# Capítulo 2

# Derivación de Funciones

La derivada es la formalización matemática del concepto de velocidad. Puesto que utilizamos funciones para representar fenómenos que evolucionan con respecto al tiempo, la derivada será fundamental para analizar distintos aspectos de esos fenómenos. En este tema exponemos los aspectos fundamentales del cálculo diferencial.

## 2.1 Concepto de derivada

El modelo que ofrece una visión más clara del significado de la derivadas es probablemente el modelo físico de la velocidad de un cuerpo. Supongamos que nos desplazamos desde la ciudad A hasta la B utilizando un automóvil. Llamaremos $e(t)$ a la cantidad de kilómetros que hemos recorrido durante las primeras $t$ horas. Si nuestro viaje viaje dura $b$ horas, para cada instante de tiempo, $t$, entre 0 y $b$, dispondremos de un valor para la función $e$. Dicho de otro modo, tenemos una función

$$\begin{array}{rcl} e:[0,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e(t)= \text{ Kilómetros recorridos hasta la hora } t \end{array}$$

Tomemos un instante $t_0$ y supongamos que a partir de la información que proporciona la función $e$ pretendemos calcular la velocidad a la que circulábamos justo en ese instante $t_0$. Si realizamos el calculo

$$\frac{e(b)-e(t_0)}{b-t_0}$$

obtendremos la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_0, b]$. Pero esto no nos proporciona el dato que buscamos ya que durante ese espacio de tiempo la velocidad no ha sido constante. Podríamos tomar como referencia un período menor, digamos desde $t_0$ hasta cierto momento posterior, $t$. Sin embargo, por muy próximo que tomemos $t$ a $t_0$, el cociente

$$\frac{e(t)-e(t_0)}{t-t_0}$$

no será más que la media de las velocidades en el intervalo $(t_0, t)$ que a lo sumo nos servirá para aproximar el valor del dato exacto que buscamos. En realidad, a medida que $t$ se aproxima a $t_0$ obtenemos respuestas cada vez más próximas a la real pero nunca exactas. La respuesta correcta la obtendríamos si pudiéramos tomar $t_0$ igual a $t$ de modo que el intervalo de referencia $(t_0, t)$ no introdujera errores. Es evidente que esto último no es posible pero, en su lugar, podemos calcular

$$\lim_{t\to t_0}\frac{e(t)-e(t_0)}{t-t_0}.$$

Este límite nos proporciona la velocidad instantánea justo en el instante $t_0$ que queríamos encontrar. Dicho límite es lo que llamaremos derivada de la función $e$ en el punto $t_0$.

Con esta idea en mente veamos ya una definición formal de derivada para una función en un punto.

**Definición 1.** *Dada $f : D \to \mathbb{R}$:*

*i) Diremos que $f$ es derivable en $x_0 \in Ac(D)$ y que su derivada en tal punto es $L \in \mathbb{R}$ si se verifica que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

*En tal caso escribiremos*

$$f'(x_0) = L \quad \text{ó} \quad \frac{df}{dx}(x_0) = L.$$

*Si el límite anterior no existe o es $\pm\infty$, diremos que la función $f$ no es derivable en el punto $x_0$.*

*ii) Dado un subconjunto $H \subseteq D$, decimos que $f$ es derivable en $H$ si es derivable en todos los puntos de $H$. Si $f$ es derivable en $D$ (en todo su dominio) diremos que $f$ es una función derivable.*

*iii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y sea*

$$D_1 = \{x \in D : f \text{ es derivable en } x\}.$$

*Si $D_1 \neq \emptyset$, llamaremos función derivada de la función $f$ a la función*

$$\begin{aligned} f' : D_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}.$$

Pudiera ser que el límite de la derivada no existiera pero que sí dispusiéramos de los límites laterales. Entonces hablaremos de derivadas laterales de la función.

**Definición 2.**

*i) Decimos que la función $f$ es derivable por la izquierda en $x_0$ y que el valor de la derivada por la izquierda de $f$ en $x_0$ es $L \in \mathbb{R}$, si tiene sentido y existe el límite*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

*ii) Decimos que la función $f$ es derivable por la derecha en $x_0$ y que el valor de la derivada por la derecha de $f$ en $x_0$ es $L \in \mathbb{R}$, si tiene sentido y existe el límite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Al igual que sucede para la continuidad, una función podrá ser derivable sólo en aquellos puntos en los que esté definida.

---

**Ejemplo 3.** Sabemos que, dados los números reales $a$ y $b$, una función del tipo

$$f(x) = ax + b$$

es un polinomio de grado 1 que se representa siempre como una recta. Veamos cómo el cálculo de la derivada para una recta se realiza sin mayor dificultad aplicando directamente la definición.

En efecto, tomemos un punto cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$ e intentemos calcular la derivada de la función $f$ en $x_0$, $f'(x_0)$. Según la definición tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a.$$

Por tanto, una recta es siempre una función derivable en todos los puntos y el valor de su derivada es siempre igual al coeficiente que acompaña a la variable, $x$, en la fórmula de la recta. La función derivada será

$$f'(x) = a.$$

Por ejemplo da la recta $f(x) = 10x - 7$ es la función constante

$$f'(x) = 10.$$

---

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, si admitimos que es derivable en $x_0 \in D$ tendremos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}.$$

Pero entonces,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \cdot L = 0$$

De donde

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En otras palabras, tenemos la siguiente:

**Propiedad 4.** *Toda función derivable en un punto es también continua en ese punto.*

### 2.1.1 Interpretaciones de la derivada

Son dos las interpretaciones fundamentales del concepto de derivada. La primera, como la velocidad de variación de cierta magnitud, ya ha sido anunciada en el ejemplo introductorio. La segunda interpretación que veremos es de tipo geométrico.

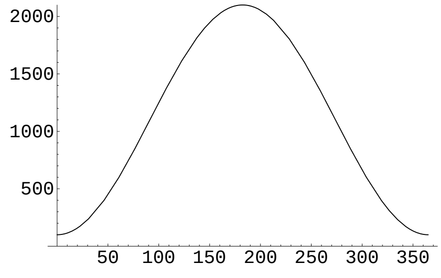
**La derivada como velocidad de variación:** La derivada de una función en un punto es la velocidad de variación de la función en ese punto. Ya hemos justificado esta interpretación en el ejemplo inicial del modelo físico. Veremos a continuación dos modelos en los que la derivada se interpreta nuevamente como la velocidad de crecimiento de cierta magnitud representada por una función.

