Capítulo 3.
Integración de funciones.

Objetivos del tema

- Concepto de primitiva e integral indefinida de una función.
- Métodos de integración por cambio de variables y por partes.
- Integrales inmediatas y de funciones racionales.
- Concepto matemático y cálculo de integral definida.
- La integral definida y el área. Interpretaciones de la integral definida.
- Aplicaciones de la integral definida.

1 Integración indefinida

La integración es el proceso inverso a la derivación.

Definición 1. *Dado un conjunto* $D \subseteq \mathbb{R}$ *y una función* $f : D \to \mathbb{R}$*, llamamos primitiva de* f *a cualquier función derivable,* $F : D \to \mathbb{R}$*, tal que*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in D.$$

Ejemplo 2. Dada la función $f(x) = x$, podemos calcular distintas primitivas:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 3, \quad F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 10.$$

Es evidente que $F'(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = x$.

Se puede demostrar que cualquier función continua tiene al menos una primitiva.

Propiedad 3. *Dada* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *continua, siempre existe* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *derivable tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

¿Cuántas y cómo son las primitivas de una función?

Propiedad 4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y una función $f : I \to \mathbb{R}$, entonces, si la función $F : I \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, se tiene que*

$$G : I \to \mathbb{R} \text{ es una primitiva de } f \Leftrightarrow G = F + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Por tanto, dada $f(x)$, la representación de todas sus primitivas será de la forma

$$F(x) + C,$$

donde C es una constante que puede tomar cualquier valor.

Definición 5. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f : I \to \mathbb{R}$, llamamos integral indefinida de f y la notamos*

$$\int f \; dx \qquad \text{ó} \qquad \int f(x) \; dx$$

a cualquier fórmula uniparamétrica que nos permite, dando valores a su parámetro, al cual llamaremos constante de integración, obtener todas las primitivas de la función f.

Obsérvese que, dada una función $f : I \to \mathbb{R}$, si conocemos una de sus primitivas, F, entonces teniendo en cuenta lo anterior la integral indefinida de f será

$$\int f \, dx = F + C,$$

siendo C la constante de integración.

Ejemplo 6. Consideremos la función $f(x) = x$ definida en todo $\mathbb{R}$. Es evidente que la función

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

es una primitiva de f. Entonces, la integral indefinida de f será

$$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Si en la expresión anterior damos valores reales al parámetro C podemos obtener todas las primitivas de la función $f(x) = x$.

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I, es claro que

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + C.$$

2 Cálculo de la integral indefinida

De las propiedades para la derivada de una función se deducen directamente las siguientes para la integral indefinida:

- Dadas las funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$, definidas en el intervalo I, se cumple que:
  * $\displaystyle\int (f+g)dx = \int f\ dx + \int g\ dx.$
  * $\displaystyle\int k \cdot f\ dx = k \cdot \int f\ dx.$
- Dadas $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ tales que $f(I) \subseteq J$, se tiene que
$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\ dx = (g \circ f)(x).$$
- $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ \forall n \in \mathbb{N}.$
- $\displaystyle\int x^\alpha\ dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}.$
- $\displaystyle\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}.$
- $\displaystyle\int a^{kx}\ dx = \frac{1}{k\log(a)}a^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}, a \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen}(x) + C,$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cosh(x)\, dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\, dx = \cosh(x) + C.$

Es evidente que no toda función se ajusta a alguna de las que aparecen en la lista anterior.

2.0.1 Integración por cambio de variable

Consideremos la integral indefinida de la función f,

$$\int f(x)\,dx.$$

Esta integral aparece expresada en términos de la variable x. Supongamos que la variable t está relacionada con x mediante

$$\varphi(t) = \phi(x).$$

Derivemos esta expresión mediante la siguiente regla mnemotécnica en la que introducimos el diferencial con respecto a t, dt, y el diferencial con respecto a x, dx,

$$\varphi'(t)dt = \phi'(x)dx.$$

Si reunimos estas dos igualdades obtenemos dos ecuaciones,

$$\begin{cases} \varphi(t) = \phi(x), \\ \varphi'(t)\,dt = \phi'(x)\,dx, \end{cases}$$

a través de las cuales podemos despejar x en función de t y dx en función de dt y t para posteriormente sustituir los resultados obtenidos en la integral que pretendemos calcular. Se resuelve la integral en función de la variable t y luego se deshace el cambio.

2.0.2 Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la propiedades de derivación del producto de funciones. Sabemos que

$$\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = f(x) \cdot g(x) + C$$

y además

$$\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx = \int (f'(x) \cdot g(x) +$$

$$f(x) \cdot g'(x)) \, dx = \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

de manera que uniendo las dos igualdades

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) + C$$

de donde

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + C$$

Propiedad 7. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en el intervalo I, entonces*

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

La propiedad anterior no se utiliza directamente sino a través del siguiente esquema que se denomina **método de integración por partes** para el cálculo de la integral $\int f(x)g(x)dx$:

$$\int (\underbrace{f(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{g(x)}_{=v'(x)})\, dx = \int (u(x) \cdot v'(x))\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = f(x) \\ v'(x) = g(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u'(x) = f'(x) \\ v(x) = \int g(x)\, dx \end{array} \right\}$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{usando la} \\ \text{propiedad} \end{array} \right) = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Ejemplo 8.

$$\begin{aligned} \int x \log(x)\, dx &= \left\{ \begin{array}{lcl} u = \log(x) & & u' = (\log(x))' = \frac{1}{x} \\ & \Rightarrow & \\ v' = x & & v = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log(x) - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{1}{2}\int x\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

El método de integración por partes se puede aplicar para obtener la integral de funciones del tipo

$$p(x) \cdot f(x),$$

donde $p(x)$ es un polinomio y $f(x)$ es una función logarítmica, exponencial o trigonométrica.

2.1 Integrales inmediatas

2.1.1 Integrales inmediatas de tipo potencial

Son integrales que pueden fácilmente transformarse hasta la forma

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C.$$

2.1.2 Integrales inmediatas de tipo exponencial

Son integrales que pueden ajustarse a la forma

$$\int f'(x) a^{f(x)}\ dx = \frac{1}{\log(a)} a^{f(x)} + C$$

2.1.3 Integrales inmediatas de tipo logarítmico

Son integrales en las que aparece una función dividiendo a su derivada. Son del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log(f(x)) + C.$$

2.2 Integración de funciones racionales (sólo raíces reales en el denominador)

Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, la idea es expresar la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ como suma de fracciones simples.

a) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x})}{\mathbf{q}(\mathbf{x})}\mathbf{dx}$ cuando $\mathbf{grado}(\mathbf{p}(\mathbf{x})) \geq \mathbf{grado}(\mathbf{q}(\mathbf{x}))$.

