname{arcsen}(x) \\ \operatorname{arctg}(x) \end{cases}$$

efectuaremos el cambio

$$t = h(x).$$

Nota. Una integral del tipo $\int \mathbf{R}(e^x)\ dx$ también se puede resolver utilizando el método anterior.

Ejemplos 29.

1) Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x - 1}\ dx.$

Se trata de la integral de una expresión del tipo $\mathbf{R}(e^x)$ y por lo tanto tomaremos el cambio $t = e^x$ en el siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x - 1}\ dx = \\
&\quad = \int \frac{e^x + (e^x)^2}{e^x - 1}\ dx = \begin{pmatrix} t = e^x \Rightarrow x = \log(t) \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{pmatrix} = \int \frac{t + t^2}{t-1}\frac{1}{t}dt \\
&\quad = \int \frac{1+t}{t-1}\ dt = \int \left(1 + \frac{2}{t-1}\right)\ dt = t + 2\log(t-1) + C \\
&\quad = \begin{pmatrix} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{pmatrix} = e^x + 2\log(e^x - 1) + C.
\end{aligned}$$

2) Obténgase $\displaystyle\int \frac{1 - 2\operatorname{arcsen}(x) - \operatorname{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}\big(1 + \operatorname{arcsen}^2(x)\big)^2}\ dx$

En la integral anterior aparece una función del tipo $\mathbf{R}(\operatorname{arcsen}(x))$ por lo que haremos el cambio $t = \operatorname{arcsen}(x)$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1 - 2\operatorname{arcsen}(x) - \operatorname{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}\big(1 + \operatorname{arcsen}^2(x)\big)^2}\ dx = \\
&\quad = \begin{pmatrix} t = \operatorname{arcsen}(x) \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \Rightarrow dx = \sqrt{1-x^2}\ dt \end{pmatrix} = \int \frac{1 - 2t - t^2}{\sqrt{1-x^2}(1+t^2)^2}\sqrt{1-x^2}\ dt \\
&\quad = \int \frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)^2}\ dt = \int \left(-\frac{2(t-1)}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\ dt \\
&\quad = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\ dt + 2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\ dt - \int \frac{1}{1+t^2}\ dt \\
&\quad = (t^2+1)^{-1} + 2\left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t)\right) - \operatorname{arctg}(t) + C = \frac{t+1}{t^2+1} + C \\
&\quad = \begin{pmatrix} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{arcsen}(x) + 1}{1 + \operatorname{arcsen}^2(x)} + C.
\end{aligned}$$

3.4.3 Integración de funciones trigonométricas

Ampliación de técnicas de integración. Página 92

Estudiaremos en esta sección el cálculo de integrales del tipo

$$\int \mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x))\ dx,$$

donde la expresión **R** tiene el significado que se indica en la página 105. Para resolver esta integral tenemos tres opciones posibles en función de las propiedades que tenga la expresión **R**:

i) Se dice que la expresión **R** es impar en $\operatorname{sen}(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(\cos(x), -\operatorname{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x)),$$

lo cual se produce generalmente cuando en **R** aparecen potencias impares de $\operatorname{sen}(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \cos(x) = t \Rightarrow x = \arccos(t) \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right.}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}}.$$

Ejemplo 30. Calcúlese $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)\ dx$.

Tenemos la integral de una expresión del tipo

$$\mathbf{R}(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$$

que es impar en $\operatorname{sen}(x)$ (las potencias de $\operatorname{sen}(x)$ que aparecen son impares). Aplicando el cambio anterior conseguimos:

$$\begin{aligned} &\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)\ dx = \\ &\quad = (\cos(x) = t) = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^4 \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^4\ dt \\ &\quad = -\int (1-t^2)t^4\ dt = -\int (t^4 - t^6)\ dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C \\ &\quad = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C. \end{aligned}$$

---

ii) Se dice que la expresión **R** es impar en $\cos(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(-\cos(x), \operatorname{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$$

lo cual se produce generalmente cuando en **R** aparecen potencias impares de $\cos(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(x) = t \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(t) \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right.}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow \boxed{\cos(x) = \sqrt{1-t^2}}.$$

Ejemplo 31. Resolver la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$.

