Capítulo 6.
Estudio de modelos matriciales (diagonalización).

1 Proceso de diagonalización

La mayoría de los cálculos se simplifican si las matrices son diagonales.

- $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & & & \\ & a_2 \cdot b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \cdot b_n \end{pmatrix}.$

2 Proceso de diagonalización

La mayoría de los cálculos se simplifican si las matrices son diagonales.

- $\left|\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\right| = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$

3 Proceso de diagonalización

La mayoría de los cálculos se simplifican si las matrices son diagonales.

- $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix}.$

4 Proceso de diagonalización

La mayoría de los cálculos se simplifican si las matrices son diagonales.

- $$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}.$$

5 Proceso de diagonalización

La mayoría de los cálculos se simplifican si las matrices son diagonales.

- $$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Será interesante, por tanto, disponer de métodos que permitan obtener formas diagonales para una matriz cualquiera,

$$\underbrace{A}_{\text{Matriz cualquiera}} \xrightarrow[\text{diagonalización}]{} \underbrace{D}_{\text{Matriz diagonal}},$$

de manera que podamos recuperar para A las operaciones que de forma más sencilla realicemos sobre D. Veamos pues la definición que damos para diagonalización.

Definición 1. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$, *decimos que es una matriz diagonalizable si existe* $C \in \mathcal{M}_n$ *regular tal que la matriz*

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

es una matriz diagonal. En tal caso diremos que la matriz C *diagonaliza a la matriz* A *y la llamaremos matriz de paso.*

Definición 2. *Dada $A \in \mathcal{M}_n$, decimos que es una matriz diagonalizable si existe $C \in \mathcal{M}_n$ regular tal que la matriz*

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

es una matriz diagonal. En tal caso diremos que la matriz C diagonaliza a la matriz A y la llamaremos matriz de paso.

Propiedad 3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz diagonalizable tal que*

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C,$$

donde $C, D \in \mathcal{M}_n$, siendo D una matriz diagonal y C una matriz regular. Entonces:

i) $|A| = |D|$.

ii) $A^n = C \cdot D^n \cdot C^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. *En particular, si A es regular esta propiedad es también válida para $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.*

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, para diagonalizarla hemos de encontrar la matriz de paso C y la diagonalización D. Para ello realizaremos las siguientes consideraciones:

- Supondremos que los vectores columna de la matriz de paso C son $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, es decir,

  $$C = (v_1|v_2|\ldots|v_n),$$

  y que

  $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, para diagonalizarla hemos de encontrar la matriz de paso C y la diagonalización D. Para ello realizaremos las siguientes consideraciones:

- La matriz C debe tener inversa y por tanto

$$\det(C) \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ son independientes}$$

$$\Leftrightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ son una base de } \mathbb{R}^n.$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, para diagonalizarla hemos de encontrar la matriz de paso C y la diagonalización D. Para ello realizaremos las siguientes consideraciones:

- Es fácil comprobar que podemos calcular los productos $A \cdot C$ y $C \cdot D$ del siguiente modo (es suficiente con plantear algún ejemplo concreto para darse cuenta)

  $$A \cdot C = A \cdot (v_1|v_2|\ldots|v_n) = (Av_1|Av_2|\ldots|Av_n)$$

  y también que

  $$C \cdot D = (\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\ldots|\lambda_n v_n).$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, para diagonalizarla hemos de encontrar la matriz de paso C y la diagonalización D. Para ello realizaremos las siguientes consideraciones:

- Es fácil comprobar que podemos calcular los productos $A \cdot C$ y $C \cdot D$ del siguiente modo (es suficiente con plantear algún ejemplo concreto para darse cuenta)

$$A \cdot C = A \cdot (v_1|v_2|\ldots|v_n) = (Av_1|Av_2|\ldots|Av_n)$$

  y también que

$$C \cdot D = (\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\ldots|\lambda_n v_n).$$

- Si la matriz C diagonaliza a A siendo D la diagonalización

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Leftrightarrow A \cdot C = C \cdot D$$

$$\Leftrightarrow (Av_1|Av_2|\ldots|Av_n) = (\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\ldots|\lambda_n v_n)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Av_1 & = & \lambda_1 v_1 \\ Av_2 & = & \lambda_2 v_2 \\ & \vdots & \\ Av_n & = & \lambda_n v_n \end{array} \right.$$