---

**Ejemplos 5.**
**1)** La cantidad de empleados de cierta empresa viene dada, en función del número de días pasados desde el comienzo del año, por la función:

$$\begin{array}{c} f : [0, 365] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 1100 - 1000 \cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right) \end{array}.$$

La gráfica correspondiente es,



Sabemos que la derivada de la función $f$ es la velocidad de variación de $f(x)$ con respecto a $x$. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \text{número de empleados} \\ x = \text{días} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{\text{empleados}}{\text{día}}.$$

Por tanto, $f'(x)$ es la variación de empleados (contratos o despidos) por día en el día $x$.

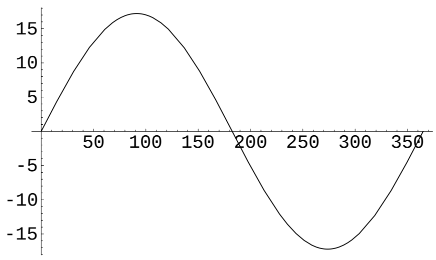
La función derivada de $f$ es

$$f'(x) = \frac{400}{73}\pi \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right).$$

Entonces, por ejemplo:

- $f'(50) = 13.0536 \Rightarrow$ En el día $x = 50$, la velocidad de contratación fue de 13.0536 empleados/día. Por tanto en el día 50 se contrataron aproximadamente 13.0536 empleados.
- $f'(182) = 0.148163 \Rightarrow$ En el día $x = 182$, la velocidad de contratación fue de 0.148163 empleados/día. Por tanto el día 182 se contrataron aproximadamente 0.148163 empleados.
- $f'(260) = -16.7342 \Rightarrow$ En el día $x = 260$, la velocidad de contratación fue de $-16.7342$ empleados/día. Por tanto el día 260 se produjeron aproximadamente 16.7342 despidos.

La gráfica de la función derivada nos permite tener una idea de la evolución del número de empleados contratados diariamente:




Véase que durante los primeros 182 días, la función derivada $f'(x)$ que mide las contrataciones diarias es positiva lo cual implica que cada día se realizan nuevos contratos y en consecuencia observamos que la función $f(x)$ es creciente en ese mismo período. Al mismo tiempo a partir del día 182 la función de contrataciones diarias dada por la derivada $f'(x)$ es negativa lo que supone que en ese espacio de tiempo se realizan despidos y podemos ver que en ese mismo tramo la función $f(x)$ es decreciente.

**2)** Al realizar el estudio de la actividad de un negocio es habitual estudiar lo que se denomina función de costos que mide el coste necesario para producir una cierta cantidad de unidades.

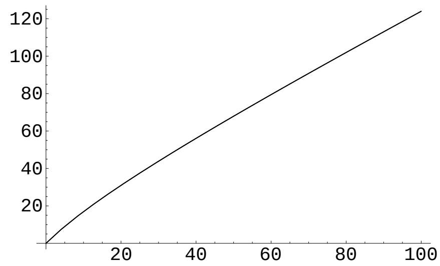
Supongamos que en una empresa que produce componentes electrónicos se tiene la siguiente función de costos (medida en euros):

$$C(x) = x + 10\log\left(\frac{x+10}{10}\right).$$

En tal caso:

- Para producir $x = 10$ unidades el costo será de $C(10) = 16.9315$ euros.
- Para producir $x = 20$ unidades el costo será de $C(20) = 30.9861$ euros.

La gráfica de la función de costos es




Si calculamos la derivada de la función $C(x)$ obtendremos la velocidad de variación del coste con respecto a la cantidad de unidades producidas:

$$\left.\begin{array}{l} C(x) = \text{coste de producción en euros} \\ x = \text{unidades} \end{array}\right\} \Rightarrow C'(x) = \frac{\text{coste en euros}}{\text{unidad}} = \frac{\text{euros}}{\text{unidad}}.$$

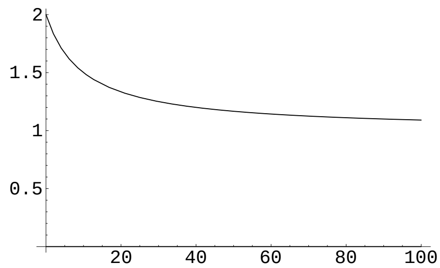
Es decir, $C'(x)$ es el coste por unidad (lo que cuesta fabricar una unidad) cuando llevamos producidas $x$ unidades. Tenemos que

$$C'(x) = \frac{x+20}{x+10},$$

así que:

- El coste por unidad cuando hemos producido 10 unidades es $C'(10) = 1.5$ euros/unidad.
- El coste por unidad cuando hemos producido 20 unidades es $C'(20) = 1.33$ euros/unidad.

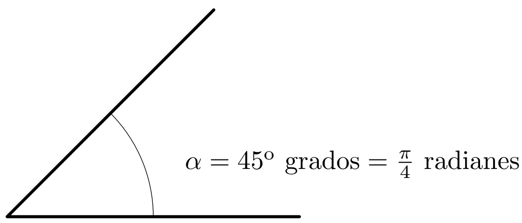
La derivada $C'(x)$ se denomina coste marginal. En nuestro caso la gráfica de costes marginales es:




Se observa que el precio por unidad cuando la producción es muy baja se aproxima a 2 euros y a medida que aumenta la producción se reduce hasta 1 euro.

---

**Interpretación geométrica de la derivada:** Habitualmente un ángulo se mide en grados sexagesimales o en radianes. Así por ejemplo, en la gráfica siguiente observamos un ángulo de $45^0$ o lo que es lo mismo de $\frac{\pi}{4}$ radianes:




Sin embargo en diferentes ocasiones se emplea el concepto de pendiente para indicar o medir el valor de una ángulo. Veamos su definición:

