# Capítulo 4.
# Matrices.

# Objetivos del tema

- Concepto de matriz y representación de datos mediante matrices y uplas.
- Operaciones entre matrices.
- Dependencia e independencia de uplas. Rango de una matriz.
- Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales.
- Determinante de una matriz. Cálculo de la matriz inversa.

# 1 Definiciones básicas

### Definición 1.

- *Dado $n \in \mathbb{N}$, llamamos $n$-upla a cualquier conjunto ordenado de $n$ números reales de la forma*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

  - *El conjunto de todas las $n$-uplas se denota $\mathbb{R}^n$. Por tanto,*

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

  - *Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se denominan elementos de la $n$-upla.*
  - *Dos $n$-uplas son iguales si tienen los mismos elementos en las mismas posiciones. Es decir,*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \vdots, \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

  - *Las 2-uplas se denominan pares. Las 3-uplas se denominan ternas.*

- *Llamamos matriz de números reales con $m$ filas y $n$ columnas o de tipo $m \times n$ (o de orden $m \times n$) a un conjunto de números reales ordenados en la forma,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

*donde para cada $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ es el número situado en la fila $i$ y la columna $j$.*

  - *Los números que componen la matriz se llaman elementos o coeficientes de la matriz.*
  - *El elemento $(i, j)$ de la matriz es aquel que se encuentra en la fila $i$ y la columna $j$.*
  - *Las matrices se nombran mediante letras mayúsculas ($A$, $B$, $C$, etc.). Dada una matriz, $A$, sus elementos se designan de forma genérica mediante la correspondiente letra minúscula y los subíndices que indican la fila y columna. Así el elemento $(i, j)$ de la matriz $A$ será $a_{ij}$.*

- *El conjunto de todas las matrices de tipo $m \times n$ se denota como $\mathcal{M}_{m\times n}$:*

$$\mathcal{M}_{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j \right\}.$$

*Dada una matriz, $A$, en ocasiones denotaremos que es de tipo $m \times n$ escribiendo $A_{m\times n}$.*

- *La matriz genérica* $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *se nota abreviadamente mediante* $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ *ó* $(a_{ij})_{m\times n}$.

- *Dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{\overline{m}\times\overline{n}} \in \mathcal{M}_{\overline{m}\times\overline{n}}$ son iguales si se verifica que:*

$$\begin{cases} m = \overline{m} \\ n = \overline{n} \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n \end{cases}.$$

*Es decir, si son del mismo tipo y tienen los mismos elementos situados en el mismo sitio.*

- *La $n$-upla $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ puede escribirse en forma de matriz fila o matriz columna en la forma*

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad v = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

**Ejemplos 2.**

**1)** En numerosas ocasiones un solo número basta para describir el estado de cierto objeto o situación del mundo real. Por ejemplo, si estamos estudiando la rentabilidad de una empresa en distintos años, en principio bastará con indicar los ingresos que obtiene en cada momento:

- El primer año los beneficios fueron de 3 millones de euros.
- El segundo año los beneficios fueron 3.5 millones de euros.
- El tercer año los beneficios fueron 3.9 millones de euros.

Sin embargo, un estudio más detallado de la rentabilidad de la empresa exigiría tener en cuenta no sólo los beneficios finales sino también el volumen de ingresos y gastos:

- El primer año, ingresos 13 millones, gastos 10 millones.
- El segundo año, ingresos 14 millones, gastos 10.5 millones
- El tercer año, ingresos 14.3 millones, gastos 10.4 millones

Para abreviar, podríamos convenir en presentar los datos de cada año ordenadamente en forma de fila o de columna del siguiente modo,

$$\boxed{\text{(ingresos,gastos)}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \text{ingresos} \\ \text{gastos} \end{pmatrix}}$$

De esta manera:

- El primer año los datos de rentabilidad son (13,10) ó $\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$.
- El segundo año los datos de rentabilidad son (14,10.5) ó $\begin{pmatrix} 14 \\ 10.5 \end{pmatrix}$.
- El tercer año los datos de rentabilidad son (14.3,10.4) ó $\begin{pmatrix} 14.3 \\ 10.4 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto lo que hacemos es utilizar elementos de $\mathbb{R}^2$ para representar nuestra información.

| **Información del problema** | | **Representación** |
|---|---|---|
| Dos datos: ingresos y gastos en cierto momento | $\Rightarrow$ | Dos números reales ordenados |
| | | $\Downarrow$ |
| | | elemento de $\mathbb{R}^2$ |
| | | 2-upla |

La necesidad de plantear modelos matemáticos para fenómenos en los que intervienen simultáneamente varios datos es la que motiva la utilización de

- $\mathbb{R}^2$, cuando tenemos dos datos.
- $\mathbb{R}^3$, cuando tenemos tres datos.
- $\mathbb{R}^n$, cuando tenemos $n$ datos.

Incluso es posible que dispongamos de datos que requieran estructuras más complejas. Por ejemplo, pudiera ser que dispusiéramos de la información de tres empresas diferentes para un año concreto:

- Datos de la primera empresa: (13,10).
- Datos de la segunda empresa: (19,15).
- Datos de la tercera empresa: (17,12).

Incluso es posible que dispongamos de datos que requieran estructuras más complejas. Por ejemplo, pudiera ser que dispusiéramos de la información de tres empresas diferentes para un año concreto:

- Datos de la primera empresa: (13,10).
- Datos de la segunda empresa: (19,15).
- Datos de la tercera empresa: (17,12).

Podemos representar conjuntamente estos datos por filas,

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{ingresos} & \text{gastos} \end{array} \\ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ empresa} \\ 2^{\text{a}} \text{ empresa} \\ 3^{\text{a}} \text{ empresa} \end{array} & \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 19 & 15 \\ 17 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Incluso es posible que dispongamos de datos que requieran estructuras más complejas. Por ejemplo, pudiera ser que dispusiéramos de la información de tres empresas diferentes para un año concreto:

- Datos de la primera empresa: (13,10).
- Datos de la segunda empresa: (19,15).
- Datos de la tercera empresa: (17,12).

o también podríamos haberlos escrito en columna como,

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ingresos} \\ \text{Gastos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{1ª empresa} & \text{2ª empresa} & \text{3ª empresa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13 & 19 & 17 \\ 10 & 15 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tanto en un caso como en otro lo importante es fijar un criterio para ordenar los datos. En ambos casos, los datos ordenados en forma de cuadro constituyen lo que se denomina matriz.

- $\begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 19 & 15 \\ 17 & 12 \end{pmatrix}$ es una matriz con tres filas y dos columnas,
- $\begin{pmatrix} 13 & 19 & 17 \\ 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}$ es una matriz con dos filas y tres columnas.

**2)** Tomemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es de orden $2 \times 3$ ,

- el elemento $(2,1)$ de $A$ es 0,
- el elemento $(2,3)$ de $A$ es 4,
- el elemento $(3,1)$ de $A$ no existe,
- etc.

Así mismo, tenemos que $A$ es un elemento del conjunto de todas las matrices de tipo $2 \times 3$, es decir, $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$.

**Definición 3** (Concepto básicos sobre matrices).

- *Dada* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *llamamos submatriz de* $A$ *a cualquier matriz obtenida suprimiendo en* $A$ *filas y/o columnas.*
- *Una matriz de la forma* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}_{1\times n}$ *de tipo* $1\times n$ *que tienen una única fila se denomina matriz fila.*

---

**Ejemplo 4.** Las matrices $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 4}$, $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ ó $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}_{1\times 2}$ son matrices fila.

---

- *Una matriz de la forma* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ *de tipo* $n\times 1$ *que tiene una única columna se denomina matriz columna.*

---

**Ejemplo 5.** Las matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{4\times 1}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}_{2\times 1}$ son matrices columna.

---

- *Dadas las uplas* $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$*:*
  - *La matriz obtenida al agrupar por columnas* $v_1$*,* $v_2$*,* $\dots$*,* $v_n$ *se denota*

    $$\left(v_1 \;\middle|\; v_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; v_n\right)$$

    *y tendrá* $m$ *filas y* $n$ *columnas.*
  - *La matriz obtenida al agrupar por filas* $v_1$*,* $v_2$*,* $\dots$*,* $v_n$ *se denota*

    $$\begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \vdots \\ \hline v_n \end{pmatrix}$$

    *que tendrá* $n$ *filas y* $m$ *columnas. Es decir, es de tipo* $n \times m$*.*

**Ejemplo 6.** Tomemos $v_1 = (2,3,-1,0)$, $v_2 = (6,2,3,3)$, $v_3 = (6,4,-9,-1)$. La matriz por bloques obtenida al agrupar por columnas $v_1$, $v_2$ y $v_3$ es

$$\left(v_1 \mid v_2 \mid v_3\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}.$$

La matriz por bloques que obtenemos agrupando $v_1$, $v_2$ y $v_3$ es

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}.$$

- *Una matriz con $n$ filas y $n$ columnas (de tipo $n \times n$) se dice que es una matriz cuadrada de orden $n$. El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden $n$ se designa mediante $\mathcal{M}_n$.*

- *Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ llamamos matriz transpuesta de $A$ y la notamos $A^t$, a la matriz cuya primera fila es la primera columna de $A$, cuya segunda fila es la segunda columna de $A$, $\ldots$, cuya $n$-ésima fila es la $n$-ésima columna de $A$. Son evidentes los siguientes hechos:*

    - $A \in \mathcal{M}_{m\times n} \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$.
    - $(A^t)^t = A$.
    - $A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{n\times m}$. *Es decir el elemento situado en $A$ en la posición $(i,j)$ al hacer la traspuesta pasa a la posición $(j,i)$.*

**Ejemplos 7.**
**1)**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \end{array} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array}.$$

Véase que la matriz inicial es de tipo $2 \times 3$ y al hacer la traspuesta obtenemos una de tipo $3 \times 2$. Es evidente además que si volvemos a hacer la traspuesta a la la última matriz obtendremos nuevamente la primera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{tt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- *Llamamos matriz cero de tipo* $m \times n$ *y la notamos* $0_{m\times n}$ *o simplemente* $0$*, a la matriz:*

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

*Es decir, la matriz* $0_{m\times n}$ *es la matriz de tipo* $m \times n$ *que tienen todos sus elementos iguales a cero.*

---

**Ejemplo 8.** La matriz cero de tipo $2 \times 4$ es

$$0_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz cero de tipo $3 \times 3$ es

$$0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En general, podemos considerar también,

$$0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

**Definición 9** (Conceptos básicos para matrices cuadradas)**.**

- *Llamamos diagonal principal de la matriz* $A_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ *a la matriz fila* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. *La diagonal principal es por tanto la matriz fila formada por los elementos de* $A$ *que están recuadrados en la representación siguiente:*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

- *Llamamos traza de* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ *y la notamos* $\mathrm{tr}(A)$ *a la suma de los elementos de la diagonal principal:*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

---

**Ejemplo 10.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ entonces tenemos que

- la diagonal principal de $A$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.
- la traza de $A$ es $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 + 9 = 12$.

---

- *Decimos que* $(a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ *es:*
  - **triangular superior** *si todos los elementos inferiores a la diagonal principal son nulos,*
  - **triangular inferior** *si todos los elementos superiores a la diagonal principal son nulos,*
  - **diagonal** *si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos.*

**Ejemplos 11.**

**1)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares superiores.

**2)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares inferiores.

**3)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices diagonales.

- *Llamamos matriz identidad de orden $n$ y la notamos $I_n$ a la matriz cuadrada de orden $n$ que es diagonal y tal que todos los elementos de su diagonal principal son iguales a 1. Es decir,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

---

**Ejemplo 12.**

- La matriz identidad de orden 1 es $I_1 = (1)$,
- la matriz identidad de orden 2 es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- la matriz identidad de orden 3 es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

- *Decimos que* $(a_{ij})_{n\times n}$ *es simétrica si* $A = A^t$ *o, lo que es lo mismo:*

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

- *Decimos que* $(a_{ij})_{n\times n}$ *es antisimétrica si se verifica que:*

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

  Obsérvese que si se cumple lo anterior, tomando $i = j$ obtenemos que

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

---

**Ejemplos 13.**

**1)** Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

y por lo tanto $A$ es una matriz simétrica. Véase que los elementos $(i, j)$ y $(j, i)$ de la matriz coinciden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2)** La matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica ya que, si notamos $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, tenemos que

$*$ $b_{12} = -2 = -b_{21}$.

$*$ $b_{13} = 3 = -b_{31}$.

$*$ $b_{23} = -4 = -b_{32}$.