Por tanto, si encontramos una base de vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

tales que

$$\left\{\begin{array}{rcl} Av_1 & = & \lambda_1 v_1 \\ Av_2 & = & \lambda_2 v_2 \\ & \vdots & \\ Av_n & = & \lambda_n v_n \end{array}\right. ,$$

entonces la matriz A es diagonalizable siendo

$$C = (v_1|v_2|\ldots|v_n)$$

y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definición 4. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *llamamos:*

- **valor propio de** A *a cualquier número real* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que existe algún vector no nulo,* $v \in \mathbb{R}^n$*, tal que*

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Definición 5. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *llamamos:*

- **valor propio de** A *a cualquier número real* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que existe algún vector no nulo,* $v \in \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$A \cdot v = \lambda v.$$

- **vector propio de** A **asociado al valor propio** λ *a cualquier vector* $v \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Definición 6. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *llamamos:*

- **valor propio de** A *a cualquier número real* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que existe algún vector no nulo,* $v \in \mathbb{R}^n$*, tal que*

$$A \cdot v = \lambda v.$$

- **vector propio de** A **asociado al valor propio** λ *a cualquier vector* $v \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$A \cdot v = \lambda v.$$

- **subespacio propio de** A **asociado al valor propio** λ *al conjunto de todos los vectores propios de* A *asociados al valor propio* λ*,*

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n / A \cdot v = \lambda v\}.$$

  Tal conjunto V_λ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$*.*

Estos conceptos tienen importantes interpretaciones en distintos modelos matriciales iterativos.

Para comprobar si λ es un valor propio de A hemos de encontrar un vector, $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo, tal que

$$A \cdot v = \lambda v \Leftrightarrow A \cdot v - \lambda v = 0 \Leftrightarrow A \cdot v - \lambda I_n \cdot v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot v = 0,$$

si $\overline{A} = A - \lambda I_n$ y $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \text{ es valor propio de } A \Leftrightarrow \exists\ v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, \text{ tal que } A \cdot v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ es indeterminado} \Leftrightarrow |\overline{A}| = 0$$

$$\Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0.$$

Llamemos V_λ al conjunto de todos los vectores propios de A asociados al valor propio λ. De todo el razonamiento anterior se extrae que

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v \in \mathbb{R}^n / A \cdot v = \lambda v\} \\ &= \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

por lo que V_λ es un subespacio vectorial con ecuaciones implícitas

$$V_\lambda \equiv (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedad 7. *Dada $A \in \mathcal{M}_n$:*

i) Se verifica que

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ es valor propio de } A \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$$

y, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio, entonces V_λ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ dado mediante

$$V_\lambda \equiv (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\dim(V_\lambda) = n - \operatorname{rango}(A - \lambda I_n).$$

ii) Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ son valores propios de A distintos entre sí. Entonces, si B_1 es base de V_{λ_1}, B_2 es base de $V_{\lambda_2}, \ldots$, B_k es base de V_{λ_k}, se tiene que

$$H = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$$

es un conjunto independiente.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A y $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A asociado a λ entonces

$$A^k v = \lambda^k v.$$

Definición 8. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *llamamos polinomio característico de la matriz* A *al polinomio*

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n| \in \mathbb{P}_n(\lambda)$$

y llamamos ecuación característica de la matriz A *a la ecuación*

$$p(\lambda) = 0.$$

Nota. De todo lo expuesto anteriormente se deduce que:

- Los valores propios de una matriz, $A \in \mathcal{M}_n$, son las soluciones de su ecuación característica.
- Una matriz se podrá diagonalizar si encontramos una base formada exclusivamente por vectores propios.

Podemos encontrarnos con los siguientes problemas que impedirían que una matriz se pudiera diagonalizar:

1. La matriz, o no tiene ningún valor propio o tiene un número insuficiente de ellos.
2. No podemos encontrar n vectores propios independientes para la matriz.