Tenemos que

$$\frac{1}{\cos(x)}$$

es una expresión del tipo $\mathbf{R}(\cos(x), \text{sen}(x))$ impar en $\cos(x)$ (las potencias de $\cos(x)$ que aparecen son impares) y por lo tanto utilizaremos el cambio $\text{sen}(x) = t$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \\
&\quad = (\text{sen}(x) = t) = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&\quad = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}\log(t+1) - \frac{1}{2}\log(t-1) + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c}\text{deshaciendo el}\\ \text{cambio}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\text{sen}(x)+1}{\text{sen}(x)-1}\right) + C.
\end{aligned}$$

iii) Independientemente de que la expresión $\mathbf{R}$ sea par o impar en $\text{sen}(x)$ ó en $\cos(x)$ siempre podremos aplicar el siguiente cambio que se denomina usualmente **cambio general**

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\text{arctg}(t) \\ \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right.}$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales, de las ecuaciones del cambio se deducen las siguientes expresiones para $\cos(x)$ y $\text{sen}(x)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \\ \boxed{\text{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}} \end{array}\right.$$

Ejemplo 32. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)+2\text{sen}(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\cos(x)+2\text{sen}(x)}\,dx \\
&\quad = \left(t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2+4t}\frac{2dt}{1+t^2} \\
&\quad = \int \frac{2dt}{2+4t} = \int \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\log(1+2t) + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c}\text{deshaciendo el}\\ \text{cambio}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

3.4.4 El área como integral definida

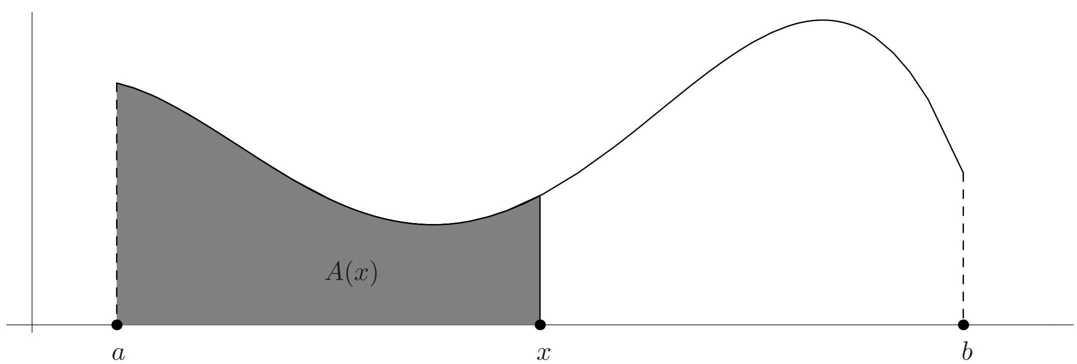
Ampliación del cálculo del área a partir de la integral definida. Página 94

En el apartado 3.3.1 expusimos como, a partir de la integral definida, podemos calcular el área de una región plana. Nos disponemos ahora a demostrar aquel resultado.

La definición del concepto de área ha constituido un problema de envergadura a lo largo de la historia de las matemáticas. Nosotros no profundizaremos en el aspecto matemático de esa cuestión y nos contentaremos con admitir que existen ciertos subconjuntos, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, a los cuales se les puede asociar un número, área(A), que llamaremos área verificando las siguientes propiedades:

- El área del recinto encerrado por un rectángulo cuyos lados miden l_1 y l_2 es el producto $l_1 \cdot l_2$.
- Si $A \subseteq B$, área$(A) \leq$ área(B).
- Si $A \cap B = \emptyset$, área$(A \cup B) =$ área$(A) +$ área(B).

Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en las mismas condiciones del apartado *i)* de la **Definición 17**. Admitiremos que la función $f(x)$ es positiva en todo el intervalo (a, b). Para cada punto $x \in (a, b)$, llamemos $A(x)$ al área encerrada por la función y las rectas verticales que pasan por el punto inicial a y por x.