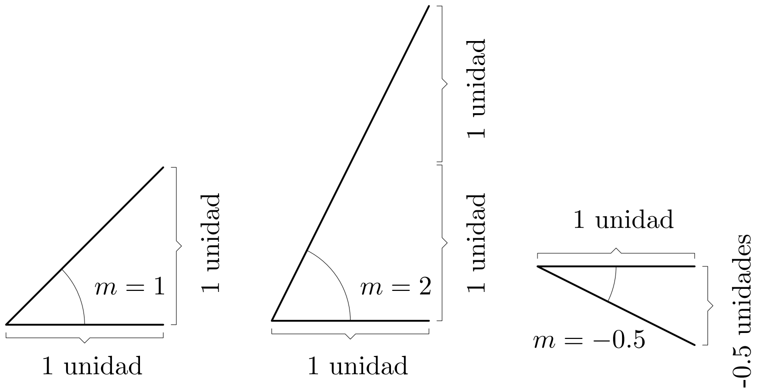
**Definición 6.** *Dado el ángulo $\alpha$, llamamos pendiente de $\alpha$ al número*

$$m = \tan(\alpha).$$

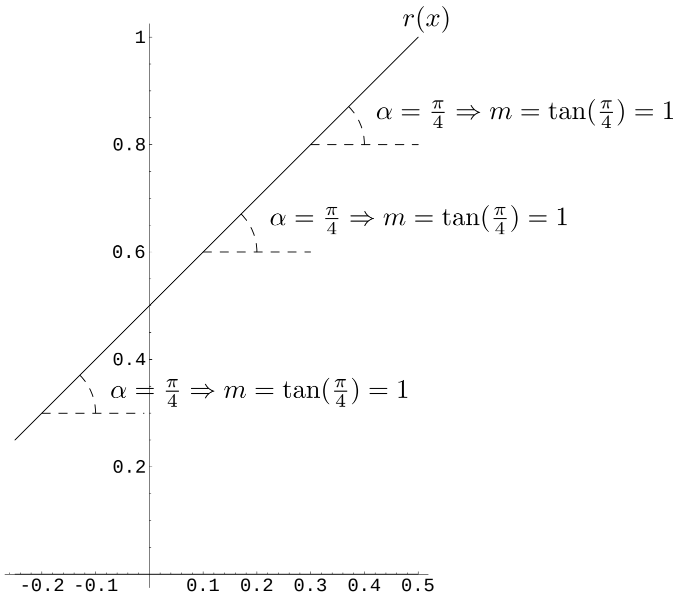
De este modo, la pendiente del ángulo de la gráfica será

$$m = \tan(45^o) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

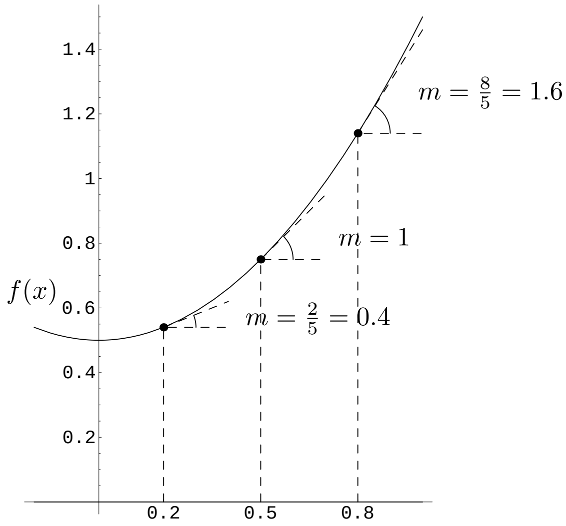
De forma más intuitiva, la pendiente de un ángulo nos indica las unidades que ascendemos por cada unidad que avanzamos si seguimos la dirección de ese ángulo. Por ejemplo, representamos a continuación los ángulos con pendientes $m = 1$, $m = 2$ y $m = -0.5$.




Si consideramos una recta, por ejemplo la función $r(x) = x + 1$, podemos también calcular el ángulo que forma esa recta con la horizontal y su pendiente. Además es evidente que ese ángulo será el mismo en cualquier punto de la recta:




En cambio, si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera $f(x)$, podemos comprobar que, en cada punto, el ángulo que forma la función con la horizontal es diferente y por tanto tendremos también una pendiente diferente en cada punto. En la siguiente gráfica observamos cómo la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ tiene pendientes diferentes en distintos puntos:




Un razonamiento similar al que hemos realizado al inicio del tema permite demostrar que la pendiente del ángulo que forma la función con la horizontal en cada punto es igual al valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir, si $f$ es derivable en $x_0$ tendremos,

$$\text{pendiente de } f \text{ en } x_0 = f'(x_0).$$

No es difícil comprobar que para la función del ejemplo anterior la derivada es

$$f'(x) = 2x.$$

En la gráfica observamos la pendiente de la función en los puntos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.5$ y $x_3 = 0.8$. Si calculamos la derivada en esos puntos comprobaremos que, en cada caso, coincide con la pendiente que vemos en la gráfica:

$$f'(0.2) = 0.4, \quad f'(0.5) = 1, \quad f'(0.8) = 1.6.$$

Si consideramos una recta cualquiera,

$$f(x) = ax + b,$$

sabemos que tiene la misma pendiente en todos los puntos y de hecho, si calculamos su derivada, observamos que tiene siempre el mismo valor,

$$f'(x) = a$$

que es la pendiente de la recta. De este modo, observamos directamente que la pendiente de cualquier recta es el coeficiente, $a$ que acompaña a la variable $x$ en la fórmula de la recta.

---

**Ejemplo 7.** La pendiente de la recta $f(x) = 3x - 10$ es $m = 3$ ya que el coeficiente que acompaña a la variable, $x$, es precisamente 3. De otro modo tenemos también que $f'(x) = 3$.

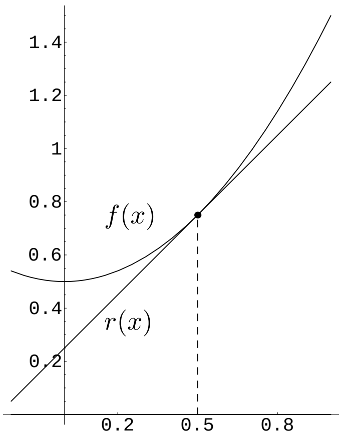
---

Se llama recta tangente a una función $f$ en el punto $x_0$ a la recta que en el punto $x_0$ toma el mismo valor y tiene la misma pendiente que $f$. Dicho de otro modo la recta tangente es aquella que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ en la misma dirección que $f$. Puesto que sabemos que la pendiente de $f$ en $x_0$ es $f'(x_0)$, es fácil comprobar que la ecuación de la recta tangente es

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Por ejemplo, la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ en el punto $x_0 = 0.5$ será

$$r(x) = f(0.5) + f'(0.5)(x - 0.5) \Rightarrow r(x) = 0.75 + 1 \cdot (x - 0.5) \Rightarrow r(x) = x + 0.25.$$




## 2.2 Calculo de derivadas

De la misma manera que hicimos en el caso de los límites, utilizaremos las propiedades de la derivada respecto de las operaciones algebraicas para poder realizar cálculos sin tener que acudir a la evaluación del límite de la definición de derivada.