Definición 9.

i) *Dado un polinomio,* $p(\lambda) \in \mathbb{P}_n(\lambda)$*, decimos que* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *es un cero de multiplicidad* k *de* $p(\lambda)$ *si podemos expresar* $p(\lambda)$ *en la forma*

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)^k,$$

donde $q(\lambda) \in \mathbb{P}_{n-k}(\lambda)$ *verifica que* $q(\lambda_0) \neq 0$*.*

Definición 10.

i) Dado un polinomio, $p(\lambda) \in \mathbb{P}_n(\lambda)$*, decimos que* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *es un cero de multiplicidad* k *de* $p(\lambda)$ *si podemos expresar* $p(\lambda)$ *en la forma*

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)^k,$$

donde $q(\lambda) \in \mathbb{P}_{n-k}(\lambda)$ *verifica que* $q(\lambda_0) \neq 0$*.*

ii) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *valor propio de* A *decimos que la multiplicidad algebraica de* λ *es* k *si* λ *es un cero de multiplicidad* k *del polinomio característico de la matriz* A*.*

Definición 11.

i) Dado un polinomio, $p(\lambda) \in \mathbb{P}_n(\lambda)$, decimos que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es un cero de multiplicidad k de $p(\lambda)$ si podemos expresar $p(\lambda)$ en la forma

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)^k,$$

donde $q(\lambda) \in \mathbb{P}_{n-k}(\lambda)$ verifica que $q(\lambda_0) \neq 0$.

ii) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de A decimos que la multiplicidad algebraica de λ es k si λ es un cero de multiplicidad k del polinomio característico de la matriz A.

iii) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio de A, llamamos multiplicidad geométrica de λ a la dimensión del subespacio propio asociado a λ, V_λ, es decir, a $\dim(V_\lambda)$.

Propiedad 12. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n$ *cuyos valores propios son* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *de manera que* $\forall i = 1, \ldots, k$

$$\begin{cases} n_i \text{ es la multiplicidad algebráica de } \lambda_i. \\ m_i \text{ es la multiplicidad geométrica de } \lambda_i. \end{cases}.$$

Entonces se verifica que

1. $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$.
2. $1 \leq m_i \leq n_i, \ \forall i = 1, \ldots, k$.
3. A *es diagonalizable* $\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n. \\ m_i = n_i, \ \forall i = 1, \ldots, k. \end{cases}.$

Propiedad 13.

i) Si $A \in \mathcal{M}_n$ *es una matriz diagonal,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

entonces A *es diagonalizable teniéndose que la matriz* I_n *diagonaliza a la matriz* A*, la base* B_c *de* $\mathbb{R}^n$ *es una base de vectores propios de* A *y sus valores propios son* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *de forma que el número de veces que se repite cada valor propio indica su multiplicidad algebraica y geométrica.*

ii) Toda matriz simétrica es diagonalizable.

iii) Si $A \in \mathcal{M}_n$ *tiene* n *valores propios, todos ellos distintos, entonces* A *es diagonalizable.*

iv) Si las columnas o las filas de $A \in \mathcal{M}_n$ tienen todas ellas suma igual a un mismo número $r \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda = r$ es un valor propio de A.

v) El polinomio característico de $A \in \mathcal{M}_2$ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - traza(A)\lambda + |A|.$$

vi) El polinomio característica de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$ *es*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda^3 + traza(A)\lambda^2 \\ &\quad - \left(\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \right| \right) \lambda \\ &\quad + |A|. \end{aligned}$$

Ejemplo 14. En capítulos anteriores vimos el ejemplo de un parque natural en el que cierta especie se movía entre asentamientos diferentes A, B y C según la siguiente tabla:

	Salen de A	**Salen de B**	**Salen de C**
Llegan a A	80%	10%	10%
Llegan a B	10%	60%	20%
Llegan a C	10%	30%	70%

Llamemos A_k, B_k y C_k a la cantidad de individuos en A, B y C respectivamente en el año k y agrupemos estos tres datos en el vector de distribución de población para el año k,

$$P_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix}.$$

Vimos entonces que si conocíamos los datos del año inicial, P_0,

$$P_k = A^k P_0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición.

