Capítulo 5.
Sistemas Lineales.

Objetivos del tema

- Conceptos básicos. Expresión de la solución mediante parámetros. Combinaciones lineales y sistemas.
- Método de eliminación gaussiana.
- Método de Cramer.
- Subespacios vectoriales. Expresión de las soluciones de un sistema lineal homogéneo mediante combinaciones lineales.
- Base, dimensión y coordenadas.
- Representación de rectas y semiplanos en $\mathbb{R}^2$. Programación lineal.

1 Conceptos básicos

Definición 1. *Un sistema lineal con m ecuaciones y n variables o incógnitas ordenadas, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es un conjunto de ecuaciones de la forma*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

donde para cada $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$:

- *$a_{ij} \in \mathbb{R}$ se denomina coeficiente (i, j) del sistema.*
- *$b_i \in \mathbb{R}$ se denomina i-ésimo término independiente del sistema.*
- *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan incógnitas del sistema y son símbolos que representan un valor desconocido que debe ser calculado.*

Llamamos solución del sistema a cualquier n-upla de números reales $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que si en el sistema, para todo $i = 1, \ldots, n$, sustituimos x_i por s_i, todas las ecuaciones del mismo son ciertas. Resolver un sistema es encontrar el conjunto de todas sus soluciones.

Diremos que el sistema es:

- **homogéneo** *si* $\forall i = 1, \ldots, m,\ b_i = 0.$
- **completo** *si para algún* $i \in \{1, \ldots, m\},\ b_i \neq 0.$

En un sistema pueden aparecer datos desconocidos distintos de las variables a los que llamaremos parámetros del sistema.

Definición 2. *Dado el sistema lineal*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

llamamos:

- *Matriz de coeficientes del sistema a la matriz $m \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

- *Columna de términos independientes del sistema a* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}.$

- *Columna de variables del sistema a* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

- *Ecuación matricial del sistema o forma matricial del sistema a*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$$

- *Matriz ampliada del sistema a la matriz*

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ejemplos 3.

1) Consideremos el sistema de dos ecuaciones y variables (x, y, z) siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{array}\right. .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Además, es fácil comprobar que $(5,-2,0)$, $(10,-5,1)$, $(0,1,-1)$ son soluciones del sistema.

$$(5,-2,0) \text{ es solución ya que tomando } \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{tenemos } \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 5 + (-2) + 0 = 1 \\ 5 + (-2) - 2\ 0 = 3 \end{array} \right. \\ \text{ó} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) El sistema

$$\begin{cases} x+2y-z+2w=12 \\ y+z+3w=10 \\ x+2y-3z+2w=14 \\ 2x-2y+4z+5w=9 \end{cases}$$

tiene cuatro ecuaciones y cuatro variables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que la <u>única</u> solución es

$$(1,2,-1,3) \text{ o lo que es lo mismo } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \\ w=3 \end{cases}.$$

3) Intentemos resolver el sistema en las variables x e y,

$$\{x + y = 3\,.$$

Si pretendemos calcular x, deberemos conocer el valor de y. Así por ejemplo,

• si $y = 1$ entonces	$x = 3 - y = 3 - 1 = 2,$ $\Downarrow$ $x = 2, y = 1$ es una solución,
• si $y = -7$ entonces	$x = 3 - y = 3 - (-7) = 10,$ $\Downarrow$ $x = 10, y = -7$ es una solución,
• si $y = 0$ entonces	$x = 3 - y = 3 - 0 = 3,$ $\Downarrow$ $x = 3, y = 0$ es una solución,

etc.

En lugar de ir dando distintos valores, de forma genérica podemos suponer que y adopta un cierto valor α

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = \alpha \end{cases}$$

cuya solución es evidentemente

$$\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \quad \text{o de otro modo} \quad (3 - \alpha, \alpha).$$

Dándole valores al parámetro α obtenemos todas las soluciones del sistema. Así tenemos,

$$
(3-\alpha,\alpha)\quad
\begin{array}{l}
\xrightarrow[\alpha=1]{} \ (2,1) \text{ o de otro modo} \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right., \\
\xrightarrow[\alpha=-7]{} \ (10,-7) \text{ o de otro modo} \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=-7 \end{array}\right., \\
\xrightarrow[\alpha=0]{} \ (3,0) \text{ o de otro modo} \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right., \\
\xrightarrow[\alpha=3]{} \ (0,3) \text{ o de otro modo} \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array}\right.
\end{array}
$$

y en general tendremos infinitas soluciones correspondientes a todos los demás posibles valores de α. El conjunto de todas las soluciones será

$$\{(3-\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

4)

$$\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ x-y+z-2w=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ x-y+z-2w=1 \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{cases}.$$