$*$ $b_{11} = 0, b_{22} = 0, b_{33} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los elementos situados en los extremos de una misma flecha han de ser opuestos y los de la diagonal (encerrados en un círculo) nulos.

**Nota.** Las matrices diagonales se suelen notar, con objeto de abreviar la escritura, indicando únicamente los elementos de su diagonal principal. Así por ejemplo:

$$\text{La matriz } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ se puede escribir como } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

En forma genérica, a la matriz diagonal $A \in \mathcal{M}_n$ cuya diagonal principal es $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ la denotaremos mediante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

# 2 Operaciones con matrices

## 2.1 Suma de matrices

**Definición 14.** *Dadas dos matrices del mismo tipo* $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *definimos la suma de* $A$ *y* $B$ *como la matriz* $A+B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *determinada mediante:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

*Es decir:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplos 15.**

**1)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

**2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0_{3\times 4}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

**3)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}.$

**4)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ es una operación que no se puede efectuar por no ser las dos matrices del mismo tipo.

**5)**

- $(2,3,-1)+(6,0,2)=(8,3,1)$.
- $(3,-2)-(-3,2)=(0,0)$.
- $(4,3,2,1,1)+(-2,4,3,0,-1)=(2,7,5,1,0)$.
- $(3,2,1)+(2,4,6,2)$ es una operación que no se puede realizar ya que tenemos tipos diferentes.

**Propiedades 16.** *$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$:*

1. *Propiedad conmutativa: $A + B = B + A$.*
2. *Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.*
3. *$A + 0 = A$ (donde $0 = 0_{m\times n}$).*
4. *Dada $A = (a_{ij})_{m\times n}$ definimos la matriz opuesta de $A$ como*
$$-A = (-a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$$
   *y entonces se verifica que:*
$$A + (-A) = 0.$$
5. *$(A + B)^t = A^t + B^t$.*
6. *$A$ es antisimétrica $\Leftrightarrow A^t = -A$*

**Nota** (Resta de matrices)**.** De igual manera que se define la suma es igualmente fácil introducir la resta de matrices. De hecho, tal y como vemos a continuación, podemos definir la resta a partir de la suma.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ definiremos la resta o diferencia entre $A$ y $B$ como la matriz

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

**Ejemplos 17.**

**1)** $-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

**2)** $-0_{2\times 2} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & -0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}.$

**3)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

**4)** $-(3, 2, -1) = (-3, -2, 1).$

**5)** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = -A$, por tanto $A$ es una matriz antisimétrica.

## 2.2 Producto de matrices por un número real

**Definición 18.** *Dada una matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y un número real* $r \in \mathbb{R}$, *definimos el producto de* $r$ *por* $A$ *y lo notamos como* $r \cdot A$ *ó* $A \cdot r$ *como:*

$$r \cdot A = A \cdot r = (r \cdot a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

*Es decir:*

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & \dots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & r \cdot a_{m2} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que si multiplicamos una matriz de tipo $m \times n$ por un número real obtenemos como resultado una matriz de tipo $m \times n$.

**Ejemplos 19.**

**1)** $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**2)** $8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 2}$.

**3)** $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}$.

**Propiedades 20.** $\forall r, s \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

1. *Propiedad distributiva:* $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$.
2. *Propiedad distributiva:* $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$.
3. $1 \cdot A = A$.
4. $(-1) \cdot A = -A$.
5. $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$.
6. $r \cdot 0 = 0$, $0 \cdot A = 0$.
7. $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$.

## 2.3 Producto de dos matrices

**Definición 21.** *Dadas* $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}$ *definimos el producto de* $A$ *y* $B$ *y lo notamos* $A \cdot B$*, como la matriz*

$$A\cdot B = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} \in \mathcal{M}_{m\times p}.$$

*Es decir, en el lugar* $(i,j)$ *de la matriz* $A \cdot B$ *se encuentra el elemento*

$$\begin{array}{c} \textit{fila } i \textit{ de } A \\ a_{i1}\ b_{1j}\ +\ a_{i2}\ b_{2j}\ +\ a_{i3}\ b_{3j}\ +\ \dots\ +\ a_{in}\ b_{nj} \\ \textit{columna } j \textit{ de } B \end{array},$$

*que se obtiene como el producto de la fila* $i$ *de* $A$ *por la columna* $j$ *de* $B$*.*

**Ejemplos 22.**

**1)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{fila 1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{columna 1}}}_{=2\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 3=9} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{fila 1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{columna 2}}}_{=2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1=5} \\ \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{fila 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{columna 1}}}_{=0\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 3=1} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{fila 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{columna 2}}}_{=0\cdot 1+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=-1} \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

**2)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} =$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 1}}_{=1\cdot 1+3\cdot 0+6\cdot 0=1} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 2}}_{=1\cdot 0+3\cdot 1+6\cdot 0=3} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 3}}_{=1\cdot 0+3\cdot 0+6\cdot 1=6} \\ \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 1}}_{=3\cdot 1+9\cdot 0+(-1)\cdot 0=3} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 2}}_{=3\cdot 0+9\cdot 1+(-1)\cdot 0=9} & \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{fila } 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{columna } 3}}_{=3\cdot 0+9\cdot 0+(-1)\cdot 1=-1} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}.$

**3)** $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0_{1\times 3}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 2}.$

**4)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 9 & 27 & 27 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$

**5)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 9 + 3\cdot 1 \end{pmatrix}_{1\times 1} = \begin{pmatrix} 31 \end{pmatrix}_{1\times 1} \equiv$ 31.

**6)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ es una operación que no se puede efectuar pues no concuerdan los tipos de matrices.

---

**Nota.** Obsérvese que el producto de una matriz tipo $m \times n$ por una matriz $n \times p$ proporciona una matriz $m \times p$. Esquemáticamente tenemos:

$$m \quad \times \quad n \quad \cdot \quad n \quad \times \quad p$$

han de ser iguales

resultado tipo $m \times p$

**Propiedades 23.**

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times p}, C \in \mathcal{M}_{p\times r}$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

2. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times p}, r \in \mathbb{R}$

$$A \cdot (r \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B).$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

4. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

5. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$$\begin{array}{lcl} I_m \cdot A = A & , & 0_{p\times m} \cdot A_{m\times n} = 0_{p\times n} \\ A \cdot I_n = A & , & A_{m\times n} \cdot 0_{n\times p} = 0_{m\times p} \end{array}.$$

6. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times p}$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

7. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A \cdot B \in \mathcal{M}_n.$

*8. Dadas* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}_{n\times n}$,
*matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n$, *tenemos que:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & & & \\ & a_2 \cdot b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \cdot b_n \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

---

**Ejemplo 24.** Si consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

podemos efectuar su producto de la manera habitual. Sin embargo, al ser ambas diagonales, basta con multiplicar los elementos de la diagonal principal de modo que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)\cdot(-3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

---

**Nota.** Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times r}$, nos preguntamos cuándo será posible efectuar tanto la operación $A \cdot B$ como la operación $B \cdot A$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si es posible efectuar } A_{m\times n} \cdot B_{p\times r} \;\Rightarrow\; n = p \\ \text{si es posible efectuar } B_{p\times r} \cdot A_{m\times n} \;\Rightarrow\; r = m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{m\times n} \\ B \in \mathcal{M}_{n\times m} \end{array}\right.$$

$$\text{en cuyo caso } \left\{\begin{array}{c} A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times m} \\ B \cdot A \in \mathcal{M}_{n\times n} \end{array}\right. .$$

En particular, si $A, B \in \mathcal{M}_n$ obtenemos $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_n$.

**Ejemplos 25.**

**1)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ no puede ser calculada.

**2)** Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ puesto que son de tipo $2 \times 3$ y $3 \times 2$, podremos calcular tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$. Sin embargo tenemos que:

$\star\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$\star\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Obtenemos pues que $A \cdot B \neq B \cdot A$ y además ni siquiera son matrices del mismo tipo.

**3)** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces podemos calcular tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ y además $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_2$, sin embargo:

$\star$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\star$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Luego en este caso $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son del mismo tipo pero son matrices distintas.

**4)** Dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se verificará que

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

con lo que en esta situación los productos $A \cdot I_n$ y $I_n \cdot A$ si coinciden.

---

### 2.3.1 Potencia de matrices

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ será posible efectuar el producto

$$A_{m\times n} \cdot A_{m\times n}$$

solamente cuando $m = n$ con lo cual $A$ sería una matriz cuadrada de orden $n$. En aquellos casos en los que $A$ no sea una matriz cuadrada no será nunca posible efectuar la operación $A \cdot A$.

**Definición 26.** *Dada $A \in \mathcal{M}_n$ definimos, para $k \in \mathbb{N}$,*

$$A^k = A \cdot A \cdot A \cdot \overset{k)}{\cdots} \cdot A \in \mathcal{M}_n.$$

**Ejemplos 27.**

**1)** Dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser cuadrada podremos calcular sus potencias.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos también calcular $A^3$.

$$A^3 = A{\cdot}A{\cdot}A = A{\cdot}A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

En realidad, para calcular las sucesivas potencias de la matriz $A$ ($A^4$, $A^5$, etc.), podemos repetir este proceso multiplicando la última potencia obtenida nuevamente por la matriz $A$ para obtener así la potencia siguiente.

Por ejemplo, si repetimos el proceso una vez más obtendremos $A^4$:

$$A^4 = A \cdot A^3 =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{La matriz } A,} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{multiplicada por la} \\ \text{potencia anterior, } A^3,}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 40 & 9 & 8 \\ 25 & 5 & 10 \\ 30 & 3 & 11 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{proporciona la potencia} \\ \text{siguiente, } A^4.}}$$

Cuando la matriz a la que deseamos calcular la potencia es diagonal, entonces el cálculo de potencias se simplifica de forma notable.

**Propiedades 28.**

1. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *y* $k, p \in \mathbb{N}$
$$A^k \cdot A^p = A^p \cdot A^k = A^{k+p}.$$

2. *Dada la matriz diagonal* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$

   *y* $k \in \mathbb{N}$ *se verifica que:*
$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

**Ejemplos 29.**

**1)** $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2)** Dada $A \in \mathcal{M}_n$ se verifica que

$$\begin{aligned} A^3 \cdot A^2 &= (A \cdot A \cdot A) \cdot (A \cdot A) = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A = A^5, \\ A^2 \cdot A^3 &= (A \cdot A) \cdot (A \cdot A \cdot A) = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A = A^5. \end{aligned}$$

**3)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^3 & 2^3 & 0^3 \\ 0^3 & (-1)^3 & 1^3 \\ 1^3 & 2^3 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Matriz inversa

Por el tipo de operaciones que ello implica, solamente una matriz cuadrada puede tener inversa. Para introducir estos nuevos conceptos comenzaremos haciendo algunas consideraciones:

- Dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$ sabemos que
$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A,$$
$(\forall r \in \mathbb{R},\ 1 \cdot r = r \cdot 1 = r)$. Es decir, $I_n$ es la unidad de $\mathcal{M}_n$.

- Dados $a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$, la división de $a$ entre $b$ puede calcularse como
$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1},$$
donde $b^{-1}$ es lo que se denomina inverso del número $b$.

- Dado $b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$, sabemos que su inverso es otro número real que escribimos como $b^{-1}$ y que es el único número que verifica
$$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1.$$
El inverso de $b$ es aquel número por el que hay que multiplicar $b$ para obtener 1.

- No todo número real tiene inverso ya que no es posible calcular $0^{-1} = \frac{1}{0}$ puesto que no hay ningún número $x$ tal que
$$0 \cdot x = 1.$$

Por todo lo anterior, parece claro que, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, si queremos definir $A^{-1}$, habremos de encontrar otra matriz, $B \in \mathcal{M}_n$, tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

y entonces esa matriz $B$ será la inversa de $A$, es decir, $A^{-1} = B$.

**Definición 30.** *Dada $A \in \mathcal{M}_n$, si existe, llamamos matriz inversa de $A$ y la notamos $A^{-1}$ a la única matriz que verifica:*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

**Ejemplos 31.**

**1)** Dada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, según la definición que hemos dado, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2)** Dada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ si tomamos $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

y por ello $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

**3)** Dada $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta propiedades que conocemos acerca del producto de matrices diagonales es fácil calcular la inversa tomando los inversos de los elementos de la diagonal principal de $B$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

y por ello $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix}$.

**4)** Nos preguntamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. Si $A$ tiene inversa, ésta será también una matriz cuadrada de orden 2 y por lo tanto de la forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces tendremos que

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=1 & b+d=1 \\ a+c=0 & b+d=0 \end{cases},$$

lo cual es imposible ya que es evidente que la cantidad $a+c$ no puede ser al mismo tiempo igual a 1 e igual a 0. Deducimos por tanto que la matriz $A$ no tiene matriz inversa.