Si grado$(p(x)) \geq$ grado$(q(x))$ efectuamos la división

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & s(x) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \\ \\ \text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x)) \end{cases} .$$

Posteriormente efectuaremos la integral de la expresión obtenida,

$$\int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) \, dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Ejemplo 9. Calcular la integral

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx.$$

$$\begin{array}{c|l} x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12 & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ \cline{2-2} x & x + 3 \end{array}.$$

Es decir,

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} =$$
$$= x + 3 + \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

y por tanto

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 21x - 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} =$$
$$= \int (x+3) dx + \int \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx.$$

b) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ cuando grado$(\mathbf{p(x)}) <$ grado$(\mathbf{q(x)})$.

Si grado$(p(x))$ $<$ grado$(q(x))$ descompondremos la función racional en una suma de fracciones simples en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_k.$$

Para determinar cuáles son las fracciones S_1, S_2,... S_k seguimos los siguientes pasos:

1. Calcularemos todas las soluciones de la ecuación polinómica

$$q(x) = 0.$$

Ejemplo 10. Siguiendo con el **Ejemplo 9**, para resolver la integral que quedó pendiente, igualaremos a cero el denominador

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
1 & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \underline{\vert\, 0} \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \underline{\vert\, 0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \underline{\vert\, 0} & &
\end{array}
$$

2. Por cada solución real, $\alpha \in \mathbb{R}$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición de la función racional el siguiente grupo de fracciones simples
$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$
Véase que si hay multiplicidad de k añadiremos k fracciones simples para la solución α.

Ejemplo 11.
1) Continuando con el ejemplo 10, veamos qué fracciones

simples añadiremos para cada solución:

- La solución $\alpha = 2$ tiene multiplicidad 2. Para ella añadiremos dos fracciones simples,
$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}.$$
- La solución $\alpha = 1$ tiene multiplicidad 1. Para ella añadimos una sola fracción simple,
$$\frac{A_3}{x-1}.$$

$$\frac{x}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-1}. \qquad (1)$$

Los coeficientes A_1, A_2 y A_3 han de ser calculados ahora. Teniendo en cuenta que

$$\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-1} =$$

$$\frac{A_1(x-2)(x-1) + A_2(x-1) + A_3(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

y que

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1),$$

la ecuación (1) nos lleva a que

$$x = A_1(x-2)(x-1) + A_2(x-1) + A_3(x-2)^2.$$

Dando distintos valores a la variable x en la igualdad anterior obtenemos un sistema de ecuaciones del que despejaremos dichos coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow\; 1 = A_3 \\ x = 2 \Rightarrow\; 2 = A_2 \\ x = 0 \Rightarrow\; 0 = 2A_1 - A_2 + 4A_3 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$A_1 = -1,\; A_2 = 2,\; A_3 = 1.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, la descomposición en fracciones simples es

$$\begin{aligned}&\frac{x}{x^3-5x^2+8x-4} = \\ &\quad = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^3-5x^2+8x-4} = \\ &= -\int \frac{1}{x-2} + 2\int \frac{1}{(x-2)^2} + \int \frac{1}{x-1} \\ &= -\log(x-2) - 2(x-2)^{-1} + \log(x-1) + C.\end{aligned}$$

3 Integral definida

Definición 12.

i) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$. Supongamos que f es continua y acotada en (a, b) y que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que es derivable en (a, b) y que $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x),$$

es decir, F es una primitiva de f en (a, b). Entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

ii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$ y supongamos que f es acotada en (a, b) y continua en (a, b) excepto a lo sumo en los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Definimos la integral definida de f entre b y a como

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ acotada y dado $a \in \mathbb{R}$ definimos la integral definida de f entre a y a como

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

La diferencia $F(b) - F(a)$ suele denotarse como $[F(x)]_a^b$ con lo que tenemos

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Propiedades 13.

i) Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *tales que* $(a, b) \subseteq D$, *de modo que* f *y* g *están en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 12** *para dicho intervalo, entonces:*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \; dx = \alpha \int_a^b f(x) \; dx + \beta \int_a^b f(x) \; dx.$$

2. $\forall c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x) \; dx = \int_a^c f(x) \; dx + \int_c^b f(x) \; dx.$

3. (Teorema Fundamental del Cálculo) Si consideramos la función

$$\begin{gathered} F : [a, b] \to \mathbb{R} \\ F(x) = \int_a^x f(t) \; dt \end{gathered},$$

entonces F *es una función continua en* $[a, b]$ *y derivable en todos aquellos puntos* $x \in (a, b)$ *en los que* f *es continua, teniéndose en tales casos que*

$$F'(x) = f(x).$$

4. Si modificamos la función f *en un conjunto finito de puntos, el valor de su integral entre a y b no varía.*

ii) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

iii) (Fórmula del cambio de variable) Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to [a,b]$ en las condiciones del apartado ii) de la **Definición 12** *para sus respectivos dominios. Supongamos que g es derivable en $[c,d]$, entonces*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx.$$

3.1 Aplicaciones de la integral definida

3.1.1 Cálculo del área a partir de la integral definida

Propiedad 14. *Dada la función* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 12**, *el área comprendida entre el eje* $y = 0$, *las rectas verticales* $x = a$ *y* $x = b$ *y la gráfica de la función* f *se calcula mediante la integral definida*

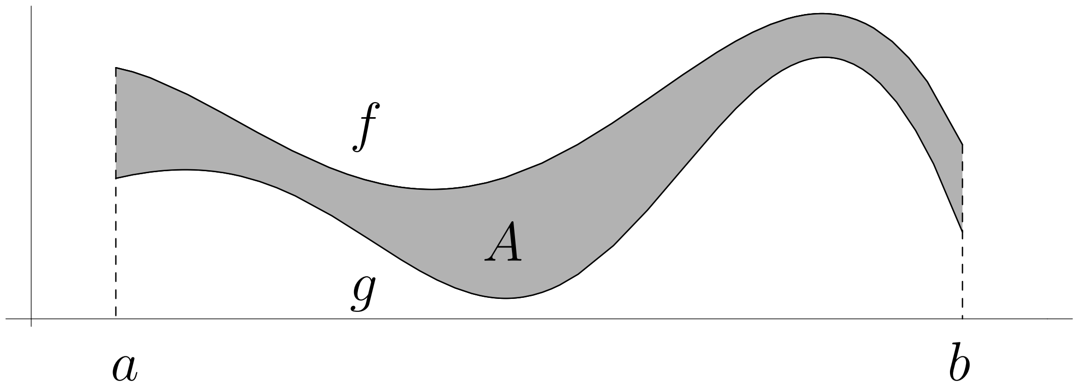
$$\int_a^b f(x)dx$$

de modo que si f *es positiva en* (a, b) *dicha integral proporcionará el área con signo positivo y si* f *es negativa lo hará con signo negativo.*