Puesto que hemos supuesto que conocemos las variables z y w, las sustituiremos por sus valores y dejaremos en el miembro izquierdo de cada igualdad solamente las variables que aún desconocemos,

$$\begin{cases} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{cases}.$$

De esta forma, nos queda por resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \end{cases}.$$

que tiene dos variables y dos ecuaciones. Para ello bastará con sumar o restar entre sí las dos ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{sumando las ecuaciones}]{} 2x=3-2\alpha+\beta \\ \xrightarrow[\text{restando las ecuaciones}]{} 2y=1-3\beta \end{array}$$

y la solución final es

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3-2\alpha+\beta}{2} \\ y = \frac{1-3\beta}{2} \\ z = \alpha \\ w = \beta \end{array}\right. \quad \text{o de otra forma, } (\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta).$$

El sistema tiene infinitas soluciones todas las cuales se obtienen dando valores a los parámetros α y β. Por ejemplo,

$$\begin{array}{l} \alpha = 1, \beta = 0 \ \rightarrow \ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) \\ \alpha = 1, \beta = 1 \ \rightarrow \ (1, -1, 1, 1) \end{array}$$

pudiéndose obtener las demás soluciones de esta manera. De este modo, el conjunto de todas las soluciones del sistema es

$$\{(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Cuando un sistema tiene una única solución, como en el ejemplo **4)**, no es preciso emplear ningún parámetro para resolverlo. Solamente cuando un sistema tenga varias soluciones necesitaremos utilizar parámetro para expresarlas.

Definición 4. *Dado el sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas ordenadas* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i = \alpha_i \end{array}\right. ,$$

resultante de añadir al sistema inicial la ecuación $x_i = \alpha_i$*, se dice que ha sido obtenido tomando la variable* x_i *como parámetro mediante el parámetro* α_i*.*

Por supuesto, en un sistema es posible tomar sucesivamente distintas variables como parámetro.

Definición 5. *Un sistema lineal se dice que es:*

- **compatible:** *Si tiene al menos una solución.*
- **incompatible:** *Si no tiene ninguna solución.*
- **indeterminado:** *Si tiene más de una solución.*
- **determinado:** *Si tiene una única solución.*
- **de solución d-dimensional:** *Si en el sistema se pueden seleccionar d variables tales que el sistema resultante al tomarlas como parámetros es compatible y determinado. Es decir, si todas sus soluciones se pueden expresar tomando d variables del sistema como parámetros.*

Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{cases} \begin{array}{l}\text{Compatible} \\ \quad {\scriptstyle \text{(con solución)}}\end{array} \begin{cases} \begin{array}{l}\text{Determinado} \\ \quad {\scriptstyle \text{(solución única)}}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Indeterminado} \\ \quad {\scriptstyle \text{(varias soluciones)}}\end{array} \begin{cases} \text{De solución 1 dim.} \\ \text{De solución 2 dim.} \\ \quad \vdots \\ \text{De solución } d \text{ dim.} \end{cases} \end{cases} \\ \begin{array}{l}\text{Incompatible} \\ \quad {\scriptstyle \text{(sin solución)}}\end{array} \end{cases}$$

Es evidente que:

- Un sistema homogéneo es siempre compatible.
- Un sistema que necesita parámetros para ser resuelto es es indeterminado.
- Un sistema compatible y determinado no necesita ningún parámetro (es de solución 0 dimensional).

Ejemplo 6. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Es evidente que no tiene ninguna solución.

Teorema 7 (Rouché-Frobenius). *Consideremos un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas expresado mediante su forma matricial:*

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. *Entonces:*

i) El sistema es compatible $\Leftrightarrow \mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A|B)$.

ii) El sistema es determinado $\Leftrightarrow \mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A|B) = n =$ *número de incógnitas.*

iii) El sistema tiene solución d-dimensional ($d > 0$*)* $\Leftrightarrow n - \mathrm{rango}(A) = d$.

Ejemplos 8.

1) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z + w = 3 \\ y - z + w = 2 \\ 2x + z + w = -1 \\ 2x + 3y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 4, \quad \text{rango}(A|B) = 4.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 4 = \text{n. variables}$$

y el sistema es compatible determinado.

2) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = -3 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 2.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2 < \text{n. variables}$$

y el sistema es compatible indeterminado de solución

$$n - \text{rango}(A) = 4 - 2 = 2\text{-dimensional}.$$

3) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = 7 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 3.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|B)$$

y el sistema es incompatible.

2 Método de eliminación gaussiana

Definición 9. *Dado el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

llamamos matriz detallada del sistema a la matriz

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \\ \begin{array}{r}\textit{filas}\\ \textit{numéricas}\end{array}\left\{\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\\vdots\\a\end{array}}\right. & \\ & \underbrace{\hphantom{a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n}}}_{\textit{columnas de variables}} \end{array} .$$

Filas numéricas de la matriz detallada son todas sus filas exceptuando la primera y columnas de variables de la matriz detallada son aquellas columnas cuyo primer elemento es alguna de las variables x_i.

Ejemplos 10.

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array}.$$

2) A la matriz detallada $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array}$ le corresponde

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Si modificamos la matriz detallada también estaremos modificando el sistema que le corresponde.

$$* \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\text{F2}\leftrightarrow\text{ F3}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

$$* \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\text{C1}\leftrightarrow\text{ C2}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} y & x & z & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ 2y - x + 3z = 2 \end{cases}$$

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = -2 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F3=F3+F2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

Definición 11. *Llamamos operación elemental para la matriz detallada de un sistema a cualquiera de las siguientes acciones:*

1. *Modificar el orden de las filas numéricas.*
2. *Modificar el orden de las columnas de variables.*
3. *Multiplicar una fila numérica por un número no nulo.*
4. *Sumar a una fila numérica otra fila numérica multiplicada por un número.*

Deberemos, entonces, seguir de forma iterativa los siguientes pasos:

1. Seleccionamos una de las columnas de variables.
2. En la columna seleccionada elegimos un elemento (pivote), no nulo, que deberá estar a altura distinta de los seleccionados en pasos anteriores.
3. Utilizando el pivote anulamos los elementos de la columna seleccionada.

Entonces decimos que el sistema está en forma *escalonada reducida.* Un sistema en forma escalonada reducida se resuelve de forma inmediata teniendo en cuenta los siguientes puntos:

- Si tras reducir la matriz mediante operaciones elementales aparece una fila con todos sus elementos nulos en las columnas de variables y el elemento en el término independiente no nulo, entonces el sistema será incompatible.

Ejemplo 12. En la siguiente matriz detallada,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array},$$

aparece una fila completa de ceros acompañada en los términos independientes por un elemento no nulo. Si escribimos la ecuación correspondiente a esta file tendríamos

$$0x + 0y + 0z + 0w = 2$$

y es evidente que no existe solución válida para esta ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.

- Despejaremos las variables correspondientes a las columnas que hemos reducido.
- Tomaremos como parámetro las variables correspondientes a las columnas que no han sido reducidas.

Ejemplo 13. En la siguiente matriz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{x} & y & \mathrm{z} & w & 0 \\ \hline \underline{\overline{1}} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \underline{\overline{2}} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x + y + w = -1, \\ -y + 2z + 3w = 2, \\ y = \alpha, \\ w = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \alpha - \beta, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ y = \alpha, \\ w = \beta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \alpha - \beta, \\ y = \alpha, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ w = \beta. \end{cases}$$