Calculemos todos los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$|A - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0.8 - \lambda & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 2.1\lambda^2 - 1.38\lambda + 0.28.$$

Resolvemos la ecuación $-\lambda^3 + 2.1\lambda^2 - 1.38\lambda + 0.28 = 0$ (como todas las columnas suman 1, $\lambda = 1$ es solución) obteniendo

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0.4 \\ \lambda = 0.7 \end{cases}.$$

Calculemos los subespacios propios correspondientes a cada uno de ellos:

- El subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ es el subespacio vectorial con ecuaciones implícitas

$$V_1 \equiv (A - 1I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_1 \equiv \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Una base para tal subespacio es $B_1 = \{(6, 5, 7)\}$.

- Para $\lambda = 0.4$ el subespacio propio es el subespacio vectorial

$$V_{0.4} \equiv (A - 0.4I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{0.4} \equiv \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Una base para tal subespacio es $B_{0.4} = \{(0, -1, 1)\}$.

- Para $\lambda = 0.7$ el subespacio propio es el subespacio vectorial

$$V_{0.7} \equiv (A - 0.7 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{0.7} \equiv \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Una base para tal subespacio es $B_{0.7} = \{(-3, 1, 2)\}$.

El apartado *ii)* de la **Propiedad 7** garantiza que reuniendo los elementos de B_1, $B_{0.4}$ y $B_{0.7}$ obtenemos un conjunto de vectores independientes

$$B = \{(6, 5, 7), (0, -1, 1), (-3, 1, 2)\}.$$

Por tanto,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

6 Estudio de la tendencia en procesos iterativos

Son habituales los modelos iterativos como los del **Ejemplo 14**. En ellos intervienen siempre elementos similares. Así tendremos:

- El modelo describirá la situación de cierto fenómeno en períodos sucesivos. Conoceremos los valores iniciales que recopilaremos en un vector P_0 y llamaremos P_1, P_2, P_3, en general P_k, a los vectores correspondientes a los períodos siguientes.
- Dispondremos de una matriz de transición, A, que gobierna los cambios de un período al siguiente según las ecuaciones matriciales

$$P_{k+1} = AP_k \qquad \text{y} \qquad P_k = A^k P_0.$$

El estudio de la tendencia supone determinar el comportamiento en el futuro de un modelo de este tipo lo que en definitiva significa calcular o estudiar de alguna manera el valor de

$$A^k P_0$$

para valores grandes de k.

Las técnicas de diagonalización nos proporcionan una forma directa de realizar este cálculo.

Ejemplo 15. Continuando con el **Ejemplo 14**, supongamos que inicialmente tenemos

- 210 especímenes en el asentamiento A.
- 190 especímenes en el asentamiento B.
- 320 especímenes en el asentamiento C.

Es decir,

$$P_0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el número de especímenes pasados diez años.

Según nuestro modelo matricial.

$$P_{10} = A^{10} P_0.$$

Puesto que hemos diagonalizado A tenemos que

$$A^{10} = C{\cdot}D^{10}{\cdot}C^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0.4^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.7^{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 7 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.352165 & 0.323917 & 0.323917 \\ 0.271495 & 0.28098 & 0.280876 \\ 0.37634 & 0.395102 & 0.395207 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$P_{10} = A^{10} P_0 = \begin{pmatrix} 0.352165 & 0.323917 & 0.323917 \\ 0.271495 & 0.28098 & 0.280876 \\ 0.37634 & 0.395102 & 0.395207 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 239.153 \\ 200.28 \\ 280.567 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, cuando conocemos la upla de datos iniciales P_0 ó cuando queremos estudiar la tendencia para valores grandes de k, es más indicado el método que veremos a continuación denominado 'método de las potencias'.

6.1 El método de las potencias

Supongamos que queremos realizar el cálculo

$$A^k P_0$$

Supongamos que la matriz A es diagonalizable. Entonces, podremos calcular para A una base de vectores propios

Vector propio	**Valor propio asociado**
v_1	λ_1
v_2	λ_2
$\vdots$	$\vdots$
v_n	λ_n

Puesto que los vectores propios $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forma base de $\mathbb{R}^n$,

$$P_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

para ciertos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ que pueden ser calculados resolviendo el sistema correspondiente.