**5)** Intentemos calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Para ello aplicaremos la misma técnica que hemos utilizado en el ejemplo anterior. De esta forma, si $A$ tiene inversa sabemos que será también una matriz cuadrada de orden 2 y por tanto ha de ser de la forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puesto que $A \cdot A^{-1} = I_2$ tendremos que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a+c=1,\ 3b+d=0, \\ 2a+c=0,\ 2b+d=1. \end{array} \right.$$

$$\overset{\text{Resolviendo el sistema}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} a=1, & b=-1, \\ c=-2, & d=3. \end{array} \right.$$

Véase que al final obtenemos un sistema lineal con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas que se resuelve fácilmente de modo que finalmente hemos calculado la matriz inversa que será

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**Definición 32.** *Decimos que $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz regular si existe la matriz inversa de $A$ y en caso contrario diremos que $A$ es una matriz singular o no regular.*

---

**Ejemplo 33.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es singular, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son regulares.

---

**Propiedades 34.**

*i) Si* $A, B \in \mathcal{M}_n$ *son regulares entonces la matriz* $A \cdot B$ *es también regular y además se verifica que:*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

*ii) Si* $A \in \mathcal{M}_n$ *es regular entonces* $A^t$ *es también regular y además se verifica que:*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

*iii) Dada la matriz diagonal* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ *tal que* $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$, *tenemos que* $A$ *es regular y además:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

*iv) Si* $A \in \mathcal{M}_n$ *es regular, entonces* $A^{-1}$ *es también regular y*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

*v) Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular y tomamos $r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$, entonces $r \cdot A$ es regular y se verifica que:*

$$(r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}.$$

---

**Ejemplos 35.**
**1)** Dada $I_n \in \mathcal{M}_n$ sabemos que $I_n \cdot I_n = I_n$ por lo tanto la matriz identidad es regular y su inversa es ella misma:

$$(I_n)^{-1} = I_n.$$

**2)** Dadas $A, B, C \in \mathcal{M}_n$ vamos a calcular la inversa $(A \cdot B \cdot C)^{-1}$. Para ello utilizaremos repetidamente la propiedad *i)*.

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = ((A \cdot B) \cdot C)^{-1} = (\text{propiedad } i)) = C^{-1} \cdot (A \cdot B)^{-1}$$
$$= (\text{propiedad } i)) = C^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

En general,

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \cdots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

---

# 3 Combinaciones lineales, independencia lineal. Rango de una matriz

---

**Ejemplo 36.** Realizamos el estudio en siete ciudades que llamaremos A, B, C, D, E, F y G. En cada una de ellas estudiaremos inicialmente dos variables:

$N_C =$ Número de coches presentes en la ciudad,
$N_M =$ Número de motocicletas.

Después de la correspondiente toma de datos obtenemos los siguientes valores para estas variables en cada ciudad (expresados en miles de vehículos de cada tipo):

| | $N_C$ | $N_M$ |
|---|---|---|
| Ciudad A | 7 | 6 |
| Ciudad B | 8 | 5 |
| Ciudad C | 10 | 5 |
| Ciudad D | 6 | 6 |
| Ciudad E | 4 | 5 |
| Ciudad F | 20 | 10 |
| Ciudad G | 9 | 5 |

Pretendemos analizar el reciclado de neumáticos y de residuos derivados del motor. Para ello es razonable que estudiemos en cada ciudad dos nuevas variables:

$$\begin{aligned} N_R = &\ \text{Número neumáticos circulando,} \\ N_m = &\ \text{Número de motores en uso.} \end{aligned}$$

Podríamos realizar nuevas tomas de datos en las ciudades del estudio para obtener la información de estas otras dos variables, sin embargo,

$$N_R = 4N_C + 2N_M \qquad \text{y} \qquad N_m = N_C + N_M. \tag{1}$$

De este modo podemos calcular

| | $N_C$ | $N_M$ | $N_R$ | $N_m$ |
|---|---|---|---|---|
| Ciudad A | 7 | 6 | 40 | 13 |
| Ciudad B | 8 | 5 | 42 | 13 |
| Ciudad C | 10 | 5 | 50 | 15 |
| Ciudad D | 6 | 6 | 36 | 12 |
| Ciudad E | 4 | 5 | 26 | 9 |
| Ciudad F | 20 | 10 | 100 | 30 |
| Ciudad G | 9 | 5 | 46 | 14 |

En realidad, cada una de las cuatro variables es una 7-upla y

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 40 \\ 42 \\ 50 \\ 36 \\ 26 \\ 100 \\ 46 \end{pmatrix}}_{=N_R} = 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} +2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \\ 30 \\ 14 \end{pmatrix}}_{=N_m} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

Podemos comprobar que la información de $N_R$ y $N_m$ depende de $N_C$ y $N_M$ y por ello no es necesario que tomemos datos en cada ciudad para estas variables, simplemente tenemos que obtener la información para $N_R$ y $N_m$ combinando la que ya tenemos en $N_C$ y $N_M$.

Otras variables que se obtienen por combinación de $N_C$ y $N_M$ podrían ser:

- $N_P$ = Número máximo de pasajeros transportables,
- $N_F$ = Número de faros de iluminación nocturna.

Evidentemente

$$N_P = 5N_C + 2N_M \qquad \text{y} \qquad N_F = 2N_C + N_M,$$

y empleando el cálculo con uplas,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 47 \\ 50 \\ 60 \\ 42 \\ 30 \\ 120 \\ 55 \end{pmatrix}}_{=N_P} = 5 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} +2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 25 \\ 18 \\ 13 \\ 50 \\ 23 \end{pmatrix}}_{=N_F} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

En realidad cualquier variable, $N$, que se obtiene como combinación de $N_C$ y $N_M$ será de la forma

$$N = \alpha N_C + \beta N_M$$

y sus valores podrán calcularse mediante la operación de uplas

$$N = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

Para distintos valores de $\alpha$ y $\beta$ podemos obtener infinidad de variables que son combinación de $N_C$ y $N_M$ pero en todos los casos su información será superflua una vez que conocemos estas dos últimas.

Por otro lado, parece claro que el número de coches en una ciudad es completamente independiente del número de motos. De este modo, las variables $N_C$ y $N_M$ son independientes entre sí y ambas son esenciales por lo que necesitamos tomar los datos de ellas dos sin que los de una puedan obtenerse a partir de los de la otra. Es decir, no existe ninguna fórmula del tipo

$$N_C = \alpha N_M \qquad \text{ó} \qquad N_M = \alpha N_C$$

Así pues, parece claro que en este problema las variables esenciales son $N_C$ y $N_M$ de las cuales podemos derivar otras como combinación.

**Definición 37.** *Consideremos las n-uplas* $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. *Entonces:*

*i) Decimos que la n-upla,* $w \in \mathbb{R}^n$, *es combinación lineal* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *si*

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

*para ciertos números reales* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *que denominamos coeficientes de la combinación. El conjunto de todas las combinaciones lineales de* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *se denota* $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

*ii) Decimos que* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *son linealmente independientes si ninguna de ellas puede obtenerse como combinación lineal de las demás. Decimos que una única upla es independiente (es decir,* $m = 1$*) siempre que no sea nula.*

*iii) Decimos que* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *son linealmente dependientes si no son independientes.*

- Las uplas $N_R$, $N_m$, $N_P$ y $N_F$ son combinación lineal de $N_C$ y $N_M$. Dicho de otro modo,

$$N_R, N_m, N_P, N_F \in \langle N_C, N_M \rangle.$$

  Podemos obtener además muchas otras combinaciones de $N_C$ y $N_M$ y todas serán de la forma $\alpha N_C + \beta N_M$ para ciertos números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\langle N_C, N_M \rangle = \{\alpha N_C + \beta N_M : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- El conjunto formado por las uplas $N_C, N_M, N_R, N_m, N_P, N_F$ es linealmente dependiente.
- Las uplas $N_C$ y $N_M$ son independientes.

Las uplas dependientes son superfluas en el sentido siguiente:

**Propiedad 38.** *Dadas las $n$-uplas $w$ y $v_1, v_2, \ldots, v_m$, se tiene que*

$$\underbrace{w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle}_{\substack{\text{Si } w \text{ se obtiene como} \\ \text{combinación de } v_1, v_2, \ldots, v_m\text{'}}} \Leftrightarrow \underbrace{\langle w, v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle}_{\substack{\text{todas las combinaciones} \\ \text{obtenidas empleando } w,}} = \underbrace{\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle.}_{\substack{\text{también se pueden obtener} \\ \text{si eliminamos } w}}$$

Por ejemplo, combinando $N_C, N_M$ y $N_R$ podemos obtener

$$\langle N_C, N_M, N_R \rangle.$$

Ahora bien, $N_R$ se puede obtener como combinación de las otras dos. En consecuencia,

$$\underbrace{\langle N_C, N_M, N_R \rangle}_{\substack{\text{todas las combinaciones} \\ \text{obtenidas empleando } N_R,}} = \underbrace{\langle N_C, N_M \rangle.}_{\substack{\text{también se pueden obtener} \\ \text{si eliminamos } N_R}} \quad .$$

Dicho de otro modo,

$$\langle N_C, N_M, \cancel{N}_R \rangle.$$

## Ejemplos 39.

**1)** Consideremos las columnas

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si las sumamos multiplicadas por los números 5, 2 y $-1$ obtenemos

$$5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**2)** Tomemos ahora las 5-uplas

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nuevamente podemos combinarlas para obtener una fila distinta a las iniciales. Por ejemplo podemos multiplicar por 3 y 2,

$$3\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 9 & 0 & 0 & 18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & 0 & 2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4 & 13 & 6 & 0 & 20\end{pmatrix}}.$$

Si hubiéramos elegido coeficientes diferentes

$$4\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}8 & 12 & 0 & 0 & 24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 0 & -1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}9 & 10 & -3 & 0 & 23\end{pmatrix}}.$$

En definitiva tenemos que

$$\begin{pmatrix}4 & 13 & 6 & 0 & 20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9 & 10 & -3 & 0 & 23\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sin embargo,

$$\underbrace{a_1\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\substack{= \begin{pmatrix}2a_1 - a_2 & 3a_1 + 2a_2 & 3a_2 & \boxed{0} & 6a_1 + a_2\end{pmatrix} \\ \text{el resultado siempre tiene} \\ \text{un 0 en la cuarta posición}}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{la fila que pretendemos} \\ \text{obtener tiene un 1} \\ \text{en la cuarta posición}}}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle$$

y en consecuencia

$$\left\langle \begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle \neq \mathbb{R}^5.$$

Es decir, no toda 5-upla puede ser obtenida como combinación lineal de $\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**3)** Consideremos las columnas $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Realizando combinaciones lineales de estas columnas es posible obtener otras nuevas. El conjunto de todas sus combinaciones lineales será

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ejemplo, tomando $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = 3$ obtenemos la combinación lineal

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La cuestión es si es posible obtener las mismas combinaciones lineales con menos columnas o, dicho de otra manera, si hay alguna de las cuatro columnas que sea superflua. Comprobamos que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Directamente si aplicamos la **Propiedad 38**, sabemos entonces que podemos prescindir de esa tercera columna.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación de las cuatro columnas pero empleando (2) tenemos que

$$\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Sustituimos} \\ \text{empleando (2)}}} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overbrace{\left( 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}^{\downarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, es suficiente con utilizar las columnas primera, segunda y cuarta.

El hecho de que podamos expresar la tercera columna como combinación lineal de las demás nos ha permitido eliminarla de la combinación lineal. En realidad, este mismo argumento es válido para cualquier combinación de las cuatro columnas y en consecuencia

$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\substack{\text{Todas las combinaciones obtenidas} \\ \text{empleando las cuatro columnas,}}} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\substack{\text{también se pueden obtener} \\ \text{si eliminamos la tercera}}}.$$

En definitiva, la tercera columna es superflua a la hora de obtener combinaciones lineales y podríamos eliminarla,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Nota.**

★ La upla cero siempre puede ser obtenida como combinación lineal de cualesquiera uplas $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (es decir siempre se tiene que $0 \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$).

$$0 = 0v_1 + v_2 + \cdots + 0v_m.$$

Esta forma de obtener la upla cero, por ser la más sencilla se denomina 'trivial'.

---

**Ejemplo 40.** Dadas las filas $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, podemos obtener la fila cero (en este caso la fila cero será $0_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) tomando iguales a cero los dos coeficientes de la combinación lineal en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esta sería la forma trivial de obtener la upla cero.