Ejemplos 14.
1) Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} .$$

La matriz detallada del sistema es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Obtengamos la matriz escalonada reducida. Para ello, iremos tomando distintos pivotes, todos ellos a diferentes alturas, para ir anulando cada columna.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\
5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\
3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{\text{F3 = F3 - 5F2} \\ \text{F4 = F4 - 3F2} \\ \text{F5 = F5 - 2F2} \\ \text{F6 = F6 - 3F2}}]{\text{(pivote=2º elemento de la 1ª columna)}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\underline{\overline{\mathbf{1}}} & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\
0 & 2 & -7 & -6 & -3 & -11 \\
0 & -1 & 5 & -4 & -2 & -8 \\
0 & 2 & 2 & -3 & -2 & -5 \\
0 & 1 & 4 & -5 & -3 & -8
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - F6} \\ \text{F3 = F3 + 2F6} \\ \text{F4 = F4 + F6} \\ \text{F5 = F5 - 2F6}}]{\text{(pivote=6º elemento de la 2ª columna)}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\underline{\overline{\mathbf{1}}} & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\
0 & 0 & 15 & -16 & -9 & -27 \\
0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -16 \\
0 & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\
0 & \underline{\overline{\mathbf{1}}} & 4 & -5 & -3 & -8
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$\xrightarrow[\substack{F2 = F2 + \frac{6}{9}\,F4 \\ F3 = F3 - \frac{15}{9}\,F4 \\ F5 = F5 + \frac{6}{9}F4 \\ F6 = F6 - \frac{4}{9}F4}]{\text{(pivote=4º elemento de la 3ª columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{9}}} & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & -1 & -\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F2 = F2 + F3 \\ F4 = F4 - 9F3 \\ F5 = F5 + F3 \\ F6 = F6 - F3}]{\text{(pivote=3º elemento de la 4ª columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{-1}}} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{9}}} & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right)$$

Reordenando y dividiendo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha \\ x_3 = -\frac{13}{9} - \frac{1}{9}\alpha \\ x_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases}$$

o bien en la forma $\quad (0, -\dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{9}\alpha, -\dfrac{13}{9} - \dfrac{1}{9}\alpha, \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\alpha, \alpha)$
en función del parámetro α.

2) Estudiemos ahora el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Para ello intentaremos llegar a su matriz escalonada.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - 2F4} \\ \text{F6 = F6 + F4}}]{\text{(pivote=4º elemento de la 4ª columna)}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - 3F5} \\ \text{F3 = F3 -4F5} \\ \text{F6 = F6 -F5}}]{\text{(pivote=5º elemento de la 3ª columna)}} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \hline -9 & -14 & 0 & 0 & -7 \\ -9 & -16 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 1 \\ 3 & 3 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En realidad podríamos seguir reduciendo columnas pero observamos que aparece una fila, la última, toda de ceros acompañando a un término independiente no nulo. Sin necesidad de llegar a la forma escalonada reducida deducimos que el sistema es incompatible indeterminado.

3 Regla de Cramer (Resolución de sistemas mediante cálculo de matriz inversa)

Dado un sistema cualquiera podemos siempre extraer su ecuación matricial que será de la forma

$$AX = B, \qquad A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Entonces, es posible aplicar las reglas para la manipulación de igualdades de matrices para resolver el sistema. En realidad, bastaría con despejar X de esa ecuación matricial para llegar a la solución en la forma

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Un sistema que satisface estas condiciones y que puede ser resuelto despejando la matriz de coeficientes se denomina 'sistema de Cramer'.

Propiedad 15. *Consideremos el sistema con n ecuaciones y variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dado mediante su ecuación matricial*

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $|A| \neq 0$ el sistema es compatible y determinado y su solución es

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^t \cdot B. \tag{1}$$

La última expresión de (1) es lo que suele conocerse como regla de Cramer. Generalmente se presenta la regla de Cramer desarrollando el producto matricial que aparece indicado en la propiedad despejando cada variable de forma particular. Adquiere entonces la siguiente formulación:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Véase que en estas fórmulas, para el cálculo de la variables i-ésima, aparece, en el denominador, el determinante de la matriz de coeficientes y, en el numerador, el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima de la matriz de coeficientes por los términos independientes del sistema.

Ejemplo 16. Intentemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 9, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

empleando las ideas anteriores. En primer lugar debemos cerciorarnos de que el sistema es realmente un sistema de Cramer, es decir, que tiene igual número de ecuaciones que de variables, lo cual es evidente, y que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Comenzamos pues calculando el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = -9 \neq 0.$$

Puesto que el determinante es no nulo, el sistema efectivamente es de Cramer. Ahora podemos seguir dos caminos para resolver el sistema. En primer lugar, podríamos emplear el cálculo matricial tal y como aparece en la ecuación (1) y, en segundo lugar, sería posible recurrir a las ecuaciones de la regla de Cramer. Veamos cómo procederíamos en ambos casos.