Ahora,

$$A^k P_0 = A^k\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\right) = \left(\begin{array}{c}\text{empleando la}\\ \text{propiedad distributiva}\\ \text{del producto de matrices}\end{array}\right)$$

$$= A^k\alpha_1 v_1 + A^k\alpha_2 v_2 + \cdots + A^k\alpha_n v_n$$

$$= \alpha_1 \underline{A^k v_1} + \alpha_2 \underline{A^k v_2} + \cdots + \alpha_n \underline{A^k v_n}.$$

Ahora bien, mediante **Propiedad 7**

$$A^k v_1 = \lambda_1^k v_1, \qquad A^k v_2 = \lambda_2^k v_2, \ldots \qquad A^k v_n = \lambda_n^k v_n$$

con lo que

$$A^k P_0 = \alpha_1 \underbrace{A^k v_1}_{\lambda_1^k v_1} + \alpha_2 \underbrace{A^k v_2}_{\lambda_2^k v_2} + \cdots + \alpha_n \underbrace{A^k v_n}_{\lambda_n^k v_n}$$

$$= \alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k v_n.$$

$$\Rightarrow \boxed{A^k P_0 = \alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k v_n}.$$

Ejemplo 16. Supongamos que tres grupos de inversión que denominaremos A, B y C gestionan ellos mismos la mayor parte de su capital pero diversifican su inversión destinando un porcentaje a alguno de los otros dos grupos. De un año a otro mantienen fijos los porcentajes de inversión según la siguiente tabla:

		invierte en		
		A	**B**	**C**
Grupo	**A**	90%	30%	30%
	B	10%	70%	20%
	C	10%	10%	60%

Supongamos que inicialmente el capital en cada grupo es, en millones de euros, el siguiente:

	Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**
Capital	17	27	21

Estudiemos el capital en los años sucesivos. Para ellos plantearemos un modelo matricial para este problema.

Comenzaremos llamando

$$P_0 = \begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix}$$

a la 3-upla de datos iniciales. Es evidente que si en el año k, tenemos un capital A_k en el grupo A, B_k en el grupo B y C_k en el grupo C, en el año siguiente (año $k+1$) tendremos:

$$\mathrm{A}_{k+1} = 90\% \text{ de } \mathrm{A}_k + 10\% \text{ de } \mathrm{B}_k + 10\% \text{ de } \mathrm{C}_k = 0.9\mathrm{A}_k + 0.1\mathrm{B}_k + 0.1\mathrm{C}_k,$$

$$\mathrm{B}_{k+1} = 30\% \text{ de } \mathrm{A}_k + 70\% \text{ de } \mathrm{B}_k + 10\% \text{ de } \mathrm{C}_k = 0.3\mathrm{A}_k + 0.7\mathrm{B}_k + 0.1\mathrm{C}_k,$$

$$\mathrm{C}_{k+1} = 30\% \text{ de } \mathrm{A}_k + 20\% \text{ de } \mathrm{B}_k + 60\% \text{ de } \mathrm{C}_k = 0.3\mathrm{A}_k + 0.2\mathrm{B}_k + 0.6\mathrm{C}_k.$$

Expresando estas igualdades en forma matricial tenemos que

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{k+1} \\ \mathrm{B}_{k+1} \\ \mathrm{C}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{A}_k \\ \mathrm{B}_k \\ \mathrm{C}_k \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_k \\ \mathrm{B}_k \\ \mathrm{C}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{A}_0 \\ \mathrm{B}_0 \\ \mathrm{C}_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si denotamos

$$P_k = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_k \\ \mathrm{B}_k \\ \mathrm{C}_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

abreviadamente la ecuación matricial (1) se escribe en la forma

$$P_k = A^k P_0.$$

Para calcular P_k emplearemos el método de las potencias. Para ello comenzamos calculado los valores y vectores propios de la matriz A.