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x), \ \forall x \in [a, b],$$

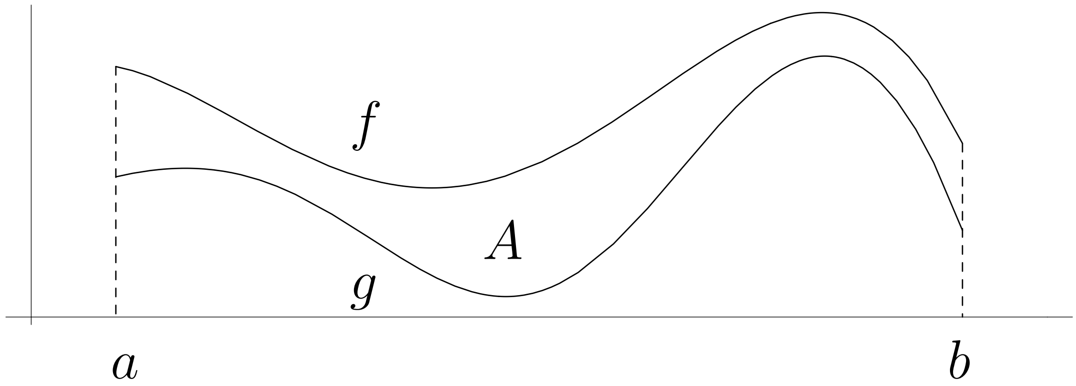
podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.



Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x), \; \forall x \in [a, b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.

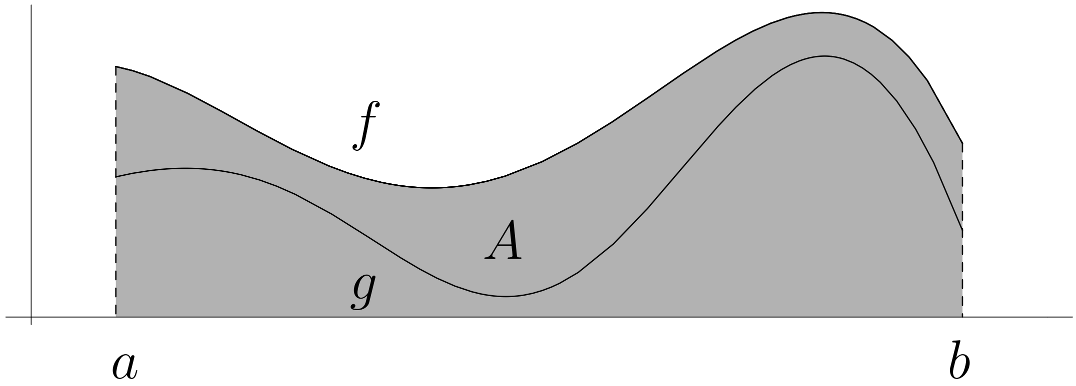


$A =$ área bajo $f-$ área bajo g.

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.



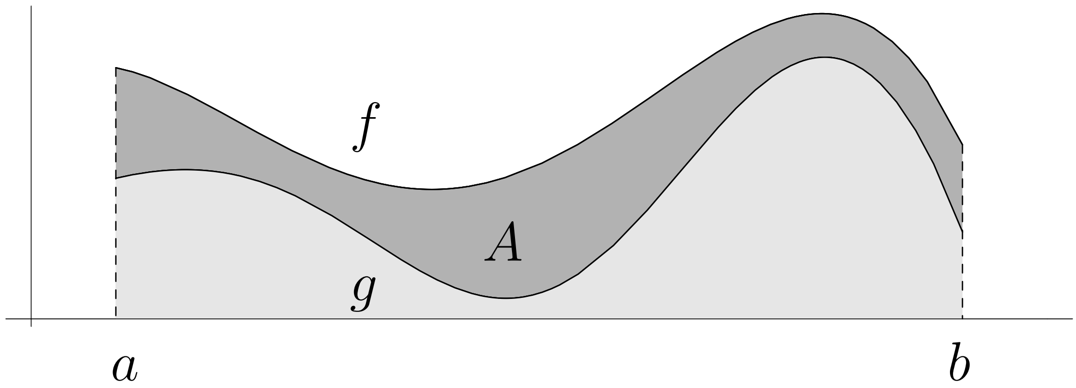
$$A = \text{área bajo } f - \text{ área bajo } g.$$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow$ tales que

$$f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.



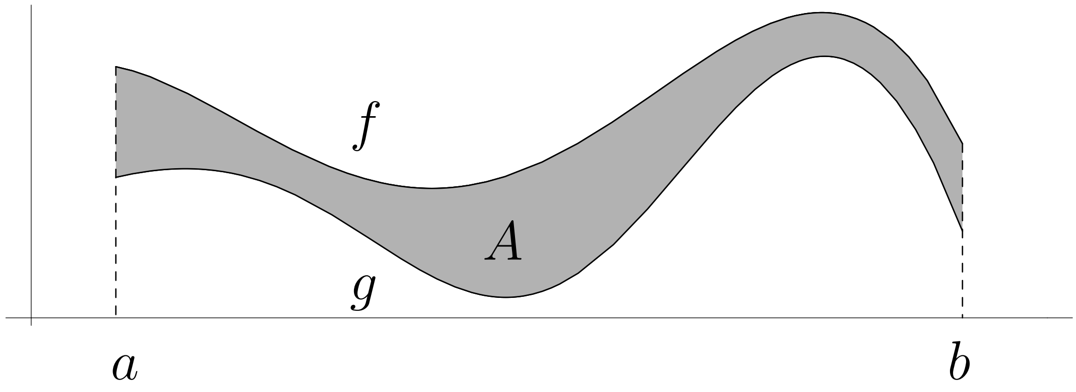
$$A = \text{área bajo } f - \text{ área bajo } g.$$

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.