Es evidente que para cada valor de $x \in [a, b)$, el área $A(x)$ será diferente, además, podemos aceptar que $A(a) = 0$ ya que cuando $x = a$ la anchura de la banda considerada será nula y que $A(b)$ es el área total sobre el tramo (a, b). En definitiva, A es una función que depende de x definida en el intervalo $[a, b]$,

$$\begin{aligned} A : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ A(x) &= \text{área encerrada por } f \text{ en el tramo } [a, x]. \end{aligned}$$

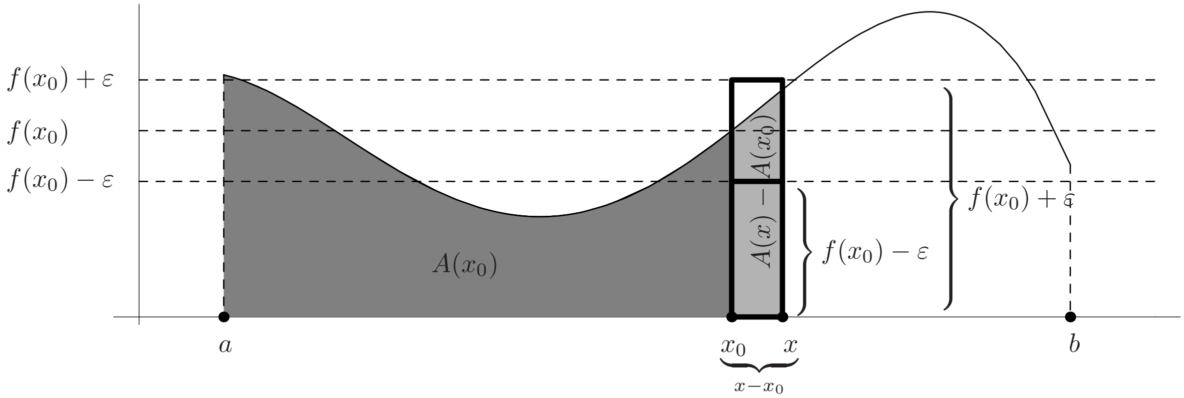
Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto. Para ello, debemos estudiar el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$

Puesto que la función f es continua, tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Entonces, elegido $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, es posible encontrar un tramo a izquierda y derecha de x_0, digamos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, en el que los valores de la función no se salen de la banda marcada por el intervalo $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Tomemos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dentro de ese tramo y observemos la gráfica correspondiente,



Es evidente que $A(x_0)$ es el área del tramo de la gráfica con sombreado más oscuro. Por su lado, $A(x)$ corresponde al área del tramo oscuro junto con el área del tramo sombreado en color más claro. La diferencia entre $A(x)$ y $A(x_0)$ es justamente ese tramo sombreado en color claro que por tanto tendrá área igual a $A(x)-A(x_0)$. Es inmediato que dicho tramo está contenido en el rectángulo de base el intervalo (x_0,x) y de altura $f(x_0)+\varepsilon$ y que al mismo tiempo contiene al rectángulo con base (x_0,x) y altura $f(x_0)-\varepsilon$. Aplicando las propiedades que antes hemos fijado para el área tendremos que

$$\text{área}\begin{pmatrix}\text{rectángulo de}\\ \text{base } (x_0,x) \text{ y}\\ \text{altura } f(x_0)-\varepsilon\end{pmatrix} \leq \text{área}\begin{pmatrix}\text{zona de}\\ \text{sombreado}\\ \text{claro}\end{pmatrix} \leq \text{área}\begin{pmatrix}\text{rectángulo de}\\ \text{base } (x_0,x) \text{ y}\\ \text{altura } f(x_0)+\varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0) \leq A(x)-A(x_0) \leq (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0)-\varepsilon \leq \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)+\varepsilon.$$

Puesto que esta misma demostración es válida para ε tan pequeño como deseemos, no es difícil deducir de aquí que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

Puesto que x_0 es cualquier punto de $[a,b]$, obtenemos dos conclusiones:

- La función $A(x)$, que mide al área en el tramo desde el punto a hasta el punto x, es derivable en $[a,b]$.
- La derivada de la función $A(x)$ es

$$A'(x) = f(x),\ x \in [a,b].$$

Por tanto, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Si aplicamos la **Definición 17**, sabemos que

$$\int_a^x f(x)dx = A(x)-A(a).$$

Puesto que $A(a)=0$ finalmente deducimos que

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx$$

y la integral definida entre dos puntos proporciona el área encerrada por la función sobre el intervalo determinado por ellos.