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 0.9-\lambda & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7-\lambda & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6-\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= -\lambda^3 + 2.2\lambda^2 - 1.51\lambda + 0.33.$$

Para calcular los valores propios debemos resolver la ecuación

$$\lambda^3 - 2.2\lambda^2 + 1.51\lambda - 0.33 = 0.$$

Sin embargo es fácil comprobar que la suma de todas las filas de A es igual a 1.1 con lo que el apartado *iv)* de la **Propiedad 13** nos permite afirmar que $\lambda = 1.1$ es un valor propio de A. De esta forma sabemos ya que una de las soluciones de la ecuación característica es $\lambda = 1.1$. Si dividimos por el método de Ruffini tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2.2 & 1.51 & -0.33 \\ 1.1 & & 1.1 & -1.21 & 0.33 \\ \hline & 1 & -1.1 & 0.3 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{0}} \end{array}$$

y queda por resolver la ecuación

$$1 \cdot \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.3 = 0.$$

Pero esta última es una ecuación de segundo grado que puede ser resuelta directamente obteniéndose como resultado

$$\lambda = \frac{1.1 \pm \sqrt{1.1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \lambda = 0.6 \quad \text{y} \quad \lambda = 0.5.$$

De este modo tenemos que la matriz A tiene los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.6, \quad \lambda_3 = 0.5.$$

- **Vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_1 = 1.1}$:**

$$V_{1.1} \equiv \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $V_{1.1} = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

- **Vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_2 = 0.6}$:**

$$V_{0.6} \equiv \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso $V_{0.6} = \langle (-2, 3, 3) \rangle$.

- **Vectores propios asociados a $\boldsymbol{\lambda_3 = 0.5}$:**

$$V_{0.5} \equiv \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora $V_{0.5} = \langle (1, 1, -5) \rangle$.

Tenemos entones:

$$v_1 = (1, 1, 1) \text{ asociado al valor propio } \lambda_1 = 1.1,$$
$$v_2 = (-2, 3, 3) \text{ asociado al valor propio } \lambda_2 = 0.6,$$
$$v_3 = (1, 1, -5) \text{ asociado al valor propio } \lambda_3 = 0.5.$$

Los vectores v_1, v_2 y v_3 son una base de $\mathbb{R}^3$ y para aplicar el método de las potencias necesitamos expresar la upla de valores iniciales, P_0, como combinación lineal de ellos.

$$P_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 17 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 27 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = 21 \end{cases}$$

y resolviendo este sistema obtenemos $\alpha_1 = 20$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

Por tanto,

$$P_0 = 20v_1 + 2v_2 + v_3 \quad \text{ó lo que es lo mismo}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, para calcular $A^k P_0$ procedemos como en la página 36 en la forma

$$A^k P_0 = 20A^k v_1 + 2A_k v_2 + A^k v_3 = 20 \cdot 1.1^k v_1 + 2 \cdot 0.6^k v_2 + 0.5^k v_3,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix} = 20 \cdot 1.1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.6^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.5^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- Pasados $k = 3$ años los capitales en cada grupo estarán determinados por la upla $P_3 = A^3 P_0$ que puede ser calculada mediante

$$P_3 = A^3 P_0 = 20 \cdot 1.1^3 v_1 + 2 \cdot 0.6^3 v_2 + 0.5^3 v_3$$

$$= 26.62 v_1 + 2 \cdot 0.432 v_2 + 0.125 v_3$$

$$= 26.62 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.432 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.125 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.881 \\ 28.041 \\ 27.291 \end{pmatrix}.$$

- Pasados $k = 10$ años los capitales en cada grupo estarán determinados por la upla $P_{10} = A^{10} P_0$ que podemos calcular en la forma:

$$P_{10} = A^{10} P_0 = 20 \cdot 1.1^{10} v_1 + 2 \cdot 0.6^{10} v_2 + 0.5^{10} v_3$$

$$= 51.8748 v_1 + 2 \cdot 0.0120932 v_2 + 0.000976563 v_3$$

$$= 51.8748 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.0120932 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.000976563 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.8516 \\ 51.9121 \\ 51.9062 \end{pmatrix}$$

Mediante este método es igualmente fácil calcular los capitales pasados cualquier número de años.

Nos centraremos ahora en el estudio de la tendencia para los modelos matriciales iterativos. Suponemos pues que continuamos con un modelo matricial en el que la upla que proporciona los valores para el período k, P_k, se calcula mediante la ecuación matricial

$$P_k = A^k P_0,$$

Si tenemos

$$P_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Entonces, el cálculo de la potencia $A^k P_0$ era sencillo a través de la identidad

$$A^k P_0 = \alpha_1 \underline{\lambda_1^k} v_1 + \alpha_2 \underline{\lambda_2^k} v_2 + \cdots + \alpha_n \underline{\lambda_n^k} v_n. \tag{2}$$

De entre las potencias subrayadas, al aumentar k, crecerá más rápidamente aquella que corresponda al valor propio más grande.