---

★ Como consecuencia del comentario anterior, cualquier conjunto de uplas que contenga a la upla 0 será siempre linealmente dependiente. En efecto, sabemos que la upla 0 siempre se podrá obtener como combinación lineal de las demás y por ello el conjunto de uplas ha de ser dependiente.

---

**Ejemplo 41.** Sin necesidad de realizar cálculo alguno sabemos que las uplas $(1, 2, -1), (2, 1, 1), (0, 0, 0)$ son dependientes ya que una de ellas es la upla cero que se puede obtener como combinación lineal de las demás en la forma

$$(0, 0, 0) = 0(1, 2, -1) + 0(2, 1, 1).$$

---

★ Es evidente que si tenemos más uplas con ellas podremos realizar también más combinaciones lineales. Es decir, si tenemos las $m$ uplas $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ y adicionalmente tomamos $q$ uplas más, $w_1, w_2, \ldots, w_q \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\underbrace{\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle}_{\substack{\text{Todas las combinaciones} \\ \text{que podemos obtener} \\ \text{combinando } v_1, \ldots, v_m}} \subseteq \underbrace{\langle v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots, w_q \rangle}_{\substack{\text{también las podemos obtener} \\ \text{combinando } v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_q}}.$$

---

**Ejemplo 42.** Dados $(2,3,-1,0), (1,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$ y adicionalmente $(1,6,3,1), (0,3,0,1) \in \mathbb{R}^4$, cualquier combinación de los dos primeros, por ejemplo

$$3(2,3,-1,0) + 2(1,2,1,1) = (8,13,-1,2),$$

puede escribirse también como combinación de los cuatro, por ejemplo

$$(8,13,-1,2) = 3(2,3,-1,0)+2(1,2,1,1)+0(1,6,3,1)+0(0,3,0,1).$$

Por tanto,

$$\langle (2,3,-1,0),(1,2,1,1) \rangle \subseteq \langle (2,3,-1,0),(1,2,1,1), (1,6,3,1), (0,3,0,1) \rangle.$$

---

★ Si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ son independientes entre sí cualquier subconjunto de uplas que escojamos de entre ellas son también linealmente independientes entre sí.

---

**Ejemplo 43.** Es posible comprobar que las 4-uplas

$$(1, 2, -1, 1), (2, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, -2, 1, 1)$$

son independientes. En tal caso cualquier subconjunto de ellas que tomemos también será independiente. Por ejemplo,

$$(1, 2, -1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, -2, 1, 1)$$

son uplas independientes.

---

★ Si entre las uplas $v_1, v_2, \ldots, v_p$ aparece alguna de ellas repetida, entonces dichas uplas son linealmente dependientes entre sí.

---

**Ejemplo 44.** Las 4-uplas

$$(3, 2, -1, 2),\ (2, 1, 2, 1),\ (3, 2, -1, 2),\ (7, 2, 3, 1)$$

son dependientes entre sí ya que una de ellas aparece repetida.

$$\underbrace{(3, 2, -1, 2)}_{\text{La upla repetida}} = \underbrace{0(2, 1, 2, 1) + 1\underbrace{(3, 2, -1, 2)}_{\text{aparece entre las restantes}} + 0(7, 2, 3, 1)}_{\text{y por tanto podemos obtenerla fácilmente como combinación lineal.}}$$

---

## 3.1 Técnicas básicas para el estudio de la dependencia lineal

En concreto, precisamos resolver los siguientes problemas:

a) Determinar si una upla puede obtenerse o no combinando otras.

b) Determinar si un conjunto de uplas son dependientes o independientes.

Veamos como podemos hacerlo.

### 3.1.1 Determinar si una upla es combinación

Sabemos que una upla, $w \in \mathbb{R}^n$, es combinación lineal de

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$$

si podemos encontrar los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

En realidad, cuando desconocemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, la expresión anterior constituye un sistema lineal de ecuaciones cuyas variables son los coeficientes que queremos determinar.

Veámoslo mejor en los siguientes ejemplos.

**Ejemplos 45.**

**1)** Determinar si la upla

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de las uplas $N_C$ y $N_M$ del **Ejemplo 36**. $N_1$ será combinación lineal si podemos encontrar los números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$N_1 = \alpha N_C + \beta N_M.$$

Si sustituimos el valor de cada upla y efectuamos las operaciones

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 6\beta \\ 8\alpha + 5\beta \\ 10\alpha + 5\beta \\ 6\alpha + 6\beta \\ 4\alpha + 5\beta \\ 20\alpha + 10\beta \\ 9\alpha + 5\beta \end{pmatrix}$$

y si ahora igualamos por filas llegamos a

$$\begin{cases} 7\alpha + 6\beta = 1 \\ 8\alpha + 5\beta = 3 \\ 10\alpha + 5\beta = 5 \\ 6\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + 5\beta = -1 \\ 20\alpha + 10\beta = 10 \\ 9\alpha + 5\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Por tanto, hemos calculado los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ que necesitamos y ahora sabemos que $N_1$ se puede escribir como

$$N_1 = N_C - N_M.$$

Así pues $N \in \langle N_C, N_M \rangle$.

Véase que el problema se reduce a encontrar la solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Estudiemos ahora el mismo problema para la upla

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Repitiendo los mismos pasos, debemos encontrar nuevamente los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ de modo que

$$N_2 = \alpha N_C + \beta N_M \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 6\beta \\ 8\alpha + 5\beta \\ 10\alpha + 5\beta \\ 6\alpha + 6\beta \\ 4\alpha + 5\beta \\ 20\alpha + 10\beta \\ 9\alpha + 5\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\alpha + 6\beta = 1 \\ 8\alpha + 5\beta = 1 \\ 10\alpha + 5\beta = 1 \\ 6\alpha + 6\beta = 1 \\ 4\alpha + 5\beta = 1 \\ 20\alpha + 10\beta = 1 \\ 9\alpha + 5\beta = 1 \end{cases}.$$

Sistema incompatible. Por tanto, finalmente tenemos que

$$N_2 \notin \langle N_C, N_M \rangle$$

y la upla $N_2$ no se puede obtener combinando $N_C$ y $N_M$.

**2)** Comprobar si $(3,3,1) \in \langle (1,2,1),(1,1,1),(2,1,1)\rangle$.

Nuevamente debemos encontrar los coeficientes, en este caso tres, necesarios para formar la combinación que produzca la upla $(3,3,1)$,

$$(3,3,1) = \alpha(1,2,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(2,1,1).$$

Efectuando las operaciones e igualando tenemos

$$(3,3,1) = (\alpha+\beta+2\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+2\gamma = 3 \\ 2\alpha+\beta+\gamma = 3 \\ \alpha+\beta+\gamma = 1 \end{array}\right. .$$

Para resolver el sistema,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{restando la ecuación última a la primera} & \Rightarrow & \gamma = 2, \\ \text{restando la ecuación última a la segunda} & \Rightarrow & \alpha = 2, \\ \text{sustituyendo y despejando en la tercera} & \Rightarrow & \beta = -3. \end{array}\right.$$

Por tanto

$$(3,3,1) = 2(1,2,1) - 3(1,1,1) + 2(2,1,1)$$

y $(3,3,1) \in \langle (1,2,1),(1,1,1),(2,1,1)\rangle$.

**3)** Estudiar si $(1,0,0) \in \langle (1,2,1),(1,1,1),(2,3,2) \rangle$.

Repitiendo el proceso obtendremos nuevamente un sistema lineal de ecuaciones,

$$(1,0,0) = \alpha(1,2,1)+\beta(1,1,1)+\gamma(2,3,2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta+2\gamma = 1 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 0 \end{array} \right.$$

y es evidente que la primera y la última ecuación no pueden cumplirse al mismo tiempo ya que $\alpha+\beta+2\gamma$ no puede valer al mismo tiempo 1 y 0. En consecuencia este sistema no tiene solución y no podemos encontrar los coeficientes $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$. Por tanto,

$$(1,0,0) \notin \langle (1,2,1),(1,1,1),(2,3,2) \rangle.$$

### 3.1.2 Estudio de la dependencia e independencia lineal

Dadas varias uplas $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sabemos que siempre

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m = 0.$$

Pero, ¿es ésta la única manera de obtener la upla 0 como combinación de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ o existirán otras?

Para justificar esto último, retornemos al **Ejemplo 36**. Puesto que

$$N_R = 4N_C + 2N_M,$$

sabemos que estas tres uplas, $\{N_C, N_M, N_R\}$, son dependientes. Si pasamos en esta última igualdad todos los sumandos a un mismo miembro tenemos

$$4N_C + 2N_M - N_R = 0,$$

donde $0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ es la 7-upla nula. De este modo, al ser dependientes podemos encontrar una forma de obtener la upla 0 diferente de la trivial.

**Propiedad 46.** *Consideremos las uplas* $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. *Entonces si los únicos valores de los números* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *para los que obtenemos*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

*son* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, *dichas uplas son independientes. En caso contrario, las uplas serán dependientes.*

---

**Ejemplos 47.**

**1)** Estudiemos si las uplas $(2,3,1),(4,6,4),(4,6,3) \in \mathbb{R}^3$ son dependientes o independientes. Para ello

$$\alpha_1(2,3,1)+\alpha_2(4,6,4)+\alpha_3(4,6,3)=(0,0,0).$$

Primero efectuaremos las operaciones matriciales indicadas en esta igualdad con lo que llegamos a

$$(2\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3, 3\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3, \alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=(0,0,0)$$

y ahora igualando ambos miembros finalmente obtenemos el sistema lineal de tres variables y tres ecuaciones,

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3=0 \\ 3\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3=0 \\ \alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=0 \end{array}\right. .$$

Resolviendo este sistema debemos determinar cuáles son los posibles valores para $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$. En este caso,

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3=0 & \xrightarrow[\text{dividiendo por 2}]{} & \alpha_1+2\alpha_2+\cancel{2\alpha_3=0} \\ 3\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3=0 & \xrightarrow[\text{dividiendo por 3}]{} & \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=0 & & \alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=0 \end{array}\right. ,$$

Ahora el sistema queda

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \xrightarrow[\text{ecuación 2 menos ecuación 1}]{} \alpha_3 = -2\alpha_2 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \xrightarrow[\text{sustituyendo}]{} \alpha_1 = 2\alpha_2 \end{cases}.$$

Puesto que tenemos infinitas soluciones, estas uplas son dependientes.

Si tomamos $\alpha_2 = 1$ obtenemos,

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -2,$$

que nos conduce a la siguiente expresión, no trivial, de la upla nula,

$$2(2,3,1) + (4,6,4) - 2(4,6,3) = (0,0,0).$$

La existencia de una forma alternativa a la trivial implica la dependencia,

$$(0,0,0) = \boxed{2}\,(2,3,1) + 1(4,6,4) + (-2)(4,6,3)$$

$$\Rightarrow (0,0,0) - \boxed{2}\,(2,3,1) = 1(4,6,4) + (-2)(4,6,3)$$

$$\Rightarrow (2,3,1) = \frac{1}{-\boxed{2}}(4,6,4) + \frac{2}{-\boxed{2}}(4,6,3)$$

Vemos de esta manera que $(2,3,1)$ es combinación lineal de $(4,6,4)$ y $(4,6,3)$ y tenemos de nuevo la dependencia.

**2)** Comprobemos si las uplas $(1,1,3), (2,0,-1), (-1,0,1)$ son dependientes o independientes.

Para ello, emplearemos la **Propiedad 46**.

$$a_1(1,1,3) + a_2(2,0,-1) + a_3(-1,0,1) = (0,0,0).$$

$$a_1(1,1,3) + a_2(2,0,-1) + a_3(-1,0,1) = (0,0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1, a_1, 3a_1) + (2a_2, 0, -a_2) + (-a_3, 0, a_3) = (0,0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1 + 2a_2 - a_3, a_1, 3a_1 - a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

$\Downarrow$ Para que dos uplas sean iguales, cada una de sus componentes deben ser iguales.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 3a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Los coeficientes $a_1$, $a_2$ y $a_3$ deben cumplir las ecuaciones del sistema anterior. Ahora bien, si resolvemos el sistema obtenemos fácilmente que

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

**3)** Estudiar la dependencia e independencia de las uplas $(2,0,0,1)$, $(0,1,0,-1)$, $(4,-1,0,3)$, $(0,1,1,0)$.

Emplearemos la misma técnica que en el apartado anterior:

$$x(2,0,0,1)+y(0,1,0,-1)+z(4,-1,0,3)+w(0,1,1,0)=(0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(2x,0,0,x)+(0,y,0,-y)+(4z,-z,0,3z)+(0,w,w,0)=(0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+4z, y-z+w, w, x-y+3z)=(0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x+4z=0 \\ y-z+w=0 \\ w=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}.$$

Si resolvemos el sistema observamos que solamente podemos despejar tres de las variables en la forma

$$\begin{cases} x=-2z \\ y=z \\ w=0 \end{cases}.$$

Tiene infinitas soluciones. Son dependientes, deducimos que las uplas son dependientes.