Método 1: Mediante cálculo matricial. Escribimos el sistema mediante su expresión matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene determinante distinto de cero, podremos calcular su inversa y despejarla en la última desigualdad de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular la inversa de la matriz de coeficientes empleando cualquiera de los métodos que conocemos para ello. En este caso, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & -7 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos ahora la inversa por su valor y efectuamos los productos matriciales que aparecen para obtener el resultado final

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & -7 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{-20}{9} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{-20}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ y = \frac{8}{9}, \\ z = \frac{-20}{9}. \end{cases}$$

Método 2: Mediante la regla de Cramer. Las fórmulas de Cramer para resolver este sistema serían las siguientes:

$$x = \frac{\left|\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 2 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ -\mathbf{1} & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|},\ y = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{9} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & -\mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|},\ z = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathbf{9} \\ 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}.$$

Véase que, en el numerador, para la primera variable sustituimos la primera columna de la matriz de coeficientes por los términos independientes del sistema, para la segunda variable sustituimos la segunda columna y para la tercera variable la tercera columna. Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes ya lo hemos calculado, tendremos únicamente que resolver los tres determinantes que aparecen en el numerador. Tenemos que

$$\left|\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 2 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ -\mathbf{1} & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = -15, \left|\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{9} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & -\mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}\right| = -8, \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathbf{9} \\ 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}\right| = 20,$$

con lo que finalmente

$$x = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \qquad y = \frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}, \qquad z = \frac{20}{-9} = -\frac{20}{9}.$$

Tenemos entonces, dos vías alternativas para resolver un sistema de Cramer. En principio, para sistemas con dos, tres o cuatro ecuaciones, los dos métodos suponen una dificultad equivalente y ambos, el basado en operaciones matriciales y el que utiliza la regla de Cramer, pueden usarse indistintamente.

Propiedad 17. *Consideremos el sistema con m ecuaciones y variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dado mediante su ecuación matricial*

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el sistema es compatible, en cuyo caso

$$\text{rango}(A \mid B) = \text{rango}(A) = r.$$

Consideremos el menor $\tilde{A}_{r\times r}$ de A obtenido como intersección de las filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_r$ de A y supongamos que $|\tilde{A}| \neq 0$. Entonces:

i) El sistema compuesto únicamente por las ecuaciones i_1-ésima, i_2-ésima, ..., i_r-ésima del sistema inicial tiene las mismas soluciones que éste.

ii) El sistema obtenido al tomar como parámetro toda variable que no sea alguna de $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ es determinado.

Ejemplo 18. En principio, para resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 9 \\ 3x_1 + 7x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$$

no sería posible aplicar el método de Cramer. Sin embargo podemos recurrir a la **Propiedad 17**.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -18 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & -18 & -5 & -6 \end{array}\right) = 3$$

el sistema es compatible indeterminado de solución 1-dimensional.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

y por tanto dicho menor es regular, tiene inversa.

Marquemos en la matriz de coeficientes del sistema las filas y columnas correspondientes al menor seleccionado,

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{ecuación } 1^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 2^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 4^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 5^{\text{a}} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & -5 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -7 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{6} \\ 3 & 7 & -18 & -5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Eliminemos las ecuaciones que no intervienen en el menor y tomemos como parámetro las variables que tampoco lo hacen. Tras ello, el sistema queda de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9 \\ x_3 = \alpha \end{array}\right. .$$

Puesto que, en función del parámetro α, ya conocemos el valor de x_3, resolveremos solamente el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9 \end{array}\right. .$$

Pero ahora este sistema es de Cramer y puede ser resuelto despejando en la ecuación matricial que es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix}.$$

Despejando y calculando la inversa, finalmente tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -13 & 5 \\ -10 & 8 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha \\ 3\alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema será entonces,

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \alpha, \\ x_2 = 3\alpha - 1, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{ó lo que es lo mismo } (2 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha, 1).$$

4 Expresión de la solución de un sistema mediante combinaciones lineales

En esta sección veremos que también podemos describir las soluciones de un sistema mediante combinaciones lineales.

Definición 19. *Dado un subconjunto de uplas $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y una upla fija $p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de uplas que se obtiene si sumamos la upla fija, p, a todas las uplas de C, se denota $p + C$. Es decir:*

$$p + C = \{p + c : c \in C\}.$$

Ejemplo 20. Tomemos el siguiente conjunto de 2-uplas

$$C = \{(1,0), (2,3), (-1,4)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

y consideremos la upla fija $(2,-1) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} p + C &= (2,-1) + \{(1,0), (2,3), (-1,4)\} \\ &= \{(2,-1) + (1,0), (2,-1) + (2,3), (2,-1) + (-1,4)\} \\ &= \{(3,-1), (4,2), (1,3)\}. \end{aligned}$$

Ejemplos 21.