Definición 17. *Un valor propio de una matriz A se dice que es el valor propio dominante si su valor absoluto es superior al del resto de valores propios de la matriz. Un vector propio asociado al valor dominante se dice que es un vector propio dominante.*

Ejemplos 18.

1) Los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -40 & -31 \\ 2 & 1 & -2 \\ 18 & -36 & -24 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 3$. Si calculamos el valor absoluto de estos valores propios tenemos que

$$|\lambda_1| = 6, \quad |\lambda_2| = 5, \quad |\lambda_3| = 3.$$

2) Los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -38 & -31 \\ 5 & -4 & -5 \\ 14 & -28 & -20 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 1$. Los valores propios correspondientes son

$$|\lambda_1| = 6, \quad |\lambda_2| = 6, \quad |\lambda_3| = 1.$$

El valor absoluto de los dos primeros valores propios coincide.

Supongamos que en la identidad (2) el valor propio λ_1 es el valor propio dominante de la matriz A y que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

En consecuencia tendremos que v_1 es un vector propio dominante de A.

$$\boxed{A^k P_0 = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k v_n}.$$

$$\Downarrow$$

$$A^k P_0 = \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right).$$

Al ser λ_1 el valor propio dominante es evidente que

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|, \ldots, \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| < 1$$

pero para valores grandes de k es fácil comprobar que

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \approx 0, \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k \approx 0, \quad \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \approx 0$$

y por tanto cuando k se hace grande tendremos que

$$A^k P_0 = \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k}_{\approx 0} v_2 + \cdots + \alpha_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k}_{\approx 0} v_n \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A^k P_0 \approx \lambda_1^k \alpha_1 v_1}.$$

De aquí extraemos las siguientes conclusiones:

- Para valores grandes de k, el comportamiento de $A^k P_0$ depende únicamente del valor propio dominante y del vector propio dominante.
- Dependiendo del valor de λ_1 la expresión $\alpha_1 \lambda_1^k v_1$ tendrá un comportamiento u otro. En concreto tenemos:
  - Si $|\lambda_1| < 1$, para valores grandes de k tendremos que $\lambda_1^k \approx 0$ y en ese caso

    $$\alpha_1 \lambda_1^k v_1 \approx 0.$$

    Dicho de otro modo, los valores de P_k en sucesivos períodos tienden a anularse.
  - Si $|\lambda_1| > 1$, para valores grandes de k tendremos que $\lambda^k \approx \pm\infty$ y entonces

    $$\alpha_1 \lambda_1^k v_1 \approx \pm\infty$$

    lo cual significa que los valores en sucesivos períodos crecerán o decrecerán de forma ilimitada.
  - Si $\lambda_1 = 1$, para valores grandes de k tendremos que

    $$\alpha_1 \lambda_1^k v_1 = \alpha_1 v_1$$

    y las uplas de datos en sucesivos períodos tenderán a un valor constante de equilibrio dado por αv_1.

- Tenemos que para valores grandes de k, los datos en el período k, P_k, se podrán calcular de forma aproximada mediante

$$P_k = A^k P_0 \approx \alpha_1 \lambda_1^k v_1.$$

En numerosas situaciones será de interés calcular el vector de tantos por ciento de P_k y entonces tendremos que

$$\begin{aligned} &\text{vector de tantos por ciento de } P_k \\ &\approx \text{vector de tantos por ciento de } \alpha_1 \lambda_1^k v_1. \end{aligned}$$

Ahora bien, es fácil que

$$\begin{aligned} &\text{vector de tantos por ciento de } \underbrace{\alpha_1 \lambda_1^k}_{\text{número}} \underbrace{v_1}_{\text{vector}} \\ &= \text{vector de tantos por ciento de } v_1 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} &\text{vector de tantos por ciento de } P_k \\ &\approx \text{vector de tantos por ciento de } v_1. \end{aligned}$$