**4)** Consideremos los $n$ elementos $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Para ello, supongamos que obtenemos la upla 0 de $\mathbb{R}^n$ como combinación lineal de $e_1$, $e_2$, …, $e_n$ en la forma

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

y veamos que en tal caso la única posibilidad es que todos los coeficientes $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ sean iguales a cero.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots \alpha_n(0, 0, 0, \ldots, 1) = (0, \ldots, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) + (0, 0, 0, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \quad \vdots \\ \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Por tanto todos los coeficientes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ son forzosamente nulos y como consecuencia $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son independientes.

Las uplas $e_1$, $e_2$,..., $e_n$ de $\mathbb{R}_n$ se denominan $n$-uplas coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Veamos algunos ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ las 2-uplas coordenadas son 2:

$$e_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad e_2 = (0, 1).$$

  Sabemos además que $e_1$ y $e_2$ son independientes entre sí.

- En $\mathbb{R}^3$ las 3-uplas coordenadas serán 3:

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

  Estas tres uplas son independientes entre sí.

- En $\mathbb{R}^4$ las 4 uplas coordenadas son

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),$$
$$\text{y} \quad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

## 3.2 Rango de una matriz

**Definición 48.** *Dada la matriz* $A = (v_1|v_2|\dots|v_n) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *cuyas uplas columna son* $v_1$*,* $v_2$*,* $\dots$*,* $v_n$*, llamamos rango de la matriz* $A$*, y lo denotamos*

$$\mathrm{rango}(A) \quad \textit{ó} \quad \mathrm{r}(A),$$

*al tamaño del mayor subconjunto de uplas independientes que podemos encontrar entre las uplas columna* $v_1$*,* $v_2$*,* $\dots$*,* $v_n$*. Por definición, diremos que el rango de la matriz* $0_{m\times n}$ *es 0.*

**Ejemplos 49.**
**1)** Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus uplas columna son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo, el mayor conjunto de uplas columnas independiente que podemos conseguir es $\{e_1, e_2\}$ que tiene tamaño 2 y en consecuencia

$$\text{rango}(A) = 2.$$

**2)** Tomemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus uplas columna,

$$(1,0,0,0),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1,0)$$

El conjunto linealmente independiente más grande que podemos obtener a partir de estas tres columnas consistirá por tanto en tomarlas todas y por ello tendrá tamaño 3. En consecuencia,

$$\text{rango}(B) = 3.$$

**3)** Empleando los mismos argumentos:

- rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

- rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$

- rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

- rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

**4)** En la **Definición 48** se establece que el rango de la matriz cero es siempre 0. Algunos ejemplos de esto son:

- rango $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

- rango $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

En realidad, las uplas columna de la matriz cero son todas ellas iguales a la upla cero correspondiente y por tanto nunca podemos formar con ellas ningún conjunto independiente. De ahí que el rango de estas matrices se establezca como 0.

---

**Propiedad 50.** *Dado* $r, n, m \in \mathbb{N}$*:*

*i)* rango $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r$*.*

*ii)* $\text{rango}(I_r) = r$*.*

*iii)* $\text{rango}(0_{n\times m}) = 0$*.*

Dicho de otra manera, para calcular el rango de una matriz con todos sus elementos nulos excepto unos en diagonal, únicamente debemos contar el número de unos que ella aparecen. Por ejemplo, la matriz identidad de orden $r$ tendrá siempre rango $r$ ya que tiene $r$ unos dispuestos en diagonal.

La cuestión es que por ahora solamente sabemos calcular el rango de matrices del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Si tenemos una matriz cualquiera podemos intentar transformarla en una de este tipo.

---

**Ejemplo 51.** La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, sin embargo es suficiente modificar el orden de las columnas para obtener:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Reordenando columnas}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero la matriz transformada es del tipo $A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ y su rango es 3 (tres unos en diagonal). Como consecuencia

$$\mathrm{r}(A) = 3.$$

---

Podemos plantearnos las siguientes preguntas

**a)** ¿Existen más transformaciones como ésta que modifican la matriz pero no el valor del rango?

**b)** Supuesto que la respuesta a la pregunta a) es afirmativa: ¿Las transformaciones disponibles permitirán convertir cualquier matriz en una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?

Veremos que en ambos casos tenemos una respuesta afirmativa.

**Propiedad 52.** *Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se verifica que:*

*i) Si modificamos el orden de las filas o columnas de $A$, la matriz resultante tiene el mismo rango que $A$.*

*ii) Si multiplicamos una de las filas o columnas de $A$ por un número distinto de cero, la matriz resultante tiene el mismo rango que $A$.*

*iii) Si sumamos a una columna (respectivamente fila) otra columna (respectivamente fila) multiplicada por un número, la matriz resultante tiene el mismo rango que $A$.*

**Definición 53.** *Dada una matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *llamamos operación elemental sobre* $A$ *a cualquiera de las siguientes transformaciones:*

- *Multiplicar una fila o columna por un número no nulo.*
- *Modificar el orden de las filas o columnas.*
- *Sumar a una columna (respectivamente fila) otra columna (respec. fila) multiplicada por un número cualquiera.*

En lo que sigue utilizaremos la siguiente nomenclatura para describir las operaciones elementales que efectuamos sobre una matriz:

**a)** Cuando multiplicamos la columna $i$-ésima por un número $k$ lo indicamos mediante "$k$C$i$".

**b)** Cuando intercambiamos la columna $i$ por la $j$ lo indicamos mediante "C$i\leftrightarrow$C$j$".

**c)** Cuando sumamos a la columna $i$ la columna $j$ multiplicada por un número $k$ lo notamos "C$i$=C$i$+$k$C$j$".

**d)** Las mismas operaciones para filas se denotan utilizando la letra "F" en lugar de "C".

**Ejemplos 54.**

**1)** Apliquemos una serie de operaciones elementales a la siguiente matriz:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C1}\leftrightarrow\text{C2}]{} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{F1=F1+2F2}]{} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{F1}\leftrightarrow\text{F2}]{} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{3C1}]{} & \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Las matrices que aparecen a la derecha, todas ellas, se han obtenido a partir de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ aplicando operaciones elementales.

$$\begin{aligned}\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**2)** Para calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos aplicar sobre ella operaciones elementales para intentar transformarla en una matriz del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Veamos cómo podemos hacerlo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C2}\leftrightarrow\text{C3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{F2=F2-2F1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{F3=F3+4F1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En resumidas cuentas calculamos el rango de $A$ en la forma

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

El último ejemplo reproduce el método que pretendemos aplicar para calcular el rango de una matriz. Dada la matriz $A$ aplicaremos sobre ella operaciones elementales para intentar transformarla en una matriz del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$,

$$A \xrightarrow[\text{Operaciones elementales}]{} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces,

$$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r.$$

Queda pendiente la pregunta:

**b)** ¿Las transformaciones disponibles permitirán convertir cualquier matriz en una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?

### 3.2.1 El método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss o de eliminación Gaussiana permite reducir, mediante operaciones elementales, cualquier matriz a una matriz con unos en diagonal y el resto de elementos nulos. Es lo que se denomina un método iterativo. Es decir, se basa en la aplicación reiterada de los mismos pasos. Estos pasos son los seis que veremos a continuación y serán los que siempre aplicaremos para calcular el rango de una matriz.

Iremos viendo los pasos a seguir al tiempo que los reproducimos sobre un ejemplo concreto. Así pues, éstos son los pasos del método de eliminación de Gauss:

**1)** Seleccionamos en la matriz una fila o columna en la que existan al menos dos elementos no nulos.
Con carácter general seleccionaremos la fila o columna con un mayor número de ceros.

**2)** En la fila o columna seleccionada en el apartado anterior elegimos un elemento no nulo al que llamamos 'pivote':

- En el caso de cálculos manuales, la elección del elemento pivote con valor igual a 1 ó $-1$ puede simplificar las operaciones.

- En el caso de cálculos precisos, los mejores resultados se obtienen seleccionando como pivote el elemento de la fila o columna con mayor valor absoluto.

---

**Ejemplo 55.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**3)** Empleamos el pivote para anular todos los elementos de la fila o columna inicialmente seleccionada.

---

**Ejemplo 56.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C1=C1-2C3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**4)** Utilizamos el pivote para anular los elementos de la fila o columna perpendicular a la que habíamos seleccionado en el paso 1 que intersecta a la altura del pivote.

---

**Ejemplo 57.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{F2=F2-2F3} \\ \text{F4=F4-2F3}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix}$$

---

**5)** Siempre que quede alguna fila o columna con más de un elemento no nulo retornaremos al paso 1.

---

**Ejemplo 58.**

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 0 & 1 \\ -3 & \underline{\overline{\mathbf{-1}}} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ -3 & \mathbf{-1} & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{F1=F1+2F2} \\ \text{F4=F4-F2}}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ -3 & \underline{\overline{\mathbf{-1}}} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{C1=C1-3C2} \\ \text{C4=C4+C2}}]{} \begin{pmatrix} -5 & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & \underline{\overline{\mathbf{-1}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\overline{\mathbf{2}}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\overline{\mathbf{2}}} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{F1=F1-}\frac{3}{2}\text{F4}]{} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\overline{\mathbf{2}}} \end{pmatrix}.$$

---

**6)** Si es necesario se reordenan las filas o columnas para pasar la matriz a forma diagonal. Si en la diagonal principal aparecen elementos no nulos distintos de 1 podemos dividir adecuadamente la fila o columna correspondiente para transformarlos en 1.

---

**Ejemplo 59.**

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{F1}=\frac{1}{-5}\mathrm{F1} \\ \mathrm{F2}=\frac{1}{-1}\mathrm{F2}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

Finalmente hemos obtenido una matriz del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Podemos calcular ahora el rango de la matriz inicial $A$:

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

---

De esta manera, la idea para calcular el rango de una matriz $A$ se basa en los siguientes pasos:

1. Aplicamos el método de eliminación de Gauss para encontrar una lista de operaciones elementales, llamémosla $L$, que transforme $A$ del siguiente modo:
$$A \xrightarrow[\text{Operaciones } L]{} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$
2. Utilizamos la **Propiedad 52** que nos garantiza que
$$\text{rango}(A) = \text{rango}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$
3. Finalmente, aplicamos la **Propiedad 50** para realizar el cálculo:
$$\text{rango}(A) = \text{rango}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r.$$

### 3.2.2 El rango por filas y otras propiedades básicas

**Teorema 60.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se tiene que:*

*i)* $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t)$.

*ii) El rango de $A$ es el tamaño del mayor conjunto independiente formado por uplas fila de la matriz $A$.*

Una consecuencia inmediata del ultimo teorema es el hecho de que el rango de una matriz será inferior tanto al número de columnas como al número de filas de la matriz. Ello queda reflejado con más precisión en el siguiente corolario.

**Corolario 61.** *Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se verifica que*

$$\text{rango}(A) \leq m \quad y \quad \text{rango}(A) \leq n.$$

### 3.2.3 Cálculos con dependencia, independencia, combinaciones lineales mediante el rango

**Propiedad 62.** *Consideremos las $n$-uplas*

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \quad y \quad w$$

*i)* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *son independientes entre sí*

$$\Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_m) = m.$$

*ii)* $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$

$$\Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_m) = \text{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_m|w).$$

- **¿Qué sucede cuando son dependientes?**

Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son dependientes, ¿cómo descartamos las u-plas superfluas?. Tendremos que

$$\text{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_m) = r < m$$

y existirán $r$ de ellas independientes. Sabemos entonces que para muchas de las operaciones relacionadas con combinaciones lineales podemos elegir esas uplas independientes y descartar las demás. Pero, ¿cómo averiguamos cuáles de las uplas son independientes y cuáles descartables?

**Ejemplos 63.**

**1)** Comprobar si las uplas $v_1 = (2, 1, 3, -1, 2)$, $v_2 = (4, 2, 6, -2, 4)$, $v_3 = (-2, -1, 0, -5, 1)$, $v_4 = (2, 1, 2, 1, 1)$ y $v_5 = (2, 1, 5, -5, 4)$ son independientes entre sí.