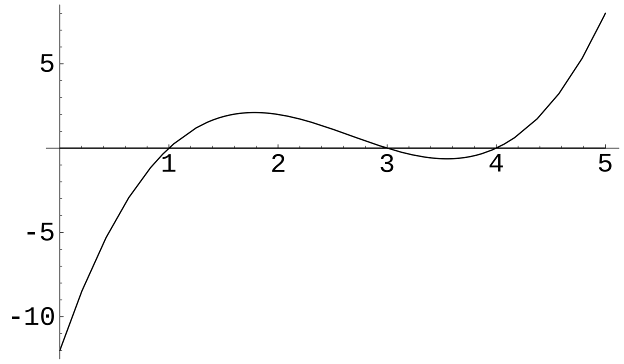
$$A = \text{área bajo } f - \text{ área bajo } g.$$

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

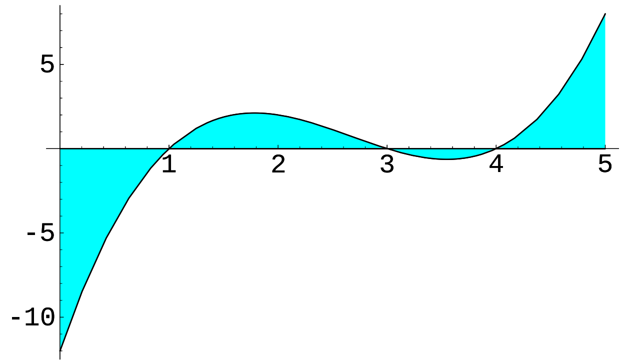
A este respecto, nuevamente es preciso tener en cuenta los posibles puntos de corte entre las funciones f y g que podrían hacer variar el signo de la integral anterior.

Ejemplos 15.

1) Calculemos el área encerrada entre la función $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ y el eje x sobre el intervalo $[0, 5]$.



El área encerrada por la función será por tanto la región que aparece sombreada en la siguiente figura:



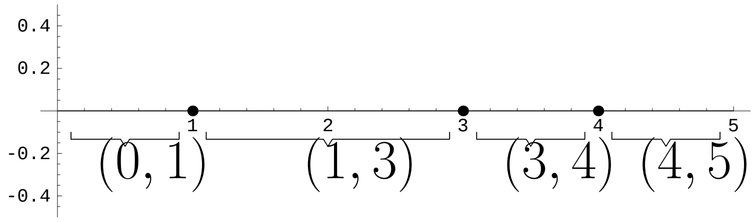
De este modo, debemos determinar cuándo

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) < 0.$$

Para ello comenzamos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, es decir,

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0.$$

Si aplicamos el método de Ruffini es fácil comprobar que las soluciones de esta ecuación son $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$ que dividen al intervalo $[0, 5]$ en cuatro subintervalos



Basta entonces comprobar el signo de la función en un punto de cada intervalo para deducir que

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (0,1). \\ f(x) > 0 \text{ en } (1,3). \\ f(x) < 0 \text{ en } (3,4). \\ f(x) > 0 \text{ en } (4,5). \end{cases}$$

Por tanto, en los intervalos $(0, 1)$ y $(3, 4)$ la integral definida proporcionará el área encerrada por la función f pero con signo negativo.

$$\text{área} = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx.$$

Puesto que la integral indefinida de $f(x)$ es

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 8x^2 + 19x - 12)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x + C,$$

finalmente tenemos

$$\text{área} = -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_0^1$$

$$+\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_1^3 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_3^4$$

$$+\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_4^5 = \frac{133}{12} = \frac{59}{12} + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = 11.0833.$$

3.1.2 Cálculo de la función de valor total a partir de la función de velocidad

Supongamos que cierto fenómeno que evoluciona a lo largo del tiempo está determinado por una magnitud, $M(t)$, de la cual conocemos su velocidad de variación, $v(t)$, en cada instante. Supongamos además que sabemos que en el instante t_0 dicha magnitud tomaba un valor M_0. Tratamos de determinar quién es la función $M(t)$ a partir de la siguiente información:

$$\begin{cases} M'(t) = v(t), \\ M(t_0) = M_0. \end{cases}$$

Utilizando el apartado *ii)* de la **Definición 13** tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} M'(t)dt = M(t) - M(t_0) \Rightarrow M(t) - M_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\Rightarrow M(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

Esta última identidad nos proporciona el dato, en principio desconocido, del valor $M(t)$ en cualquier instante.

3.1.3 Cálculo del valor medio de una función

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en principio positiva,

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área que encierra la función sobre el intervalo $[a, b]$. ¿Existe una función constante $g(x) = k$ que encierre la misma área que la función f?.

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b kdx = [kt]_a^b = k(b-a).$$

Si queremos que encierre la misma área que f,

$$k(b-a) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Por tanto,

$$g(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Definición 16. *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, llamamos valor medio de la función a la cantidad*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

3.1.4 El interés variable compuesto continuamente

Existen numerosas situaciones en las que el interés que rinde cierto capital varía a lo largo del tiempo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Capital inicial}=P_0 \\ \text{Interés} = I = I(t) \end{array} \right. \Rightarrow ¿P(t)?$$

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}} \,. \tag{2}$$

Ejemplos 17.
1) Invertimos 1000€ en un fondo de inversión que ofrece interés variable compuesto continuamente. El interés inicial del fondo es del 3% anual y cada año se incrementa en un 0.5%. Calcular el capital que recibiremos al cabo de 5 años.

Es evidente que para calcular el interés en el año t podremos aplicar la fórmula

$$\underbrace{0.03}_{\text{Interés inicial}} + \underbrace{0.005}_{\text{Incremento anual}} \times \underbrace{t}_{\text{Años transcurridos}} .$$

Por tanto,

$$I(t) = 0.03 + 0.005t.$$

Entonces, si aplicamos la fórmula (2),

$$P(t) = 1000 \cdot e^{\int_0^t (0.03+0.005t)dt} = 1000 \cdot e^{0.03t+0.005\frac{t^2}{2}}.$$

Por tanto, pasados 5 años el capital será

$$P(5) = 1000 \cdot e^{0.03\cdot 5+0.005\frac{5^2}{2}} = 1236.77€$$

2) Cierta cuenta bancaria paga un interés variable compuesto continuamente. El capital acumulado en esa cuenta viene dado por la función

$$P(t) = 1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}.$$

¿Qué interés hemos recibido cada año?. ¿En concreto qué interés obtendremos al tercer año?.

En este caso conocemos la función de capital $P(t)$ y debemos calcular la función de interés $I(t)$. Para ello recurriremos a la fórmula (3):

$$I(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{\left(1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}\right)'}{1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}} = \frac{1500 \cdot 0.01 \cdot 2(t+1) \cdot e^{0.01(t+1)^2}}{1500 \cdot e^{0.01(t+1)^2}}$$

$$= 0.02(t+1).$$

Así pues, la función de interés es $I(t) = 0.02(t+1)$ y mediante ella calculamos el interés en el año tres,

$$I(3) = 0.02(3+1) = 0.08,$$

o lo que es lo mismo, un 8%.