1) Consideremos el sistema lineal,

$$S \equiv \begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \end{cases}.$$

Empleando los parámetros α y β la solución se escribe en la forma

$$\begin{cases} x = \frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \\ y = \frac{1-3\beta}{2}, \\ z = \alpha, \\ w = \beta \end{cases} \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad (\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta).$$

Estas dos últimas representaciones son lo que se denominan expresiones paramétricas de la solución del sistema.

$$\left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta\right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{3}{2}-\alpha+\frac{1}{2}\beta}_{\substack{\text{Sin parámetros: } \frac{3}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: -\alpha \\ \text{Parte para } \beta: \frac{1}{2}\beta}}, \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\beta}_{\substack{\text{Sin parámetros: } \frac{1}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: -\frac{3}{2}\beta}}, \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{Sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: \alpha \\ \text{Parte para } \beta: 0}}, \underbrace{\beta}_{\substack{\text{Sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: \beta}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)}_{\text{Parte sin parámetros}} + \underbrace{(-\alpha, 0, \alpha, 0)}_{\text{Parte para } \alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\beta, -\frac{3}{2}\beta, 0, 1\right)}_{\text{Parte para } \beta}$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0\right) + \alpha(-1, 0, 1, 0) + \beta\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right)$$

En definitiva tenemos que

$$(\frac{3-2\alpha+\beta}{2},\frac{1-3\beta}{2},\alpha,\beta)=$$

$$=\underbrace{(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)}_{\text{Upla fija}}+\underbrace{\alpha(-1,0,1,0)+\beta(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)}_{\substack{\text{Combinación lineal de}\\ (-1,0,1,0)\text{ y }(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)}}$$

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema queda:

$$\{\underbrace{(\frac{3-2\alpha+\beta}{2},\frac{1-3\beta}{2},\alpha,\beta)}_{(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)\text{ más un elemento de }\langle(-1,0,1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)\rangle}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=$$

$$=(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)+\langle(-1,0,1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)\rangle.$$

2) Calculemos la solución del siguiente sistema expresándola en su forma paramétrica y mediante combinaciones lineales,

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Es un sistema de solución 1-dimensional:

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha).$$

Esta sería la solución del sistema expresada en forma paramétrica. A partir de ella, separando las uplas correspondientes a cada parámetro (en este caso tenemos un único parámetro α) y a los términos sin parámetro, tenemos,

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha) = (0,0,0,0,0) + \alpha(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Por tanto, la expresión de la solución del sistema mediante combinaciones lineales es

$$(0,0,0,0,0) + \langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle.$$

Véase que:

- Sistema homogéneo: upla fija nula, puede eliminarse.
- Sistema completo: upla fija no nula.

5 Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

5.1 Definición y propiedades

Definición 22. *Consideremos el conjunto* $\mathbb{R}^n$*.*

Llamamos subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ *a cualquier subconjunto* $H \subseteq \mathbb{R}^n$*, formado por las soluciones de un sistema lineal homogéneo con variables* $(x_1, \ldots, x_n)$*,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Diremos entonces que dicho sistema constituye un conjunto de ecuaciones implícitas para el subespacio vectorial H *y utilizaremos la notación*

$$H \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

En la definición anterior podemos escribir las ecuaciones implícitas mediante su expresión matricial,

$$AX = 0,$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces abreviadamente tenemos que

$$H \equiv AX = 0.$$

Y entonces

$$H = \{p \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } Ap = 0\}.$$

Un aspecto fundamental en la teoría de subespacios vectoriales reside en el hecho de que siempre pueden ser obtenidos como el conjunto de combinaciones lineales de ciertos vectores.

Propiedad 23. *Para todo subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ existen $v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Decimos entonces que el subespacio vectorial H está generado por $v_1, v_2, \ldots, v_d$ o también que $v_1, v_2, \ldots, v_d$ son un sistema de generadores de H.