Resolveremos el ejercicio aplicando la **Propiedad 62**. Para ello, comenzaremos calculando el rango de la matriz obtenida al poner en columna las uplas en cuestión,

$$\text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Por tanto no son independientes.

**2)** Las uplas del apartado anterior pueden ser combinadas para obtener otras. ¿Son necesarias las cinco uplas dadas para obtener todas esas combinaciones o, por el contrario, existen uplas superfluas?

Si tomamos las dos primeras columnas tenemos

$$\text{rango}(v_1|v_2) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

y por tanto no son independientes. Tomemos en su lugar las columnas primera y tercera,

$$\text{rango}(v_1|v_3) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

y estas dos columnas sí son independientes. Por tanto,

$$\langle v_1, \cancel{v}_2, v_3, \cancel{v}_4, \cancel{v}_5 \rangle = \langle (2,1,3,-1,2), (-2,-1,0,-5,1) \rangle.$$

Podríamos haber escogido también, por ejemplo, la cuarta y la quinta

$$\operatorname{rango}(v_4|v_5) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

De esta forma, tenemos dos respuestas para el mismo ejercicio. Combinando las uplas

$$(2, 1, 3, -1, 2) \quad \text{y} \quad (-2, -1, 0, -5, 1)$$

obtenemos las mismas combinaciones que con las cinco uplas iniciales y, al mismo tiempo, combinando

$$(2, 1, 2, 1, 1) \quad \text{y} \quad (2, 1, 5, -5, 4)$$

también obtenemos todas esas combinaciones.

**3)** Comprobar si $w_1 = (1,2,3,2,1)$ y $w_2 = (0,0,3,-6,3)$ se pueden obtener como combinación lineal de las uplas $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ del apartado **1)**.

Comencemos con $w_1 = (1,2,3,2,1)$. Aplicando el apartado *ii)* de la **Propiedad 62** sabemos que

$$w_1 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

$$\Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5) = \text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|w_1)$$

Es decir, debemos comprobar si es cierta la igualdad

$$¿\,\underbrace{\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=2 \text{ (apartado } \mathbf{1)})} = \underbrace{\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=3}?$$

Por tanto, $w_1 \notin \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

Podríamos haber simplificado estos cálculos si hubiéramos empleado los resultados del apartado **2)** ya que entonces vimos que

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle.$$

Por ejemplo, para $w_2 = (0, 0, 3, -6, 3)$,

$$w_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_3) = \text{rango}(v_1|v_3|w_2).$$

Si calculamos los rangos de $(v_1|v_3)$ y $(v_1|v_3|w_2)$ tenemos

$$\underbrace{\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=2 \text{ (apartado } \mathbf{1)})} = \underbrace{\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=2}.$$

luego sí es combinación.

### 3.2.4 Etiquetado de columnas

El esquema de operaciones elementales que hace posible calcular el rango de una matriz también permite detectar las uplas independientes. Para ello basta con etiquetar cada columna con un indicativo de la upla a la que corresponde. Tras aplicar el esquema de operaciones elementales, las uplas cuyas etiquetas aparezcan sobre los unos en diagonal de la forma reducida serán directamente independientes.

**Ejemplo 64.** Consideremos las uplas $v_1 = (1,2,0,-1)$, $v_2 = (2,4,0,-2)$, $v_3 = (2,1,1,0)$ y $v_4 = (4,5,1,-2)$. Para ver cuántas y cuáles de ellas son independientes, las pondremos en columna y calcularemos el rango de la matriz resultante. Sin embargo, etiquetaremos además cada columna:

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C4=C4-C3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array}$$
$$\xrightarrow[\substack{\text{F1=F1-2F3} \\ \text{F2=F2-F3}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{F2=F2-2F1} \\ \text{F4=F4+F1}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccc} v_1 & v_3 & v_2 & v_4 \\ \end{array}$$
$$\xrightarrow[\substack{\text{C2=C2-2C1} \\ \text{C4=C4-2C1}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{C2}\leftrightarrow\text{ C3} \\ \text{F2}\leftrightarrow\text{ F3}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.2.5 Obtención de todas las uplas posibles

Dado cierto conjunto de $n$-uplas, $v_1, v_2, \ldots, v_m$, en ocasiones es de importancia determinar si ellas son suficientes para generar mediante combinaciones cualquier otra $n$-upla

El conjunto de todas las $n$-uplas es $\mathbb{R}^n$, así que la cuestión que estamos planteando aquí es si con ciertas uplas $v_1, v_2, \ldots, v_m$ podemos obtener todo $\mathbb{R}^n$, es decir, si

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n.$$

**Propiedad 65.**

*i) Dadas las n-uplas* $v_1, v_2, \ldots, v_m$,

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_m) = n.$$

*ii) Las n-uplas coordenadas de* $\mathbb{R}^n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *cumplen que*

$$\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n.$$

*iii) Dadas las n-uplas* $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ es independiente.}$$

*iv) Más de n, n-uplas no pueden ser independientes.*

*v) Con menos de n, n-uplas no es posible obtener todo* $\mathbb{R}^n$ *(es decir, todas las n-uplas).*

**Ejemplos 66.**

**1)** Dadas las 4-uplas, $(1,2,-1,1)$, $(2,1,0,-1)$, $(0,0,1,-1)$ y $(1,2,0,1)$, nos preguntamos si combinándolas es posible obtener cualquier otra 4-upla que deseemos. Aplicando el apartado *i)* de la **Propiedad 65** sabemos que

$$\langle (1,2,-1,1),(2,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,2,0,1)\rangle = \mathbb{R}^4$$

se cumplirá si puestas en columna, dichas uplas dan rango 4. Tenemos que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

así que efectivamente cualquier upla de $\mathbb{R}^4$ puede ser obtenida combinando esas cuatro.

**2)** Estudiemos el mismo problema del ejercicio anterior referido ahora a las uplas $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(-1, 2, 1)$ y $(2, 3, 5)$. Nos preguntamos entonces si combinándolas es posible obtener cualquier 3-upla, es decir, si

$$\langle (1, 2, 3), (2, 1, 3), (-1, 2, 1), (2, 3, 5) \rangle = \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Sin necesidad de realizar ningún cálculo, de antemano, aplicando el apartado *iv)* de la **Propiedad 65** sabemos que las cuatro uplas son dependientes ya que más de 3 3-uplas nunca son independientes. Para comprobar (3), como antes, puestas las uplas en columna, su rango debería ser 3. Ahora bien,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

así que existen uplas de $\mathbb{R}^3$ que no se pueden obtener combinando las de este ejemplo.

## 3.3 Rango y Matriz inversa. Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales

En esta sección estudiaremos las relaciones existentes entre los conceptos de rango y de matriz inversa en el caso de matrices cuadradas.

**Propiedad 67.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada de orden $n$. Entonces,*

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = n.$$

Hagamos algunos comentarios sobre esta última propiedad:

- De la propiedad anterior se desprende que si una matriz tiene inversa, sus uplas columna deben ser independientes. En otras palabras,

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{las columnas de } A \text{ son independientes.}$$

  Este enunciado equivalente puede escribirse también en términos de filas.

- Como consecuencia del **Corolario 61**, una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ de orden $n$ (con $n$ filas y $n$ columnas) tendrá rango a lo sumo $n$. Entonces, $n$ es el valor máximo que puede adoptar el rango de $A$ y, en consecuencia, se dice que $A$ tiene rango máximo cuando rango$(A) = n$. Empleando esta nomenclatura, la **Propiedad 67** puede reescribirse como

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ tiene rango máximo.}$$

### 3.3.1 Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales

Tomemos una matriz cuadrada de orden $n$, $A \in \mathcal{M}_n$. Si la matriz tiene rango $n$ entonces

$$A \xrightarrow[\text{operaciones elementales}]{} I_n.$$

Formemos la matriz $(A|I_n)$ que se obtiene añadiendo la matriz identidad a la matriz $A$. Si las operaciones elementales de antes son todas ellas por filas

$$(A|I_n) \xrightarrow[\text{operaciones elementales}]{} (I_n|B).$$

Se puede comprobar que las matriz $B$ que aparece de este modo almacena las operaciones elementales que hemos aplicado a $A$ en el sentido

$$\underbrace{A \xrightarrow[\text{op. el.}]{} I_n}_{\text{las op. el. transforman } A \text{ en } I_n} \qquad \text{y por tanto} \qquad \underbrace{A \cdot B = I_n}_{\text{el producto por } B \text{ transforma } A \text{ en } I_n}.$$

Pero esta última igualdad nos indica que la matriz $B$ es justamente la matriz inversa de $A$ y por tanto $A^{-1} = B$.

**Propiedad 68.** *Supongamos que la matriz $A \in \mathcal{M}_n$ tiene inversa y que $L$ es una lista de operaciones elementales por filas que transforma $A$ en $I_n$, entonces si aplicamos las operaciones de $L$ a la matriz por bloques $(A|I_n)$ obtendremos*

$$(A|I_n) \xrightarrow[\textit{Operaciones } L]{} (I_n|B),$$

*donde $B$ es la inversa de $A$.*

De este modo, de la **Propiedad 68** se desprende para calcular la inversa de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$, debemos reducir $A$ en $I_n$ pero ahora aplicando operaciones elementales solamente por filas. Para el cálculo del rango podemos aplicar operaciones tanto por filas como por columna pero ahora, para obtener la inversa, tenemos que limitarnos únicamente a operaciones por filas. Sin embargo, ello sigue siendo posible aplicando el método de eliminación de Gauss que vimos en la página 107. Solamente habremos de tener en cuenta las siguientes puntualizaciones cuyo objetivo es evitar en todos los pasos la realización de operaciones por columnas:

a) Puesto que solamente podemos aplicar operaciones por filas, en el paso 1 únicamente seleccionaremos columnas ya que para anular los elementos de una columna las operaciones a realizar son por filas.

b) En el paso 2, hemos de tomar la precaución de seleccionar un elemento que no esté a la altura de los pivotes seleccionados en pasos anteriores.

c) Obviaremos el paso 4 ya que supone la realización de operaciones por columnas.

d) Una vez aplicados los pasos 1 a 5 para todas las columnas, será suficiente con dividir las filas con objeto de transformar todos los elementos no nulos en unos. Finalmente ordenaremos las filas para obtener la identidad.

**Ejemplos 69.**

**1)** Calcúlese la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para ello, formamos la matriz $(A \,|\, I_4)$ y le aplicaremos operaciones elementales por filas hasta transformarla en $(I_4 \,|\, B)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{F2=F2-2F3} \\ \text{F4=F4-2F3}}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \overline{\underline{1}} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{F1=F1-F2} \\ \text{F4=F4-3F2}}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 3 & 0 & \mathbf{0} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \overline{\underline{\mathbf{1}}} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \overline{\underline{1}} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{F4}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & \mathbf{-1} & 0 & \overline{1} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & \mathbf{0} & \overline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \underline{\overline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F2=F2+F4}]{\text{F1=F1-3F4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -4 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \overline{1} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \mathbf{0} & \overline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \underline{\overline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{-1}{5}\text{F1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \underline{\overline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \overline{1} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{2} & 0 & \overline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & \underline{\overline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F4=F4-3F1}]{\text{F3=F3-2F1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \underline{\overline{\mathbf{1}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \overline{1} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & 0 & \overline{1} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ \mathbf{0} & \underline{\overline{1}} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{reordenando}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

de donde obtenemos,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**2)** Consideremos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C3=C3-C1}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C3=C3+C2}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{F1}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ordenando columnas}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Por tanto rango$(A) = 3$ y en consecuencia la matriz $A$ es regular. Podemos ahora calcular su inversa aplicando operaciones elementales a las filas de la matriz $\left( \, A \mid I_3 \, \right)$

$$\left( \, A \mid I_3 \, \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{F2=F2-F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F3=F3+F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{reordenando filas}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) = \left( \, I_3 \mid B \, \right).$$

Por tanto:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3)** Aplicando transformaciones elementales a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ conseguimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{F2=F2-F1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C2=C2-C1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto rango$(A) = 1 < 2$ y en consecuencia $A$ es una matriz singular que no tiene inversa.

Dada $A \in \mathcal{M}_n$ hemos visto que

$$\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

Sin embargo, si $\text{rango}(A) < n$ o $A$ no es cuadrada, esta caracterización no tiene sentido.

**Definición 70.** *Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos menor de orden $r$ de la matriz $A$ a cualquier submatriz cuadrada de orden $r$ de $A$.*

---

**Ejemplo 71.** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tenemos que:

- $\star$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadrada de orden 3 de $A$ y por lo tanto es un menor de orden 3 de la matriz $A$.
- $\star$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadrada de orden 2 de $A$ y por ello es un menor de orden 2 de $A$.
- $\star$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadrada de orden 2 de $A$ y como consecuencia un menor de orden 2.