**Propiedades 8.** *Sean $f$ y $g$ funciones reales de variable real. Entonces*

- *Si $f$ y $g$ son derivables en $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*
  1. *$f+g$ es derivable en $x$ y*
  $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$
  2. *$k \cdot f$ es derivable en $x$ para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$ y*
  $$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x).$$
  3. *$f \cdot g$ es derivable en $x$ y*
  $$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
  4. *Si $g(x) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $x$ y*
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$
- *(Regla de la cadena) Si $f$ es derivable en $x$ y $g$ es derivable en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es derivable en $x$ y se verifica que:*
  $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$
  *A la fórmula anterior se la conoce como regla de la cadena.*
- *(Teorema de la función inversa) Si $f$ es derivable en $x$, biyectiva sobre su imagen y verifica que $f'(x) \neq 0$ entonces la función inversa de $f$, $f^{-1}$, es derivable en $y = f(x)$ y se verifica que*
  $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, toda función que se obtenga por composición u operación de funciones derivables será una función derivable. Lo que necesitamos ahora es un repertorio amplio de funciones derivables a partir de las cuales podamos generar otras mediante operación o composición que también lo sean. En realidad la lista de funciones elementales del capítulo anterior nos servirá para este propósito ya que todas ellas son también (con las debidas salvedades) derivables. A continuación recogemos esas funciones elementales con una descripción de las propiedades de derivabilidad de cada una:

1. Dado $k \in \mathbb{R}$ y $f(x) = k$ (función constante), $f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ es derivable en todos los puntos en los que está definida su función derivada,
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$
3. $(e^x)'(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Para $a > 0$, $(a^x)'(x) = \log(a) \cdot a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
5. $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
6. Para $a \neq 1$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\log(a)} \cdot \dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
7. $(\cos)'(x) = -\mathrm{sen}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
8. $(\mathrm{sen})'(x) = \cos(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
9. $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
10. $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)$.
11. $(\mathrm{arcsen})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)$.
12. $(\mathrm{arctg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

### 2.2.1 Derivación de funciones definidas a trozos

Con lo anterior, podemos estudiar la derivada de funciones elementales u obtenidas por operación o composición de ellas. Queda pendiente el caso de las funciones definidas a trozos. Al igual que para estudiar la continuidad, el estudio y cálculo de la derivada de este tipo de funciones se hace también en dos pasos analizando primero el interior de los intervalos donde actúa cada fórmula y después los puntos de cambio de definición.

Dada
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } a_1 \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_2, \\ f_2(x) & \text{si } a_2 \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_3, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ f_{k-1}(x) & \text{si } a_{k-1} \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_k, \end{cases}$$
estudiaremos su derivada en los siguientes pasos:

**1)** <u>En el interior de los intervalos de definición</u>: Si las funciones $f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x)$ son respectivamente derivables en los intervalos $(a_1, a_2),\ (a_2, a_3), \ldots, (a_{k-1}, a_k)$, entonces $f(x)$ será derivable en esos intervalos y su derivada será
$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) & \text{si } a_1 < x < a_2, \\ f_2'(x) & \text{si } a_2 < x < a_3, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ f_{k-1}'(x) & \text{si } a_{k-1} < x < a_k. \end{cases}$$

Véase que en todos los casos escribimos "<" y nunca "≤" ya que en este primer paso analizamos únicamente el interior de los intervalos de definición dejando los puntos de cambio de definición para el siguiente paso.

**2)** En los puntos de cambio de definición: Los puntos de cambió de definición son $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$. En cada uno de ellos, $a_i$, $i = 2, 3, \ldots, k-1$, la función $f(x)$ será derivable si se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) $f(x)$ es continua en $a_i$,

b) existe el límite $\lim_{x\to a_i} f'(x)$ y es un número real (empleamos aquí $f'(x)$ tal y como ha sido calculada previamente en el punto **1)**).

Si se cumplen ambas condiciones entonces, además, tendremos que

$$f'(a_i) = \lim_{x\to a_i} f'(x).$$

Si tal límite no existe o toma valor $\pm\infty$, o si $f(x)$ no es continua en $a_i$, entonces $f(x)$ no es derivable en $a_i$.

---

**Ejemplo 9.** Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \cos(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x. \end{cases}$$

Calculamos la derivada de esta función siguiendo los dos pasos antes expuestos.

**1)** En el interior de los intervalos de definición $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ la función $f(x)$ viene respectivamente determinada por las funciones $e^x$, $\cos(x)$ y $x - \frac{\pi}{2}$, todas ellas funciones elementales y derivables. Por tanto, en esos intervalos calculamos la derivada de $f(x)$ simplemente derivando la fórmula correspondiente:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x < 0, \\ -\mathrm{sen}(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

**2)** Estudiamos ahora los puntos de definición $x_0 = 0$ y $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{x_0 = 0}$ Veamos las dos condiciones requeridas:

1. Continuidad de $f(x)$ en $x_0 = 0$: tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = e^0 - 0 = 1, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x - x = e^0 - 0 = 1, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x_0 = 0.$$

2. Límite de $f'(x)$ en $x_0 = 0$: utilizando las fórmulas que hemos obtenido en el paso **1)** para $f'(x)$,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x - 1 = e^0 - 1 = 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Por tanto $f(x)$ es derivable en $x_0 = 0$ con

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

$\boxed{x_0 = \frac{\pi}{2}}$ Procedemos ahora igual que antes.

1. Continuidad de $f(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Límite de $f'(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -\text{sen}(x) = -\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = -1, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no hay } \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f'(x).$$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

---

## 2.3 Derivación y propiedades de forma de una función

En la **Definicion 8** del Capítulo 1 presentábamos varias propiedades que afectan al aspecto de la representación gráfica de una función. Eran lo que llamamos propiedades de forma de la función. En esta sección añadiremos algunas propiedades de forma más y estudiaremos técnicas que permiten determinar cuáles de ellas verifica una función. Recordemos también que las propiedades de forma tienen carácter local con lo que es necesario determinar en qué intervalos se cumplen.