Ejemplos 24.
1) Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - 2w = 0 \end{cases}$$

e intentemos representarlo mediante el conjunto de combinaciones lineales de ciertas uplas. Para ello, en primer lugar resolvemos el sistema:

$$(\frac{-2\alpha + \beta}{2}, \frac{-3\beta}{2}, \alpha, \beta).$$

Empleando las propiedades de la suma y producto de matrices,

$$(\frac{-2\alpha + \beta}{2}, \frac{-3\beta}{2}, \alpha, \beta)$$
$$= \alpha(-1, 0, 1, 0) + \beta(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$$

y por tanto

$$H = \langle (-1, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1) \rangle.$$

2) Calculemos ahora un sistema de generadores para el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Es un sistema de solución 1-dimensional:

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha).$$

Además,

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha) = \alpha(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Por tanto,

$$H = \langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle.$$

Propiedad 25. $\mathbb{R}^n$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$. *Además,*

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

5.2 Bases y dimensión

Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Por supuesto, interesa que esa representación sea los más simple posible y que involucre cuantos menos vectores mejor.

Definición 26. *Llamamos base del subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ a cualquier conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:*

- $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle$. *Es decir, son un sistema de generadores de H.*
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ *es independiente.*

Definición 27. *Llamamos dimensión del subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$, y la notamos $\dim(H)$, al número de vectores que integra una cualquiera de sus bases.*

Ejemplo 28.

Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \begin{cases} x - 2z + 3w = 0 \\ y - 4z + 6w = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, es sencillo ver que un sistema de generadores de H viene dado por

$$\{(2,4,1,0),(1,2,2,1)\}.$$

Es evidente que $(2,4,1,0)$ y $(1,2,2,1)$ son independientes. En consecuencia

$$\{(2,4,1,0),(1,2,2,1)\}$$

es una base de H y por tanto, al aparecer dos vectores en la base, tenemos que $\dim(H) = 2$.

Propiedad 29. *Consideremos el subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por sus ecuaciones implícitas*

$$H \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \textit{. Entonces:}$$

$$\dim(H) = n - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 30.

Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \begin{cases} x - 2z + 3w = 0 \\ y - 4z + 6w = 0 \end{cases},$$

puesto que

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} = 2,$$

tenemos que

$$\dim(H) = 4 - 2 = 2.$$

Nota. En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar, para $i = 1, \ldots, n$, los vectores coordenados (las n-uplas coordenadas)

$$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Es fácil comprobar que $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ ya que son independientes y $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$. A la base B_c la llamaremos base canónica de $\mathbb{R}^n$ y puesto que tiene n elementos concluimos que

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Propiedad 31. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial con dimensión d. Entonces:*

1. *Cualquier conjunto de vectores de H con más de d elementos es siempre dependiente.*
2. *Ningún conjunto de vectores de H con menos de d elementos puede generar todo H.*
3. *Un conjunto de vectores con d elementos que sea independiente genera a todo H (y es por tanto una base de H).*
4. *Un sistema de generadores de H con d elementos es independiente (y por tanto una base de H).*

Propiedad 32.

1. *Cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con más de n elementos es siempre dependiente.*
2. *Ningún conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con menos de n elementos puede generar todo $\mathbb{R}^n$.*
3. *Un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ que sea independiente genera a todo $\mathbb{R}^n$ (y es por tanto una base de $\mathbb{R}^n$).*
4. *Un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ con n elementos es independiente (y por tanto una base de $\mathbb{R}^n$).*

5.3 Coordenadas respecto a una base

Definición 33. *Dado el subespacio vectorial H y la base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ de H, llamamos coordenadas de $v \in H$ respecto a la base B a los coeficientes ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ tales que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d.$$

Ejemplos 34.

1) Tomemos la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Dado cualquier vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

y por tanto las coordenadas de v respecto a B_c son $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Es decir, las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica son él mismo.

2) Consideremos el subespacio vectorial H que tiene como base a

$$B = \{(2,0,1,0), (-1,1,1,1), (0,1,-1,1)\}.$$

Supongamos que sabemos que $(5,2,-2,2) \in H$ y que necesitamos calcular sus coordenadas respecto a B. Tenemos que las coordenadas serán los coeficientes (α, β, γ) tales que

$$(5,2,-2,2) = \alpha(2,0,1,0) + \beta(-1,1,1,1) + \gamma(0,1,-1,1).$$

Realizando las operaciones indicadas en esta igualdad,

$$(5,2,-2,2) = (2\alpha - \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta - \gamma, \beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = -2 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $\gamma = 3$. Por tanto las coordenadas de $(5,2,-2,2)$ son $(2,-1,3)$.

En realidad, tal y como vemos en el ejemplo anterior, el cálculo de las coordenadas respecto a una base se reduce siempre a resolver un sistema lineal de ecuaciones.