- $\star$ (2), (0) ó (4) son submatrices cuadradas de orden 1, es decir, menores de orden 1.

**Propiedad 72.** *Dada* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$,

rango$(A) = r \Leftrightarrow$ *el orden del mayor menor regular de* $A$ *es* $r$.

En otras palabras, si una matriz tiene rango $r$, necesariamente podremos encontrar dentro de ella una submatriz cuadrada, un menor, de tamaño $r$ con inversa y además no es posible encontrar submatrices mayores con inversa.

# 4 Determinante de una matriz

Para la definición del determinante seguiremos un método constructivo basado en las fórmulas de desarrollo del determinante por una fila o columna.

**Definición 73.** *Dada $A \in \mathcal{M}_n$ definimos el determinante de $A$ y lo notamos* $\det(A)$ *o* $|A|$, *como el número que verifica:*

- *Si $A = (a)_{1\times 1} \in \mathcal{M}_1$, entonces $|A| = |(a)| = a$.*
- *Si $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ con $n > 1$, entonces $|A|$ se define de cualquiera de las dos siguientes maneras:*

  **a)** *Para cualquier $i = 1, \ldots, n$:*

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\cdot\Delta_{i1} + a_{i2}\cdot\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot\Delta_{in} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\end{pmatrix}}_{\textit{fila } i \textit{ de} A}\cdot\begin{pmatrix}\Delta_{i1}\\ \Delta_{i2}\\ \vdots \\ \Delta_{in}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  *La fórmula anterior se conoce como desarrollo del determinante de la matriz $A$ por la fila $i$-ésima.*

  **b)** *Para cualquier $j = 1, \ldots, n$:*

$$|A| = a_{1j}\cdot\Delta_{1j} + a_{2j}\cdot\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot\Delta_{nj}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \dots & \Delta_{nj} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}}_{columna\ j\ de A} .$$

*Esta fórmula se denomina desarrollo del determinante de la matriz $A$ por la columna $j$-ésima.*

*Donde $\Delta_{ij}$ se denomina adjunto $(i, j)$ de la matriz y se define mediante la fórmula*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{(i,j)}|,$$

*siendo $A_{(i,j)}$ la submatriz de $A$ obtenida eliminando la fila $i$-ésima y la columna $j$-ésima.*

**Nota.** Aunque el símbolo que usamos para el determinante de una matriz, $|\cdot|$, es el mismo que para el valor absoluto de un número real, son conceptos totalmente diferentes y no tienen relación alguna.

**Ejemplos 74.**
**1)** Para calcular el determinante de la matriz $(3)_{1\times 1}$ acudiremos al primer punto de la definición de determinante ya que esta matriz es una matriz tipo $1 \times 1$. Entonces tenemos que:

$$|(3)| = 3.$$

$|(-5)| = -5$ (recuérdese que $|(-5)|$ es el determinante de la matriz $(-5)_{1\times 1}$ y no el valor absoluto del número $-5$).

**2)** *Determinante de la matriz cuadrada de orden 2.*

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$:

*
$$A_{(1,1)} = (a_{22}).$$

*
$$A_{(1,2)} = (a_{21}).$$

*
$$A_{(2,1)} = (a_{12}).$$

*
$$A_{(2,2)} = (a_{11}).$$

A partir de lo anterior calculamos los adjuntos de la matriz:

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot |A_{(1,1)}| = (-1)^2 \cdot |(a_{22})| = a_{22}, \\
\Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot |A_{(1,2)}| = (-1)^3 \cdot |(a_{21})| = -a_{21}, \\
\Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot |A_{(2,1)}| = (-1)^3 \cdot |(a_{12})| = -a_{12}, \\
\Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot |A_{(2,2)}| = (-1)^4 \cdot |(a_{11})| = a_{11}.
\end{aligned}$$

Calcularemos siguiendo dos de las posibilidades anteriores:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| &= \\
\text{(fila 1)} &= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21}) \\
&= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \\
\text{(columna 2)} &= a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{22} \cdot \Delta_{22} = a_{12} \cdot (-a_{21}) + a_{22} \cdot a_{11} \\
&= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.
\end{aligned}$$

En definitiva:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Esquemáticamente,

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

donde los elementos que aparecen unidos por un segmento han de ser multiplicados.

**3)** *Determinante de una matriz cuadrada de orden 3.*

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

calcularemos su determinante haciendo el desarrollo por la primera columna. Tendremos entonces que:

$$|A| = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{31} \cdot \Delta_{31}.$$

Calculamos a continuación los adjuntos necesarios:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1}|A_{(1,1)}| = \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1}|A_{(2,1)}| = -\left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = \text{-}a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{13}, \\ \Delta_{31} &= (-1)^{3+1}|A_{(3,1)}| = \left|\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right| = a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{21} \cdot (a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{33}) \\ &\quad + a_{31} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}). \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ &\quad -(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}). \end{aligned}$$

A la fórmula anterior para el determinante de una matriz $3 \times 3$ se la denomina regla de Sarrus y se puede esquematizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{aligned} |A| \;=\; & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ & -(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

**4)** A continuación calculamos algunos determinantes de matrices $2 \times 2$ utilizando la fórmula obtenida en el ejemplo 3:

$\star$ $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2.$

$\star$ $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$

$\star$ $\left|\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = -9.$

**5)** Empleamos ahora la fórmula de Sarrus:

$$
\begin{aligned}
\star \left| \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 1 \\
&\quad -(0 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \cdot 1) \\
&= 2 + 6 = 8. \\
\star \left| \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right| &= \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 \\
&\quad -(0 \cdot 3 \cdot 6 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot 5) \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.
\end{aligned}
$$

**6)** $$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0\cdot\Delta_{13} + 1\cdot\Delta_{23} + 0\cdot\Delta_{33} - \Delta_{43}$$

$$= (-1)^{2+3}\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| - (-1)^{4+3}\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= -(0+0+4-0-3-2) + (-2+0+0-0-0-0)$$

$$= 1 - 2 = -1.$$

**7)** En el siguiente ejemplo resolvemos un determinante de tipo $4\times 4$ mediante un desarrollo por la segunda fila:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| &= \\
&= 2\cdot\Delta_{21}+0\cdot\Delta_{22}+\Delta_{23}+\Delta_{24} \\
&= -2\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \\
&= -2\cdot(4+2-1-1-4+2)-(2+1-2+1-1-4) \\
&\quad +(2-1-2-1-1-4) = -4+3-7=-8.
\end{aligned}$$

---

En los ejemplos anteriores se pone de manifiesto que el determinante puede adoptar como valor cualquier número real. Por contra, el rango será siempre un número natural.

**Propiedades 75.**

1. *Dada* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ *matriz diagonal, triangular inferior o triangular superior, se verifica que:*

   $$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

   *En particular* $|I_n| = 1$.

2. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$, $|A^t| = |A|$.

3. *Dadas* $A, B \in \mathcal{M}_n$, $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

4. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *regular, tenemos que* $|A| \neq 0$ *y además*

   $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

5. *Dada* $A \in \mathcal{M}_n$ *tal que* $|A| \neq 0$ *se verifica que* $A$ *es regular.*

6. *Dada una matriz* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$,

   $$\mathrm{rango}(B) = r \Leftrightarrow \textit{El orden del mayor menor de } A \textit{ con determinante no nulo es } r.$$

**Ejemplos 76.**

**1)** Considerada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$|A| = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5 \neq 0.$$

Puesto que el determinante de $A$ es no nulo sabemos que es una matriz regular y además sin necesidad de conocer su inversa, $A^{-1}$, sabemos el valor de su determinante:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}.$$

**2)** $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = \binom{\text{empleando la}}{\text{propiedad 1}} = 2 \cdot (-3) \cdot 6 = -36.$

**3)** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y calculemos su rango empleando los dos métodos que conocemos:

**i)** Veamos si $A$ tiene algún menor no nulo de orden 3:

$$\begin{cases} \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right| = 0 & \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0 \\ \\ \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0 & \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0 \end{cases}.$$

Sin embargo,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0.$$

De este modo el orden del mayor menor con determinante no nulo es 2 y por ello el rango de la matriz será:

$$\text{rango}(A) = 2.$$

**ii)** Efectuando operaciones sobre $A$ tenemos:

$$A \xrightarrow[\text{C3=C3+C1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C2=C2-2C1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{F3=F3-F1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{C3=C3-3C2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{F3=F3-2F2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

**Propiedades 77** (Operaciones elementales para determinantes). *Dada* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$ *tenemos que:*

1. *Un número que multiplica a toda una fila o a toda una columna puede salir fuera del determinante. Es decir,* $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & r\cdot a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & r\cdot a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & r\cdot a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = r\cdot\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r\cdot a_{i1} & r\cdot a_{i2} & \cdots & r\cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = r\cdot\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|.$$

2. *Si intercambiamos una columna (respectivamente fila) con otra columna(respec. fila) contigua el determinante cambia de signo.*

3. *Si a una columna (respectivamente fila) sumamos otra columna (respec. fila) multiplicada por un número, el determinante no varía.*

---

**Ejemplos 78.**

1. Aplicando la propiedad 1 tenemos:

   $\star$ $$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 & 0 \\ 6 & 2\cdot 2 & 3 \\ 2 & 2\cdot 4 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right|.$$

   $\star$ $$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{5}\cdot 0 & \frac{1}{5}\cdot 2 & \frac{1}{5}\cdot 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{5}\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix}\right|.$$

2. Aplicando repetidas veces la propiedad 2 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\right| &= (\mathrm{C2} \leftrightarrow \mathrm{C3}) = -\left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\right| \\
&= (\mathrm{C3} \leftrightarrow \mathrm{C4}) = \left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right| \\
&= (\mathrm{C2} \leftrightarrow \mathrm{C3}) = -\left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right| = -|I_n| = -1.
\end{aligned}$$

---

La última propiedad junto con las otras que hemos visto para determinantes permiten resolver de manera directa algunos determinantes sencillos. Veámoslo en la siguiente nota:

**Nota.** Es importante tener en cuenta los siguientes puntos:

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene una columna completa de ceros o una fila completa de ceros entonces $|A| = 0$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene dos columnas iguales o dos filas iguales entonces $|A| = 0$.
- Si alguna columna (respectivamente fila) puede obtenerse sumando las otras columnas (respec. filas) multiplicadas por números, entonces $|A| = 0$.

**Ejemplo 79.** En la matriz del determinante siguiente la tercera columna puede obtenerse como la suma del doble de la primera columna más el triple de la segunda, con lo que:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 16 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}\right| = (\text{C3=C3-2C1}) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (\text{C3=C3-3C2}) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0.$$

En la práctica, para la simplificación de un determinante se puede, con las necesarias precauciones, utilizar el procedimiento para reducción de matrices visto en la Sección 3.2 con la salvedad de que en el caso de determinantes hemos de tener en cuenta los siguientes puntos:

- La multiplicación de una fila o columna por un número no nulo hará que varíe el valor del determinante pero en su lugar podrá aplicarse el apartado 1 de **Propiedades 77**.
- La modificación del orden de las filas o columnas supone el cambio de signo del determinante según lo indicado en el apartado 2 de **Propiedades 77**.
- Una vez anulada una fila o columna utilizando un pivote, desarrollaremos el determinante por dicha fila o columna para obtener un determinante de menor tamaño.

Veamos a continuación algunos ejemplos de este método:

---

**Ejemplos 80.**
**1)**

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \text{(C2=C2+C3)} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{desarrollando por} \\ \text{la fila 4}\end{array}\right) = (-1)^{4+3} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right|$$

$$= -\big((-6+45+2) - (-3+10+18)\big) = -16.$$

**2)**

$$\left|\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 4 & 3\\ 6 & 2 & 1 & -1 & 9\\ 1 & -2 & 3 & 6 & 4\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{F2=F2+F1}\\ \text{F3=F3+F1}\\ \text{F4=F4+F1}\\ \text{F5=F5+3F1}\end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 0 & 6 & 4\\ 5 & 4 & 0 & 1 & 10\\ -2 & 4 & 0 & 12 & 7\end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{pmatrix}\text{desarrollando}\\ \text{la columna 3}\end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\left|\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 6 & 4\\ 5 & 4 & 1 & 10\\ -2 & 4 & 12 & 7\end{pmatrix}\right|$$

$$= \text{(F2=F2-F1)} = -\left|\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 1 & 10\\ -2 & 4 & 12 & 7\end{pmatrix}\right|$$

$$= \text{(C2=C2+C4)} = -\left|\begin{pmatrix}1 & 7 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 5 & 14 & 1 & 10\\ -2 & 11 & 12 & 7\end{pmatrix}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}\text{desarrollando}\\ \text{la fila 2}\end{pmatrix} = -2\cdot(-1)^{2+4}\cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6\\ 5 & 14 & 1\\ -2 & 11 & 12\end{pmatrix}\right|\\
&= -2\cdot\big((168+330-14)-(-168+11+420)\big)\\
&= -2\cdot 221 = -442.
\end{aligned}
$$

## 4.1 Calculo de la inversa mediante determinantes

En esta sección estudiaremos un método alternativo para el cálculo de la inversa de una matriz basado en el concepto de determinante.