**Definición 10.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $H \subseteq D$. Entonces:*

- *Decimos que $f$ es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante) en $H$ si $f|_H$ es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante).*

- *Decimos que $f$ tiene un máximo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*

$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in D.$$

- *Decimos que $f$ tiene un mínimo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in D.$$

- *Decimos que $f$ tiene un máximo local en el punto $x_0 \in D$ si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, tales que*

$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in D \cap (a, b).$$

  *Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto $x_0$ (la desigualdad se verifica no sólo para $\geq$ sino también para $>$), diremos que $f$ tiene un máximo local estricto en $x_0$.*

- *Decimos que $f$ tiene un mínimo local en el punto $x_0 \in D$ si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, tales que*

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in D \cap (a, b).$$

  *Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto $x_0$ (la desigualdad se verifica no sólo para $\leq$ sino también para $<$), diremos que $f$ tiene un mínimo local estricto en $x_0$.*

- *Decimos que $f$ es convexa en $H$ si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

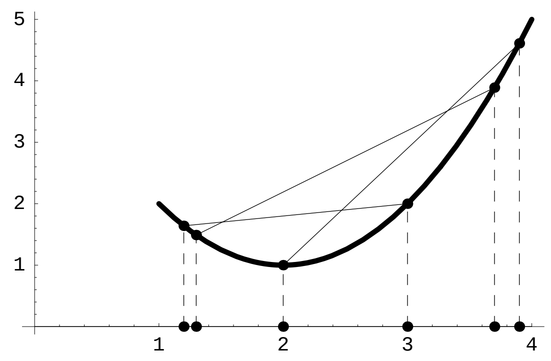
$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)), \ \forall x \in H \cap (a, b),$$

*es decir, si se tiene que dentro del conjunto $H$, $f$ está por debajo del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.*

*Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\leq$ sino además con $<$) entonces diremos que $f$ es estrictamente convexa en $H$.*

---

**Ejemplo 11.** La ecuación $r(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$ es la de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por tanto, una función es convexa si la recta que une dos puntos de su gráfica está siempre por encima de la función. En la gráfica siguiente representamos una función convexa. Puede observarse como independientemente de la elección que hagamos para los puntos $a$ y $b$, la recta que los une está siempre por encima de la función.




---

- *Decimos que $f$ es cóncava en $H$ si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

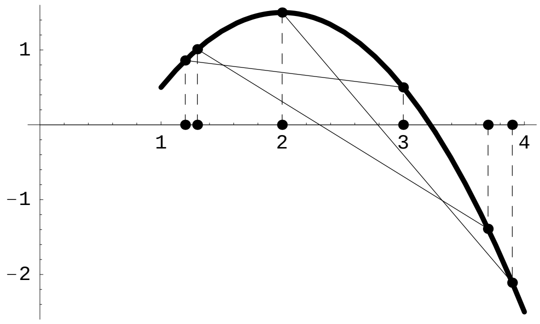
$$f(x) \geq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)), \ \forall x \in H \cap (a, b),$$

*es decir, si se tiene que dentro del conjunto $H$, $f$ está por encima del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.*

*Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\geq$ sino además con $>$) entonces diremos que $f$ es estrictamente cóncava en $H$.*

---

**Ejemplo 12.** En el caso de la concavidad se exige que la recta que une dos puntos sobre la gráfica de la función esté por debajo de la función ($f(x) \geq r(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$). La situación gráfica es ahora




---

- *Decimos que $f$ tiene un punto de inflexión en $x_0 \in D$ si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

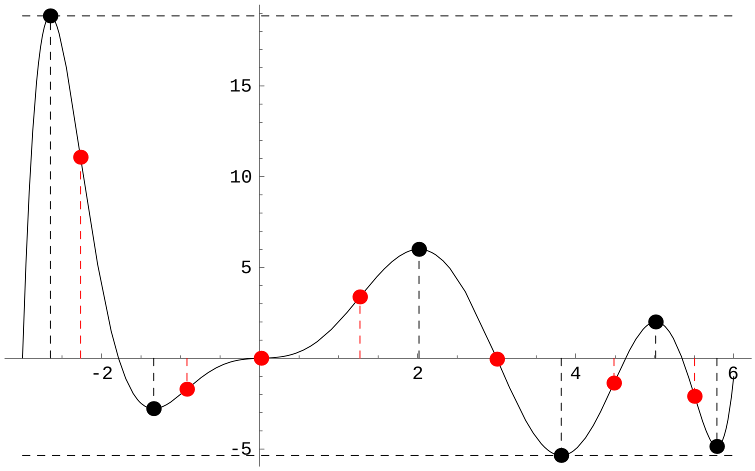
  **a)** *$f$ es estrictamente cóncava en $(a, x_0] \cap D$ y es estrictamente convexa en $[x_0, b) \cap D$.*

  **b)** *$f$ es estrictamente convexa en $(a, x_0] \cap D$ y es estrictamente cóncava en $[x_0, b) \cap D$.*

---

**Ejemplo 13.**

En la siguiente imagen representamos la gráfica de una función $f : [-3, 6] \to \mathbb{R}$.




Hemos marcado en la gráfica en color negro los puntos en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos y en color sombreado los puntos de inflexión. Es evidente que:

- Entre dos máximos/mínimos relativos siempre hay un intervalo en el que la función es monótona (es decir, en el que es creciente o decreciente). Dichos intervalos son lo que se denominan intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Entre cada dos puntos de inflexión, la función es o bien cóncava o bien convexa. Es decir, los puntos de inflexión separan los diferentes intervalos de convexidad y concavidad.

La propiedades de forma que verifica una función en cada intervalo dependerán de los signos de sus derivadas . Entra en juego aquí el concepto de derivada sucesiva de una función que definimos a continuación.

**Definición 14.**

*Sea una función real, $f : D \to \mathbb{R}$. Entonces:*

**a)** *Definimos la función derivada primera de $f$ como la función derivada de $f$.*

**b)** *Dado $n \in \mathbb{N}$, si la función derivada $n$-ésima de $f$ está definida y es derivable en algún punto, definimos la función derivada $(n+1)$-ésima de $f$ como la función derivada de la función derivada $n$-ésima de $f$.*

*Si está definida, notaremos a la función derivada $n$-ésima de $f$ como*

$$f^{n)} \qquad \acute{o} \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

*Si, para $n \in \mathbb{N}$, la función $f^{n)}$ está definida en el punto $x_0 \in D$, diremos que la función $f$ es $n$ veces derivable en $x_0$ y notamos al valor de la derivada $n$-ésima en tal punto como*

$$f^{n)}(x_0), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \quad \acute{o} \quad \frac{d^n f}{dx^n}|_{x_0}.$$

Se suele aceptar que la derivada 0-ésima de una función es la propia función, es decir,

$$f^{0)} = f.$$

Las funciones derivada primera, segunda y tercera se suelen designar mediante $f'$, $f''$ y $f'''$, en lugar de $f^{1)}$, $f^{2)}$ y $f^{3)}$.