Ejemplos 19. 1) En el **Ejemplo 16** estudiábamos el problema de tres grupos financieros que invierten según cierta tabla fija de inversión anual que conducía a un modelo matricial para el cálculo de los capitales de los tres grupos en períodos sucesivos de la forma

$$P_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^k}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 17 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix}}_{=P_0}.$$

Vimos que la matriz de transición A tiene valores propios

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.6, \quad \lambda_3 = 0.5$$

con lo que el valor propio dominante es $\lambda_1 = 1.1$ y el correspondiente vector propio dominante es $v_1 = (1, 1, 1)$. Por otro lado, la expresión de la upla de datos iniciales P_0 en la base de vectores propios v_1, v_2 y v_3 calculada en la página 41 es

$$P_0 = \underbrace{20}_{=\alpha_1} v_1 + 2v_2 + v_3.$$

Entonces 47 tenemos que:

- Para valores grandes de k tenemos que
$$P_k \approx 20 \cdot 1.1^k v_1.$$
Por ejemplo:
  - Pasados $k = 3$ años, la upla de capitales, P_3, se puede calcular de forma aproximada como
$$P_3 \approx 20 \cdot 1.1^3 v_1 = 26.62 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.62 \\ 26.62 \\ 26.62 \end{pmatrix}.$$
  - Pasados $k = 10$ años, la upla de capitales, P_{10}, se puede calcular de forma aproximada como
$$P_{10} \approx 20 \cdot 1.1^{10} v_1 = 51.8748 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.8748 \\ 51.8748 \\ 51.8748 \end{pmatrix}.$$
- Puesto que el valor propio dominante verifica $|\lambda_1| = |1.1| = 1.1 > 1$, tenemos que
$$P_k \approx \alpha_1 1.1^k v_1 = 20 \cdot 1.1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
y los capitales de los tres grupos crecen ilimitadamente durante el transcurso de los sucesivos años.

- Los porcentajes que representan los capitales para el año k, cuando k es suficientemente grande serán aproximadamente los mismos que representa el vector propio dominante v_1. El vector de porcentajes de v_1 es

$$\frac{100}{1+1+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}33.\overline{3}\\33.\overline{3}\\33.\overline{3}\end{pmatrix}.$$

  Por tanto, la tendencia de futuro es que:

  – El $33.\overline{3}\%$ del total de capitales pertenecerá al grupo A.

  – El $33.\overline{3}\%$ del total de capitales pertenecerá al grupo B.

  – El $33.\overline{3}\%$ del total de capitales pertenecerá al grupo C.

  Se observa que la tendencia, pasado un número suficientemente grande de años, es que los tres grupos acumulen capitales de la misma cuantía.

2) Si analizamos el **Ejemplo 14** tenemos que los valores propios de la matriz de transición son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.7.$$

Por tanto el valor propio dominante es $\lambda_1 = 1$. Ya habíamos calculado también los vectores propios asociados a estos valores propios, en particular, vimos que $(6, 5, 7)$ es un vector propio asociado al valor propio dominante $\lambda_1 = 1$ así que $v_1 = (6, 5, 7)$ es un vector propio dominante. Si consideramos además los vectores propios asociados a los otros dos valores propios obtenemos la siguiente base de vectores propios:

$$B = \{(6, 5, 7), (0, -1, 1), (-3, 1, 2)\}.$$

En el Capítulo 1 vimos que los datos iniciales eran

$$P_0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Si expresamos P_0 en B:

$$P_0 = 40v_1 + 20v_2 + 10v_3.$$

Entonces mediante le método de las potencias tenemos:

$$A^k P_0 \approx 35 \cdot 1^k v_1 = 35v_1.$$

Puesto que el valor propio dominante es igual a uno, tenemos una situación de estabilidad en la que la distribución de los especímenes rondará en torno a el valor límite $35v_1 = 35(6, 5, 7)$. El vector de porcentajes de v_1 es

$$(33.\overline{3}\%, 27.\overline{7}\%, 38.\overline{8}\%)$$

y la distribución que podemos esperar para el futuro será:

- Especímenes en el asentamiento A $= 33.\overline{3}\%$ del total.
- Especímenes en el asentamiento B $= 27.\overline{7}\%$ del total.
- Especímenes en el asentamiento C $= 38.\overline{8}\%$ del total.