**Definición 81.** *Dada $A \in \mathcal{M}_n$, llamamos matriz adjunta de $A$ y la notamos* $\mathrm{Adj}(A)$, *a la matriz:*

$$\mathrm{Adj}(A) = (\Delta_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n.$$

La matriz adjunta de $A$ es, por tanto, la matriz formada por todos los adjuntos de $A$ dispuestos ordenadamente.

**Propiedad 82** (Cálculo de la inversa mediante determinantes)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ tal que* $\det(A) \neq 0$, *entonces $A$ es una matriz regular y además:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t.$$

---

**Ejemplos 83.**
**1)** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = 5 + 8 = 13 \neq 0,$$

con lo cual $A$ es una matriz regular y podemos calcular su inversa para lo que obtendremos primero los adjuntos de la matriz

$$\begin{aligned}
&\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|(5)| = 5, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}|(4)| = -4,\\
&\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|(-2)| = 2, \ \Delta_{22} = (-1)^{2+2}|(1)| = 1
\end{aligned}$$

y entonces la matriz adjunta será:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2)** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ entonces su determinante es

$$|A| = -2 - 1 - 6 = -9$$

y además sus adjuntos son

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = -3, & \Delta_{12} = -\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = -1, & \Delta_{13} = \left|\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1, \\ \Delta_{21} = -\left|\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 6, & \Delta_{22} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = -1, & \Delta_{23} = -\left|\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1, \\ \Delta_{31} = \left|\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6, & \Delta_{32} = -\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -1, & \Delta_{33} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 8 \end{cases}$$

con lo que su matriz adjunta será:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

y $A^{-1}$ la calcularemos como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}(A)^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

# 5 Material adicional

## 5.1 Filas y columnas de proporciones

Ampliación de conceptos sobre producto de un número por una matriz. Página 35

Hemos visto que cuando en cierto fenómeno intervienen varios datos $a_1$, $a_2$,..., $a_n$, podemos representar esta información mediante un elemento de $\mathbb{R}^n$ en la forma,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Es frecuente que sea de interés determinar qué porcentaje representa cada cantidad respecto al total. Ello puede hacerse empleando tantos por ciento (porcentajes) o tantos por uno:

- El cálculo de porcentajes para cada cantidad de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se realiza de la siguiente forma:
  - Porcentaje de $a_1$ respecto al total= $\dfrac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_1\%$.
  - Porcentaje de $a_2$ respecto al total= $\dfrac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_2\%$.
  - $\vdots$
  - Porcentaje de $a_n$ respecto al total= $\dfrac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_n\%$.

- El cálculo de tantos por uno para cantidad de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se realiza como sigue:
  - Tanto por uno de $a_1$ respecto al total$= \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_1$.
  - Tanto por uno de $a_2$ respecto al total$= \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_2$.
  - $\vdots$
  - Tanto por uno de $a_n$ respecto al total$= \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_n$.

Entonces,

$$\left(\frac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_1, \ldots, \frac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_n\right) =$$
$$= \frac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Y también

$$\left(\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_1, \ldots, \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} a_n\right) =$$
$$= \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

En otras palabras,

| | |
|---|---|
| La upla de porcentajes correspondiente es: | $\dfrac{100}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ |
| La upla de tantos por uno correspondiente es: | $\dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ |

**Ejemplo 84.** Los consumos de materias primas en cierta zona industrial vienen dados por: 1123 toneladas de acero, 820 toneladas de aluminio, 530 toneladas de materiales plásticos. Podemos representar esta distribución mediante la 3-upla

$$(1123, 820, 530) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculemos los porcentajes:

- $\%$ de acero $= 100 \dfrac{1123}{1123 + 820 + 530} = 45.41\%.$
- $\%$ de aluminio $= 100 \dfrac{820}{1123 + 820 + 530} = 33.15\%.$
- $\%$ de plásticos $= 100 \dfrac{530}{1123 + 820 + 530} = 21.43\%.$

Como acabamos de ver,

$$\frac{100}{1123 + 820 + 530}(1123, 820, 530) = (45.41, 33.15, 21.43).$$

De la misma manera la upla de tantos por uno será,

$$\frac{1}{1123 + 820 + 530}(1123, 820, 530) = (0.4541, 0.3315, 0.2143).$$

# 6 Reglas de simplificación e igualdades de matrices

Ampliación sobre operaciones y simplificaciones con matrices. Página 57

**Propiedades 85.**

1. *Sean* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, entonces:*
$$A + B = A + C \;\Rightarrow\; B = C,$$
$$A + B = C \;\Rightarrow\; B = C - A.$$

2. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n$ *matriz regular y* $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, entonces:*
$$B \cdot A = C \cdot A \;\Rightarrow\; B = C,$$
$$B \cdot A = C \;\Rightarrow\; B = C \cdot A^{-1}.$$

3. *Sea* $A \in \mathcal{M}_m$ *matriz regular y* $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, entonces:*
$$A \cdot B = A \cdot C \;\Rightarrow\; B = C,$$
$$A \cdot B = C \;\Rightarrow\; B = A^{-1} \cdot C.$$

4. *Sea* $r \in \mathbb{R}$*,* $r \neq 0$ *y* $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$*, entonces:*
$$r \cdot B = r \cdot C \;\Rightarrow\; B = C,$$
$$r \cdot B = C \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{r} \cdot C.$$

**Nota.**

- $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}}_{=0_{2\times 2}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}}_{=0_{2\times 2}}$$

sin embargo,

$$\cancel{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=\cancel{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}$$

- Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$, no podemos realizar la simplificación

$$\cancel{A}\cdot B\cdot\cancel{A}^{-1}=B.$$

# 7 Modelos matriciales basados en potencias de matrices

Ampliación de conceptos sobre potencias de matrices. Página 57

El producto y la potencia de matrices son fundamentales en el planteamiento de los modelos matriciales más importantes.

Supongamos que estamos estudiando un fenómeno en el que intervienen varias magnitudes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ que varían con respecto al tiempo. Si disponemos en forma de upla el valor de las magnitudes en cada período $n$, obtendremos una lista de $k$-uplas, $P_0$, $P_1$, $\ldots$, $P_n$ que nos proporcionan la información del fenómeno en cada período.

En numerosas situaciones podemos calcular esas uplas mediante una fórmula del tipo

$$P_n = A^n \cdot P_0,$$

donde $A$ es una matriz cuadrada de orden $k$ que se denomina **matriz de transición**.

Ilustraremos mejor esto a continuación mediante un ejemplo clásico de modelo matricial basado en la potenciación de matrices.

**Ejemplo 86.** Supongamos que en cierto sector comercial compiten tres empresas que llamaremos A, B y C. De un año a otro,

| | **Los clientes de A** | **Los clientes de B** | **Los clientes de C** |
|---|---|---|---|
| **Pasan a A** | 80% | 10% | 10% |
| **Pasan a B** | 10% | 60% | 20% |
| **Pasan a C** | 10% | 30% | 70% |

Supongamos además que en el año en que comenzaron los estudios, la empresa A tenía 210 clientes, B tenía 190 y C, 320.

Suponiendo que el año $k = 0$ es el año en que comenzó el estudio de los clientes de las tres empresas, llamaremos:

- $A_k$ = clientes en la empresa A al cabo de $k$ años.
- $B_k$ = clientes en la empresa B al cabo de $k$ años.
- $C_k$ = clientes en la empresa C al cabo de $k$ años.

La información de cada año la agruparemos en una upla columna:

$$P_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix}.$$

Según los datos del problema

$$P_0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la tabla de transición,

- $$\underbrace{A_{k+1}}_{\text{clientes en A el año } k+1} = 80\% \text{ de } A_k + 10\% \text{ de } B_k + 10\% \text{ de } C_k$$
  $$= 0.8A_k + 0.1B_k + 0.1C_k.$$

- $$\underbrace{B_{k+1}}_{\text{clientes en B el año } k+1} = 10\% \text{ de } A_k + 60\% \text{ de } B_k + 20\% \text{ de } C_k$$
  $$= 0.1A_k + 0.6B_k + 0.2C_k.$$

- $$\underbrace{C_{k+1}}_{\text{clientes en C el año } k+1} = 10\% \text{ de } A_k + 30\% \text{ de } B_k + 70\% \text{ de } C_k$$
  $$= 0.1A_k + 0.3B_k + 0.7C_k$$

Empleando la definición del producto de matrices, es fácil darse cuenta de que

$$P_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.8A_k + 0.1B_k + 0.1C_k \\ 0.1A_k + 0.6B_k + 0.2C_k \\ 0.1A_k + 0.3B_k + 0.7C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot P_k.$$

Llamando $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$,

$$P_{k+1} = AP_k.$$

Tenemos por tanto,

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & AP_0 \\ P_2 & = & AP_1 \\ P_3 & = & AP_2 \\ P_4 & = & AP_3 \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$P_1 = AP_0$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= AP_1 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= A(AP_0) \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= AP_0 \\
P_2 &= (AA)P_0
\end{aligned}
$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= AP_0 \\
P_2 &= (AA)P_0 = A^2 P_0 \\
P_3 &= AP_2
\end{aligned}
$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\ P_3 &= A(A^2P_0) \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\ P_3 &= (AA^2)P_0 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\ P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3P_0 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\ P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3P_0 \\ P_4 &= AP_3 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= AP_0 \\
P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\
P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3P_0 \\
P_4 &= A(A^3P_0)
\end{aligned}
$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned}
P_1 &= AP_0 \\
P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\
P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3P_0 \\
P_4 &= (AA^3)P_0
\end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2 P_0 \\ P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3 P_0 \\ P_4 &= (AA^3)P_0 = A^4 P_0 \end{aligned}$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned}
P_1 &= AP_0 \\
P_2 &= (AA)P_0 = A^2P_0 \\
P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3P_0 \\
P_4 &= (AA^3)P_0 = A^4P_0
\end{aligned}$$

Luego, en general,

$$\boxed{P_k = A^kP_0}\ .$$

Entonces, si queremos calcular $P_4$

$$\begin{aligned} P_1 &= AP_0 \\ P_2 &= (AA)P_0 = A^2 P_0 \\ P_3 &= (AA^2)P_0 = A^3 P_0 \\ P_4 &= (AA^3)P_0 = A^4 P_0 \end{aligned}$$

Luego, en general,

$$\boxed{P_k = A^k P_0}\ .$$

La matriz $A$ regula el paso de un año al siguiente y es la **matriz de transición** para este problema.

Puesto que conocemos la distribución inicial de clientes, $P_0$, podemos calcular fácilmente la distribución en años sucesivos. Para ello, calculamos varias potencias de A:

$$\begin{aligned}
A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix}. \\
A^3 = AA^2 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix}. \\
A^4 = AA^3 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.4934 & 0.2533 & 0.2533 \\ 0.223 & 0.3201 & 0.2945 \\ 0.2836 & 0.4266 & 0.4522 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Empleando estos cálculos con la ecuación (86) tenemos que

$$P_1 = AP_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 219 \\ 199 \\ 302 \end{pmatrix}.$$

$$P_2 = A^2 P_0 = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225.3 \\ 201.7 \\ 293 \end{pmatrix}.$$

$$P_3 = A^3 P_0 = \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229.71 \\ 202.15 \\ 288.14 \end{pmatrix}.$$

$$P_4 = A^4 P_0 = \begin{pmatrix} 0.4934 & 0.2533 & 0.2533 \\ 0.223 & 0.3201 & 0.2945 \\ 0.2836 & 0.4266 & 0.4522 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232.797 \\ 201.889 \\ 285.314 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, una vez planteado este modelo surgen diversas cuestiones a resolver:

**a)** ¿Es posible estudiar la tendencia de futuro en la distribución de clientes?

**b)** ¿Existen distribuciones de equilibrio?