Con ello hemos demostrado la propiedad que expusimos en el apartado 3.3.1:

Propiedad 33. *Dada la función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 17***, el área comprendida entre el eje $y=0$, las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ y la gráfica de la función f se calcula mediante la integral definida*

$$\int_a^b f(x)dx$$

de modo que si f es positiva en (a,b) dicha integral proporcionará el área con signo positivo y si f es negativa lo hará con signo negativo.

3.4.5 El interés variable compuesto continuamente

Ampliación de las aplicaciones de la integral definida. Página 99

En el apartado 3.3.1 expusimos cuál era la fórmula para calcular la función $P(t)$ que arroja el capital acumulado hasta el año t, suponiendo que tenemos cierto capital inicial P_0 en una cuenta que abona un interés variable $I(t)$ (en tantos por uno) en cada año t. Pretendemos ahora demostrar dicha fórmula.

Para comenzar, estudiaremos la relación que existe entre la función de capital $P(t)$ y la función de interés $I(t)$. Para ello, preguntémonos primero que interpretación tendría $P'(t)$. Sabemos que $P'(t)$ será la velocidad de crecimiento en el siguiente sentido

$$\left.\begin{array}{l} P(t) = \text{capital acumulado en euros} \\ t = \text{año} \end{array}\right\} \Rightarrow P'(t) = \text{ velocidad de crecimiento en } \frac{\text{euros}}{\text{año}}.$$

Por tanto, $P'(t)$ indica cuántos euros crece el capital en cuenta por año cuando estamos en el año t. Podemos deducir entonces que justamente en el año t el incremento de capital que recibiremos en la cuenta debido a los intereses será justamente $P'(t)$. De este modo,

- Capital en la cuenta en el año t: $P(t)$.
- Cantidad ingresada por intereses en el año t: $P'(t)$.

Pero si conocemos el capital en cuenta y la cantidad ingresada por intereses, es fácil calcular el tipo de interés según la fórmula,

$$\text{Tipo de interes en tanto por uno } = \frac{\text{capital ingresado por intereses}}{\text{capital inicial}}$$

En consecuencia,

$$\text{Interés recibido en el año } t = \frac{\text{capital ingresado por intereses en el año } t}{\text{capital inicial en el año } t} = \frac{P'(t)}{P(t)}.$$

Ahora bien, el interés recibido en el año t es $I(t)$ así que finalmente tenemos

$$\boxed{I(t) = \tfrac{P'(t)}{P(t)}}. \tag{3.3}$$

Esta última fórmula nos permitiría calcular la función $I(t)$ fácilmente a partir de la función de capital $P(t)$. Sin embargo, si lo que conocemos es la función de interés $I(t)$, para calcular el capital $P(t)$ deberemos recurrir a la integral definida como veremos a continuación.

Es sencillo aplicar la regla de la cadena para comprobar que

$$(\log(P(t)))' = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

con lo que, empleando (3.3),

$$(\log(P(t)))' = I(t).$$

Supongamos que sabemos que en un instante inicial t_0, el capital en cuenta es P_0 (es decir, $P(t_0) = P_0$). Si ahora calculamos la integral definida entre t_0 y t, en la expresión anterior tendremos

$$\int_{t_0}^{t} (\log(P(t)))'\, dt = \int_{t_0}^{t} I(t)dt$$

y empleando el apartado *ii)* de la **Propiedad 18** obtenemos

$$\log(P(t)) - \log(P(t_0)) = \int_{t_0}^{t} I(t)dt.$$

Pretendemos despejar $P(t)$ así que tomaremos el número e elevado a ambos miembros de la igualdad en la forma

$$\underbrace{e^{\log(P(t))-\log(P(t_0))}}_{= \frac{e^{\log(P(t))}}{e^{\log(P(t_0))}} = \frac{P(t)}{P(t_0)}} = e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}$$

y puesto que $P(t_0) = P_0$ llegamos a que

$$\frac{P(t)}{P_0} = e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt},$$

de donde finalmente obtenemos

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}},$$

que es la fórmula para el capital sujeto a un interés compuesto continuamente, variable, $I(t)$, (en tanto por uno) cuando el capital en el año inicial t_0 es P_0.