4 Material Adicional

4.1 Integración de funciones racionales (caso general)

Ampliación de conceptos sobre integración de funciones racionales. Página 12

Comenzamos viendo varios casos de funciones racionales que pueden ser integradas de forma sencilla:

1) Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx, \quad \int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ya hemos visto que estas integrales pueden resolverse como integrales inmediatas de tipo potencial o logarítmico.

2) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx$.

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{b^2\left(\frac{(x-a)^2}{b^2}+1\right)}\, dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\, dx$$

$$= \left(\begin{array}{l} t = \frac{x-a}{b} \\ dt = \frac{1}{b}\, dx \Rightarrow dx = b\ dt \end{array} \right) = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{t^2+1} b\ dt$$

$$= \frac{1}{b} \operatorname{arctg}(t) = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array} \right) = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-a}{b} \right).$$

3) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2} dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-a)^2+b^2} dx &= \\ &= \int \frac{x-a+a}{(x-a)^2+b^2} dx \\ &= \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx + a \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, la integral $\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$ puede calcularse como en el apartado **2)** y la integral $\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx$ es de tipo logarítmico ya que,

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = (x-a)^2 + b^2 \\ f'(x) = 2(x-a) \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log \left((x-a)^2 + b^2 \right) + C.$$

Podemos resolver por tanto:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx$ y $\displaystyle\int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\ dx.$

3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}dx.$

Análogamente a como hicimos en la subsección 2.2, para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, la idea es expresar la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ como la suma de fracciones simples de las que aparecen en los apartados **1)**, **2)** y **3)** que acabamos de ver.

a) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ **cuando** $\mathbf{grado(p(x)) \geq grado(q(x))}$**.**

Si grado$(p(x)) \geq$ grado$(q(x))$ efectuamos la división

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & s(x) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \\ \\ \text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x)) \end{cases} .$$

Posteriormente efectuaremos la integral de la expresión obtenida,

$$\int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) \, dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Ejemplo 18. Calcular la integral

$$\int \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} dx.$$

$$\begin{array}{l|l} x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28 & x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20 \\ \cline{2-2} \quad x^4 - 15x^2 + 27x - 8 & \qquad x + 1 \end{array}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &\frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} = \\ &= x + 1 + \frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} = \\ &= \int (x+1) dx + \int \frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} dx. \end{aligned}$$

b) Cálculo de $\int \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}\mathbf{dx}$ cuando $\mathbf{grado(p(x)) < grado(q(x))}$.

Si grado$(p(x))$ < grado$(q(x))$ descompondremos la función racional en una suma de fracciones simples en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_k,$$

Para determinar cuáles son las fracciones S_1, S_2,... S_k seguimos los siguientes pasos:

1. Calcularemos todas las soluciones reales y complejas de la ecuación polinómica
$$q(x) = 0.$$

Ejemplo 19. Siguiendo con el **Ejemplo 18**, para resolver la integral que quedó pendiente, igualaremos a cero el denominador

$$x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20 = 0$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -10 & 39 & -72 & 62 & -20 \\
1 & & 1 & -9 & 40 & -42 & 20 \\
\hline
 & 1 & -9 & 30 & -42 & 20 & \underline{|0} \\
1 & & 1 & -8 & 22 & -20 & \\
\hline
 & 1 & -8 & 22 & -20 & \underline{|0} & \\
2 & & 2 & -12 & 20 & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 10 & \underline{|0} & &
\end{array}
$$

Por tanto, para encontrar todas las soluciones, debemos resolver por último,

$$x^2 - 6x + 10 = 0.$$

$$
\begin{cases}
x = 1, & \text{con multiplicidad } 2, \\
x = 2, & \text{con multiplicidad } 1, \\
x = 3 \pm i, & \text{con multiplicidad } 1.
\end{cases}
$$

2. Por cada solución real, $\alpha \in \mathbb{R}$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición de la función racional el siguiente grupo de fracciones simples
$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$
Véase que si hay multiplicidad de k añadiremos k fracciones simples para la solución α.

3. Por cada par se soluciones complejas, $a \pm bi$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición los sumandos
$$\frac{M_1 + N_1 x}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{M_2 + N_2 x}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^2} + \cdots + \frac{M_k + N_k x}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^k},$$
otra vez, tantos sumandos como indique la multiplicidad de la solución.

Ejemplos 20.

1) Continuando con el ejemplo 19, veamos qué fracciones

simples añadiremos para cada solución:

- La solución $\alpha = 1$ tiene multiplicidad 2. Para ella añadiremos dos fracciones simples,
$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}.$$

- La solución $\alpha = 2$ tiene multiplicidad 1. Para ella añadimos una sola fracción simple,

$$\frac{A_3}{x-2}.$$

- La pareja de soluciones complejas $\alpha = 3 \pm i$ tiene multiplicidad 1. Todo número complejo es de la forma $a + bi$. En este caso $a = 3$ y $b = 1$. Añadiremos una fracción del tipo $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, es decir,

$$\frac{Mx+N}{(x-3)^2+1}.$$

$$\frac{x^4-15x^2+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20} =$$
$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x-3)^2+1}.$$

Los coeficientes A_1, A_2, A_3, N y M han de ser calculados ahora. Para ello daremos distintos valores a la variable x para obtener un sistema de ecuaciones del que despejaremos dichos coeficientes.

$$\left.\begin{array}{ll}
x=0 \Rightarrow & -A_1 + A_2 - \frac{A_3}{2} + \frac{N}{10} = \frac{2}{5} \\
x=-1 \Rightarrow & -\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{3} + \frac{N-M}{17} = \frac{49}{204} \\
x=-2 \Rightarrow & -\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{9} - \frac{A_3}{4} + \frac{N-2M}{26} = \frac{53}{468} \\
x=3 \Rightarrow & \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} + A_3 + 3M + N = \frac{19}{4} \\
x=-3 \Rightarrow & -\frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{16} - \frac{A_3}{5} + \frac{N-3M}{37} = \frac{143}{2960}
\end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$A_1 = -2,\ A_2 = -1,\ A_3 = 1,\ M = 2,\ N = -1.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{x^4-15x^2+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20} =$$
$$= \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{2x-1}{(x-3)^2+1}.$$