**Definición 15.** *Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$, diremos que $f$ es de clase $C^n$ en $D$ si se cumple las dos condiciones siguientes:*

1. *La función $f^{n)}$ está definida en todo $D$.*
2. *La función $f^{n)}$ es continua en $D$.*

*El conjunto de todas las funciones de clase $C^n$ en $D$ se denota mediante $C^n(D)$.*

Dado $D \subseteq \mathbb{R}$ se denota mediante $C^0(D)$ o simplemente $C(D)$ al conjunto de todas las funciones continuas en $D$. Así mismo, una función que es de clase $C^n$ en $D$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una función de clase $C^\infty$ en $D$. El conjunto de todas las funciones de clase $C^\infty$ en $D$ se denota mediante $C^\infty(D)$.

Veamos a continuación los criterios que permiten discernir cuáles de las propiedades de forma verifica una función y dónde las verifica. Como hemos indicado antes, dependerán de los signos de las tres primeras derivadas de la función.

**Propiedades 16.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sea un intervalo $I = (a, b) \subseteq D$ y $x_0 \in (a, b)$. Se verifica que:*

**i)** *Si $f$ es derivable en $I$ se tiene que:*

1. *Si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, entonces $f$ es creciente en $I$.*
2. *Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, entonces $f$ es estrictamente creciente en $I$.*
3. *Si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, entonces $f$ es decreciente en $I$.*
4. *Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, entonces $f$ es estrictamente decreciente en $I$.*

*5. Si $f'(x) = 0,\ \forall x \in I$, entonces $f$ es una función constante en $I$.*

**ii)** *Si $f$ es derivable en $x_0$ y $f$ tiene un máximo o un mínimo local en $x_0$ entonces $f'(x_0) = 0$.*

**iii)** *Si $f$ es de clase $C^2$ en $I$ y $f'(x_0) = 0$ entonces:*

*1. Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f$ tiene un mínimo local estricto en $x_0$.*
*2. Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f$ tiene un máximo local estricto en $x_0$.*

**iv)** *Si dado $n \in \mathbb{N}$, $f$ es de clase $C^n$ y se cumple que*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-2)}(x_0) = f^{n-1)}(x_0) = 0$$

*y que*

$$f^{n)}(x_0) \neq 0,$$

*entonces:*

*1. Si $f^{n)}(x_0) > 0$ y $n$ es par entonces $x_0$ es un mínimo local estricto de $f$.*
*2. Si $f^{n)}(x_0) < 0$ y $n$ es par entonces $x_0$ es un máximo local estricto de $f$.*
*3. Si $n$ es impar entonces $f$ no tiene máximo ni mínimo local en $x_0$.*

**v)** *Si $f$ es de clase $C^2$ en $I$ entonces:*

*1. Si $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in I$ entonces $f$ es convexa en $I$.*
*2. Si $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$ entonces $f$ es estrictamente convexa en $I$.*
*3. Si $f''(x) \leq 0,\ \forall x \in I$ entonces $f$ es cóncava en $I$.*
*4. Si $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$ entonces $f$ es estrictamente cóncava en $I$.*

**vi)** *Si $f$ es de clase $C^2$ en $I$ y $x_0$ es un punto de inflexión de $f$ entonces*

$$f''(x_0) = 0.$$

**vii)** *Si $f$ es de clase $C^3$ en $I$ y se verifica que*

$$f''(x_0) = 0 \qquad y \qquad f'''(x_0) \neq 0$$

*entonces $x_0$ es un punto de inflexión de $f$.*

---

**Ejemplo 17.** Determinemos las propiedades de forma de la función

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 18x + 1.$$

Para ello comenzamos averiguando cuándo se anula la primera derivada:

$$f'(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{cases}.$$

La función $f'(x)$ es un polinomio y por ello es continua en $\mathbb{R}$. Si comprobamos el signo del valor de $f'(x)$ en puntos cualesquiera de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, 6)$ y $(6, \infty)$, una aplicación directa del Teorema de Bolzano nos lleva a la conclusión de que estos signos determinarán el del resto de los puntos de cada intervalo. En definitiva, llegamos a que

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, -1). \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1, 3). \\ f'(x) < 0,\ \forall x \in (3, 6). \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (6, +\infty). \end{array}}$$

Para determinar los intervalos de convexidad y concavidad calculamos la segunda derivada,

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 9.$$

En este caso,

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right) \approx 0.639. \\ \\ x = \frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right) \approx 4.694. \end{cases}$$

y razonando como antes,

$$\boxed{\begin{array}{l} f''(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right). \\ f''(x) < 0,\ \forall x \in \left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right), \frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right). \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right), \infty). \\ \text{En particular, } f(-1) > 0,\ f(3) < 0 \text{ y } f(6) > 0. \end{array}}$$

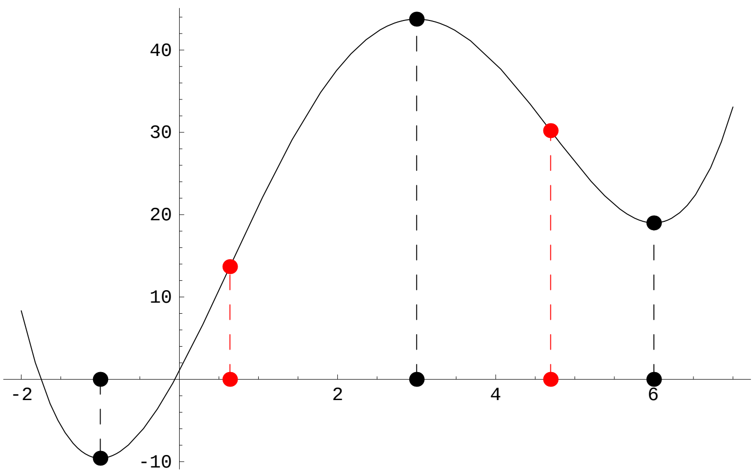
Finalmente, tenemos que $f'''(x) = 6x - 16$ con lo que

$$\boxed{f'''\left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right) \neq 0 \text{ y } f'''\left(\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right) \neq 0.}$$

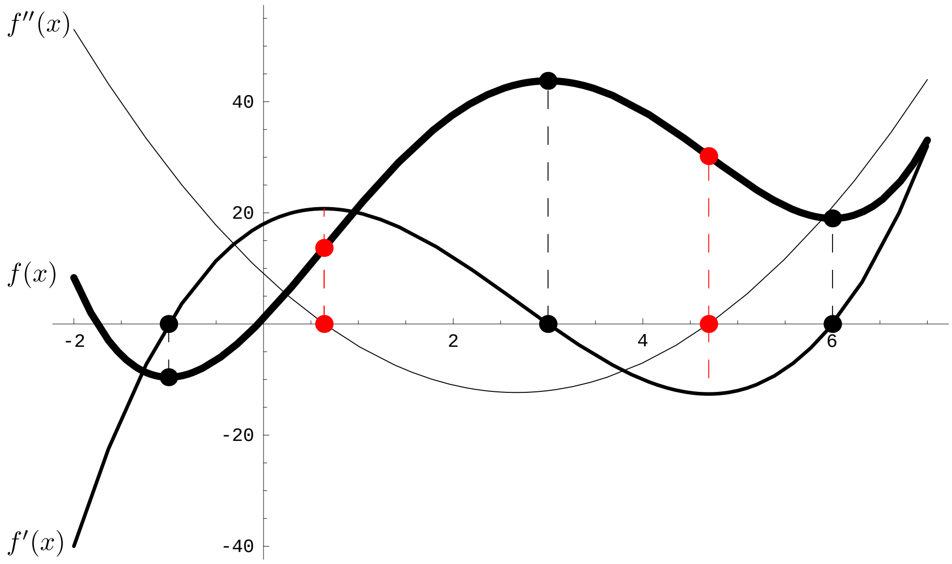
Teniendo en cuenta la información que hemos recuadrado y **Propiedades 16** tenemos que:

- La función $f$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(3, 6)$.
- La función $f$ es creciente en los intervalos $(-1, 3)$ y $(6, \infty)$.
- La función $f$ tiene mínimos relativos en los puntos $x = -1$ y $x = 6$.
- La función $f$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 3$.
- La función $f$ es convexa en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right)$ y $\left(\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right), \infty\right)$.
- La función $f$ es cóncava en el intervalo $\left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right), \frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right)$.
- La función $f$ tiene puntos de inflexión en $\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)$ y $\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)$.

Si calculamos el valor de la función en los puntos máximos y mínimos relativos y en los puntos de inflexión, toda la información anterior nos conduce a la siguiente gráfica:



Representando de forma conjunta la función $f(x)$ y las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ observamos gráficamente cómo se corresponden los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad con los signos de $f'$ y $f''$.




## 2.4 La regla de l'Hôpital

En el Capítulo 1 estudiamos el caso de diferentes límites que no podían ser calculados aplicando directamente las propiedades algebraicas del límite. Eran lo que llamábamos indeterminaciones. Dadas dos funciones, $f, g : D \to \mathbb{R}$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ó $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que solamente sabemos resolver en un par de casos muy concretos. Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, podríamos modificar la forma en que hemos escrito el límite anterior y plantear la siguiente cadena de igualdades:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \boxed{=} \frac{\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Hemos recuadrado el segundo símbolo $\boxed{=}$ para indicar que ese paso debe ser justificado más cuidadosamente. En cualquier caso, esta es la idea de los resultados de l'H'opitla para el cálculo de límites de cocientes que formulamos con precisión en la siguiente propiedad.

**Teorema 18** (Reglas de l'Hôpital). *Sean dos funciones reales $f$ y $g$, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$ de manera que se verifican las siguientes condiciones*

1. *$f$ y $g$ son derivables en $I - \{x_0\}$.*
2. *$g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I - \{x_0\}$.*
3. *Se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:*
   *a)* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
   *b)* $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

*Entonces se verifica que:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

*donde L puede ser un número real, $+\infty$ ó $-\infty$. La propiedad también es correcta para el límite por la izquierda o por la derecha.*

---

**Ejemplos 19.**
**1)** Si calculamos el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ de forma directa,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0},$$

obtenemos una indeterminación. Las funciones en el numerador y denominador están en las condiciones del la Regla de l'Hôpital por lo que podemos evitar la indeterminación derivando ambas funciones en el numerador y en el denominador,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

**2)** Calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. De entrada tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0.$$

Pero $0^0$ es una indeterminación y no podemos decidir el valor que alcanzará el límite de esta manera. Utilizando las propiedades del logaritmo sabemos que

$$x^x = e^{x\log(x)},$$

en cuyo caso, empleando las propiedades del límite respecto a la potenciación, podemos escribir,

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log(x)} = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)}.$$

Ahora, en lugar del límite inicial, debemos calcular $\lim_{x\to 0} x\log(x)$. Pero escribiendo ese producto en forma de cociente y aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log'(x)}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Finalmente,

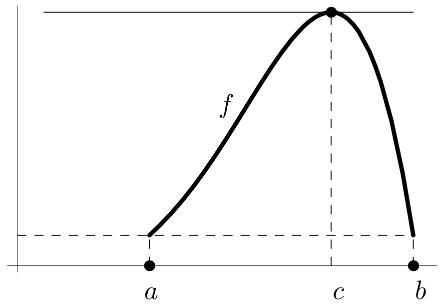
$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)} = e^0 = 1.$$

---

## 2.5 Material Adicional

### 2.5.1 Teoremas clásicos de derivación

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si $f(a)=f(b)$, su gráfica será algo del tipo




La intuición nos indica que, forzosamente, en algún punto intermedio entre $a$ y $b$ la tangente a la función debe ser horizontal. El Teorema de Rolle afirma que esto efectivamente es así.

**Teorema 20** (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ entonces si $f(a) = f(b)$ se verifica que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Cuando $f(a) \neq f(b)$ el razonamiento anterior no es válido pero es fácil formular una versión del Teorema de Rolle para esta situación. Si $f(a) = f(b)$, la recta que une $(a, f(a))$, con $(b, f(b))$ es horizontal y la recta cuya existencia postula el Teorema de Rolle también debe serlo. Lo que tenemos es que la tangente en algún punto es paralela a la recta que une los puntos inicial de la gráfica de la función. El teorema del valor medio afirma que esto último es cierto incluso cuando $f(a) \neq f(b)$.