Así pues,

$$\int \frac{x^4 - 15x^2 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} =$$

$$\begin{aligned} &= -2\int \frac{1}{x-1} - \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x-2} + 2\int \frac{x}{(x-3)^2+1} \\ &\quad - \int \frac{1}{(x-3)^2+1}. \\ &= -2\log(x-1) + (x-1)^{-1} + \log(x-2) + 5\arctan(x-3) \\ &\quad + \log\left((x-3)^2+1\right) + C. \end{aligned}$$

2) Calcular la integral

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 29}{x^2 - 4x + 9}\, dx.$$

El grado del numerador es mayor que el del denominador así que efectuaremos la división de uno entre el otro

$$\begin{array}{c|c} x^3 - x^2 + 29 & x^2 - 4x + 9 \\ \cline{2-2} 3x + 2 & x + 3 \end{array}$$

de manera que

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^3 - x^2 + 29}{x^2 - 4x + 9}\, dx = \\ &= \int \left(x + 3 + \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 9} \right)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 9}\, dx. \end{aligned}$$

Para calcular esta última integral obtendremos las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4x + 9 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5}i$$

Por lo tanto la función racional a integrar se descompondrá en la forma

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+9} = \frac{Mx+N}{(x-2)^2+5} = \begin{pmatrix} M=3 \\ N=2 \end{pmatrix} = \frac{3x+2}{(x-2)^2+5}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x+2}{x^2-4x+9}\,dx = \\
&= \int \frac{3x+2}{(x-2)^2+5}\,dx = \int \frac{3(x-2)+8}{(x-2)^2+5}\,dx \\
&= 3\int \frac{x-2}{(x-2)^2+5}\,dx + \int \frac{8}{(x-2)^2+5}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\log\big((x-2)^2+5\big) + \frac{8}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Finalmente tendremos que

$$\int \frac{x^3-x^2+29}{x^2-4x+9}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{8}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$+\frac{3}{2}\log\big((x-2)^2+5\big) + C.$$

4.2 Integración por cambio hasta una integral racional

Ampliación de técnicas de integración. Página 18

Denotaremos mediante $\mathbf{R}(a)$ y $\mathbf{R}(a,b)$ a cualquier expresión que se obtiene mediante suma producto y división de las expresiones a y/ó b y de constantes.

Ejemplos 21.
1) La expresión

$$\frac{\log^3(x) + 2\log^2(x) + 1}{\log^3(x) - 1}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(\log(x))$.

2) La expresión

$$\frac{\cos^2(x) + 2x\cos(x) + x}{1 + x^2 + 2\cos^3(x)}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x, \cos(x))$ ya que se obtiene sumando multiplicando o dividiendo las expresiones x, $\cos(x)$ y valores constantes. Sin embargo no es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x)$ ni de tipo $\mathbf{R}(\cos(x))$.

Para resolver la integral

$$\int \mathbf{R}(h(x))h'(x)\;dx,$$

donde $h(x)$ puede ser alguna de entre

$$\begin{cases} a^x, \;\; a > 0 \\ e^x \\ \log(x) \\ \arccos(x) \\ \operatorname{arcsen}(x) \\ \operatorname{arctg}(x) \end{cases}$$

efectuaremos el cambio

$$t = h(x).$$

Nota. Una integral del tipo $\int \mathbf{R}(e^x)\;dx$ también se puede resolver utilizando el método anterior.

4.3 Integración de funciones trigonométricas

Ampliación de técnicas de integración. Página 18

Estudiaremos en esta sección el cálculo de integrales del tipo

$$\int \mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x))\; dx,$$

donde la expresión $\mathbf{R}$ tiene el significado que se indica en la página 50. Para resolver esta integral tenemos tres opciones posibles en función de las propiedades que tenga la expresión $\mathbf{R}$:

i) Se dice que la expresión $\mathbf{R}$ es impar en $\operatorname{sen}(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(\cos(x), -\operatorname{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x)),$$

lo cual se produce generalmente cuando en $\mathbf{R}$ aparecen potencias impares de $\operatorname{sen}(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\begin{cases} \cos(x) = t \Rightarrow x = \arccos(t) \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases}}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - t^2}}.$$

ii) Se dice que la expresión **R** es impar en $\cos(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(-\cos(x), \operatorname{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$$

lo cual se produce generalmente cuando en **R** aparecen potencias impares de $\cos(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{sen}(x) = t \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(t) \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases}}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(x) = \sqrt{1-t^2}}.$$

iii) Independientemente de que la expresión **R** sea par o impar en sen(x) ó en cos(x) siempre podremos aplicar el siguiente cambio que se denomina usualmente **cambio general**

$$\boxed{\begin{cases} t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}(t) \\ \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}}$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales, de las ecuaciones del cambio se deducen las siguientes expresiones para cos(x) y sen(x):

$$\begin{cases} \boxed{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \\ \boxed{\mathrm{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}} \end{cases}$$

4.4 El área como integral definida

Ampliación del cálculo del área a partir de la integral definida. Página 23

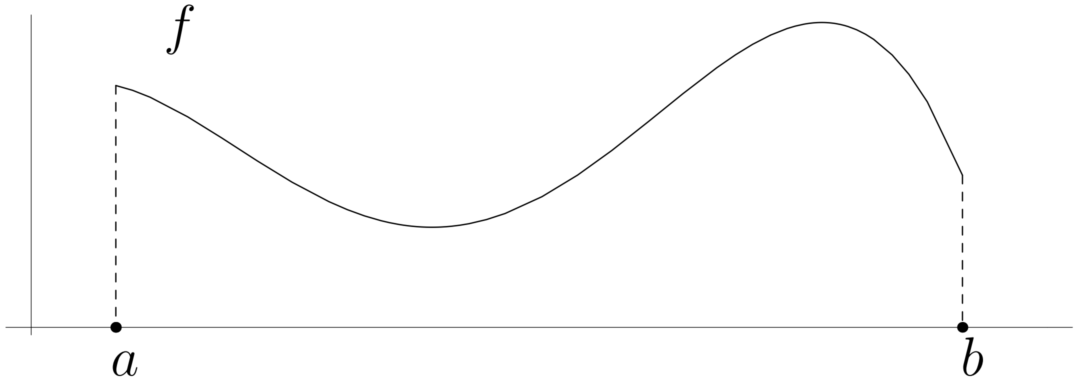
Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ podemos definir su área que notaremos