**Teorema 21** (Teorema del valor medio)**.** *Sea $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

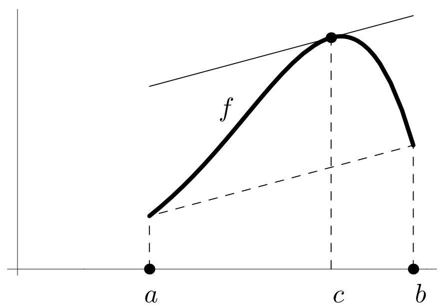
Sabemos que la pendiente, $m$, de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la tangente del ángulo que forma con la horizontal y por tanto

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por otro lado en el punto $c \in (a, b)$, la pendiente, $m_1$, de la recta tangente será $f'(c)$ y si despejamos en la igualdad del Teorema del valor medio tenemos que

$$m_1 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

En tal caso, la pendiente, $m$, de la recta que une los puntos inicial y final de la gráfica de $f$ y la pendiente de la recta tangente en el punto $c$ coinciden y ambas rectas son paralelas. Como hemos visto antes esto constituye una generalización del Teorema de Rolle al caso en que $f(a) \neq f(b)$.




Se suele utilizar el Teorema de Rolle para demostrar que una ecuación tiene solución única en cierto intervalo. Supongamos que estamos resolviendo la ecuación

$$f(x) = 0$$

y que hemos encontrado dos soluciones $a$ y $b$ para esta ecuación. En tal caso tendremos que

$$f(a) = f(b) = 0$$

y si la función satisface las hipótesis del Teorema de Rolle tendremos que existirá un punto intermedio entre $a$ y $b$ de modo que

$$f'(c) = 0.$$

Ahora bien, si previamente, por algún medio, hemos comprobado que la función $f'$ nunca se anula, la última identidad no podrá ser cierta en cuyo caso la conjetura inicial de que tenemos dos soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ no puede ser correcta de modo que debe haber una única solución.

---

**Ejemplo 22.** Veamos que la ecuación $e^x + x = 2$ tiene una única solución. Para ello tomemos la función $f(x) = e^x + x - 2$ y probemos de forma equivalente que $f(x) = 0$ tiene solución única.

**Existencia de solución (Teorema de Bolzano):** La función $f(x)$ es continua. Si encontramos dos puntos $a$ y $b$ en los que la función alcance valores con distinto signo, el Teorema de Bolzano garantizará la existencia de solución. Ahora bien, es fácil comprobar que

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = 1 - 2 < 0, \quad \text{y} \quad f(2) = e^2 + 2 - 2 = e^2 > 0.$$

Por tanto debe existir una solución, $c$, de $f(x) = 0$ que además estará en el intervalo $(0, 2)$ (podríamos aproximarla por el método de bisección).

**Unicidad de solución (Teorema de Rolle):** Ya sabemos que $f(x) = 0$ tiene al menos una solución a la que hemos llamado $c$. Supongamos que tenemos otra solución $c_1 \neq c$. Razonando como antes hemos indicado, puesto que $f(c) = 0 = f(c_1)$, podemos aplicar el Teorema de Rolle y afirmar que existe $\xi$ entre $c$ y $c_1$ tal que

$$f'(\xi) = 0.$$

Sin embargo, $f'(x) = e^x + 1$ y es evidente que

$$f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia no puede existir esa segunda solución $c_1$. La única solución es la que hemos localizado antes, $c$.

---

### 2.5.2 Desarrollo de Taylor y McLaurin

Supongamos que queremos encontrar una función de forma que en cierto punto $x_0$ sus derivadas tomen sucesivamente los valores $f_0, f_1, \ldots, f_k$, es decir,

$$f(x_0) = f_0, \ f'(x_0) = f_1, \ f''(x_0) = f_2, \ldots, f^{n)}(x_0) = f_n.$$

Hay muchas maneras de resolver este problema pero la forma más sencilla consiste en considerar el siguiente polinomio:

$$p_n(x) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(x - x_0) + \frac{f_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f_n}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.1}$$

es una solución a este problema, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ es lo que se denomina número factorial. Es fácil comprobar que

$$p(x_0) = f_0, \ p'(x_0) = f_1, \ p''(x_0) = f_2, \ldots, p^{n)}(x_0) = f_n.$$

Tomemos ahora una función $f : D \to \mathbb{R}$, $n$ veces derivable en cierto punto $x_0$. Supongamos que únicamente tenemos información de la función en el punto $x_0$ en el conocemos el valor de la función, $f(x_0)$, y el de sus $n$ primeras derivadas, $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{n)}(x_0)$ ¿Será posible reconstruir la función $f$ a partir de esta información? Es evidente que esto es imposible pero al menos podemos intentar buscar una función lo más parecida posible a $f$. Como de $f$ solamente conocemos sus primeras derivadas, lo único que podemos hacer es conseguir una función que coincida con $f$ en esas primeras derivadas y para ello podemos utilizar el polinomio $p_n(x)$ de (2.1) para $f_0 = f(x_0), f_1 = f'(x_0), \ldots, f_n = f^{n)}(x_0)$. Lo que obtendremos es, en cierto sentido, la mejor aproximación de $f$ que podemos calcular conociendo solamente sus primeras derivadas en el punto $x_0$. Ese polinomio es lo que se denomina Polinomio de Taylor de la función $f$ en $x_0$.

**Definición 23.** *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n$ en $D$ y sea $x_0 \in D$. Llamamos polinomio de Taylor de grado $n$ de $f$ en $x_0$ al polinomio*

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

*El polinomio de Taylor de grado $n$ en $x_0 = 0$ se denomina también polinomio de McLaurin de grado $n$.*

El polinomio de Taylor de una función constituye una aproximación de dicha función que presenta la ventaja de un más fácil manejo. La función de partida, $f(x)$, podría tener una expresión complicada pero $p_n(x)$ es siempre un polinomio sobre el que se pueden realizar de forma sencilla la mayoría de los cálculos. En ocasiones será posible sustituir una función por su polinomio de Taylor. Sin embargo al tomar el polinomio de Taylor en lugar de la función cometemos un error ya que el polinomio no es exactamente igual que ella. La siguiente propiedad nos da una expresión del error cometido al realizar esa sustitución.

**Propiedad 24.** *Sea un intervalo $I = (a, b)$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{n+1}$ en $I$ y sea $x_0 \in I$. Entonces para cualquier $x \in I$ existe un punto real $\xi$ situado entre $x_0$ y $x$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

*A la fórmula anterior se la conoce como fórmula de Taylor de grado $n$ de la función $f$ en el punto $x_0$.*

La formula de Taylor nos proporciona el error cometido al tomar el polinomio de Taylor en lugar de la función. Véase que si llamamos $p_n(x)$ al polinomio de Taylor de grado $n$ de $f$ en $x_0$, utilizando la fórmula de Taylor, podemos escribir

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

y por lo tanto el error cometido será

$$E_n(x) = \left| \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$