$$\text{área}(A).$$

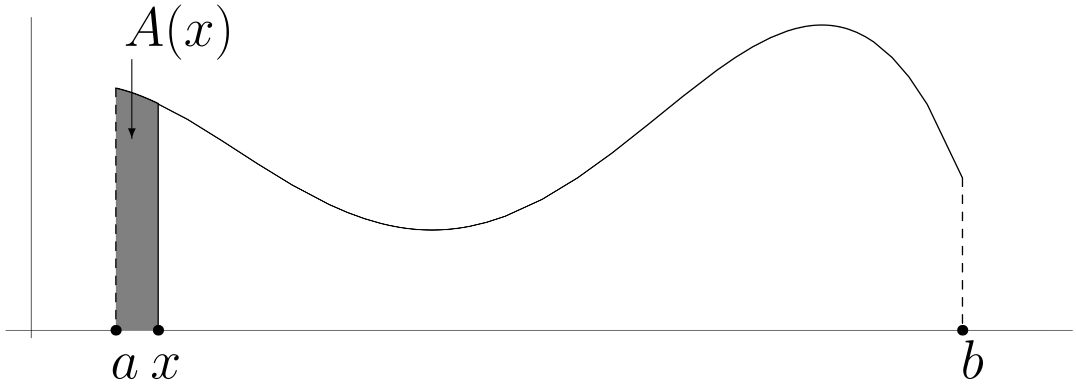
Algunas propiedades sencillas son:

- El área del recinto encerrado por un rectángulo cuyos lados miden l_1 y l_2 es el producto $l_1 \cdot l_2$.
- Si $A \subseteq B$, $\text{área}(A) \leq \text{área}(B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$, $\text{área}(A \cup B) = \text{área}(A) + \text{área}(B)$.

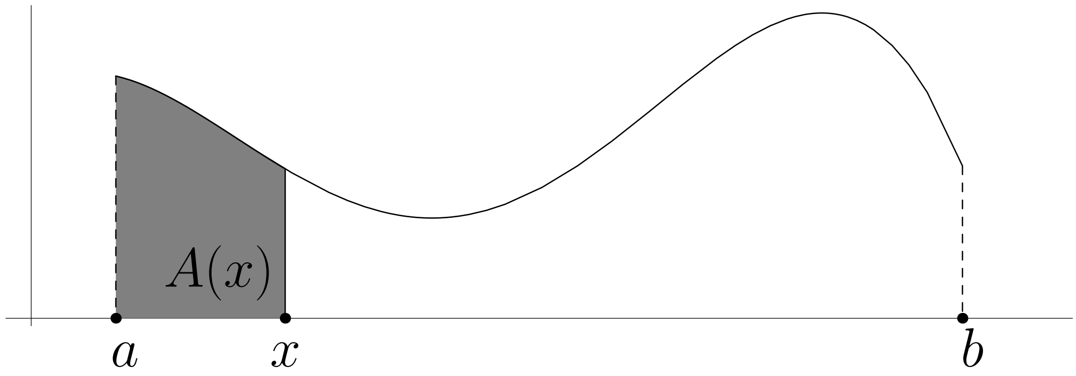
Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva.



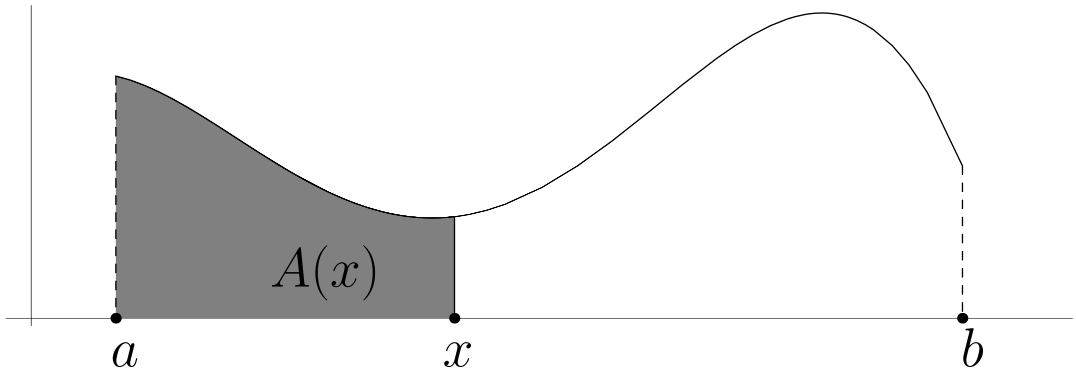
Consideremos una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a,b)$,



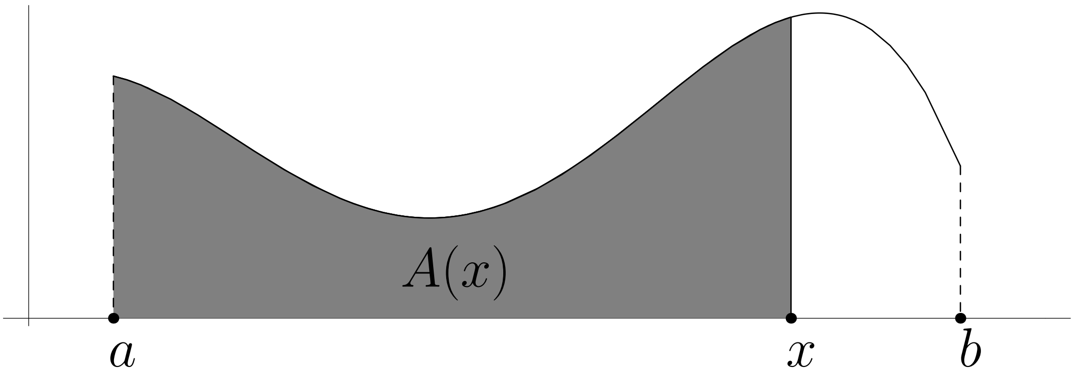
Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,



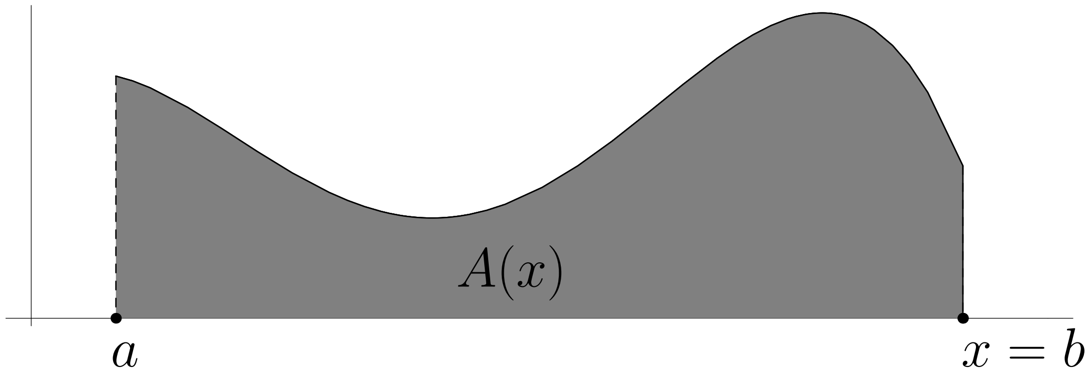
Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,



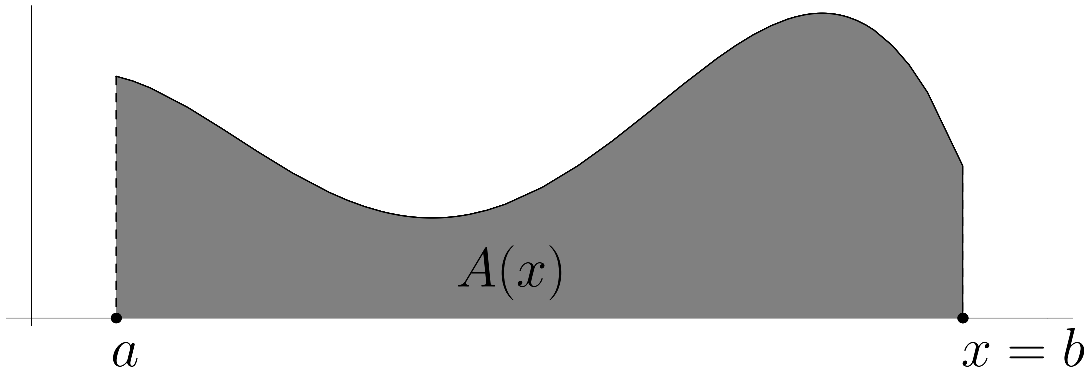
Consideremos una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a,b)$,



Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,

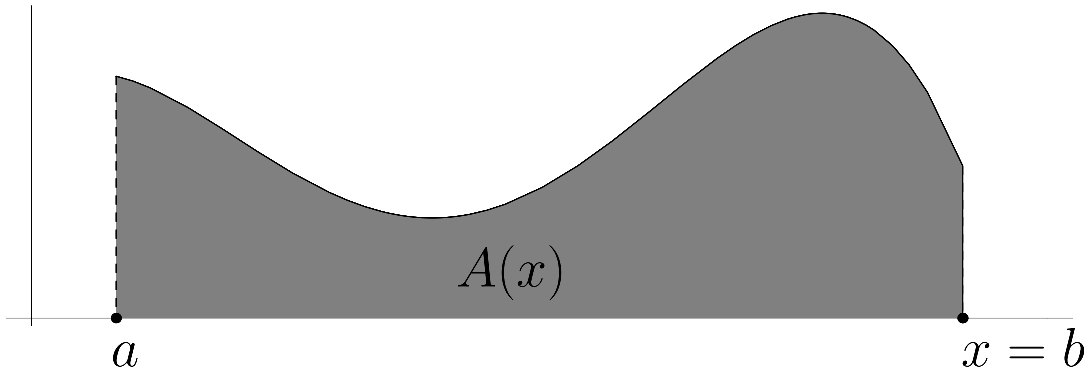


Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,



$$\begin{aligned} &A : [a, b] \to \mathbb{R} \\ &\quad A(x) = \text{área encerrada por } f \text{ en el tramo } [a, x]. \end{aligned}$$

Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,

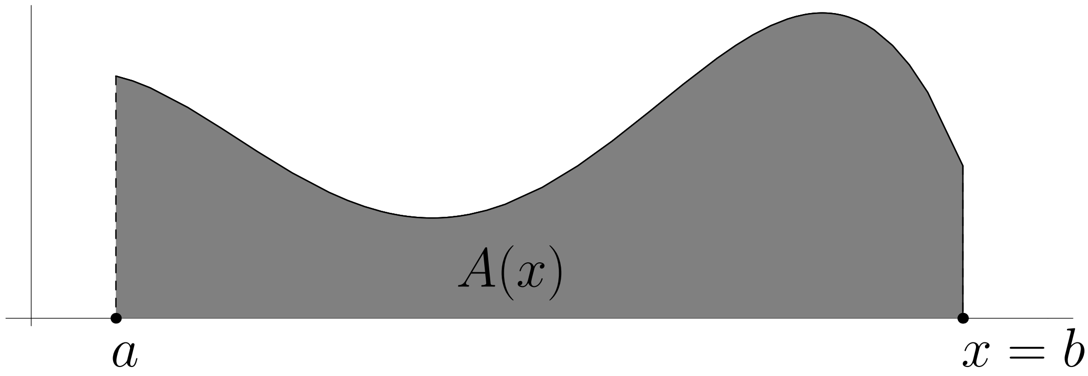


$$A : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$A(x) = \text{área encerrada por } f \text{ en el tramo } [a, x].$$

Es evidente además que

$$A(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad A(b) = \text{Área en todo } (a, b).$$

Consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Para cada $x \in (a, b)$,



$$A : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$A(x) = \text{área encerrada por } f \text{ en el tramo } [a, x].$$

Es evidente además que

$$A(a) = 0 \qquad \text{y} \qquad A(b) = \text{Área en todo } (a, b).$$

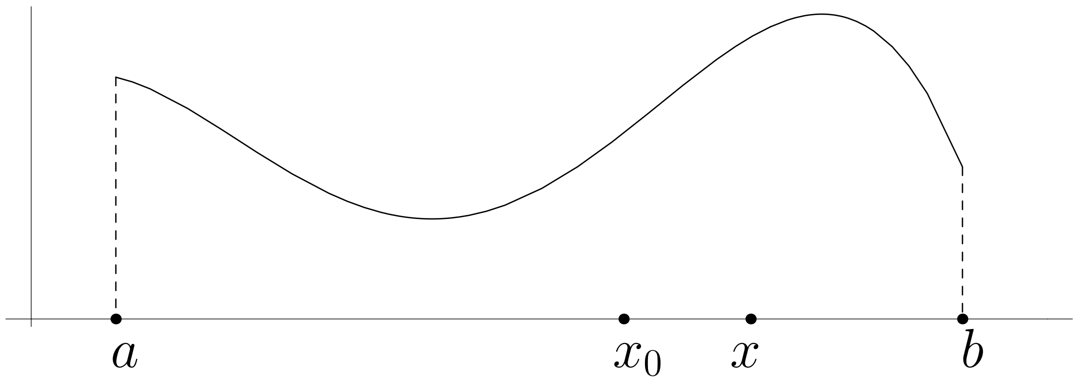
Si conocemos $f(x)$, ¿cómo podemos calcular $A(x)$.

Tomemos un punto $x_0 \in [a,b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}.$$

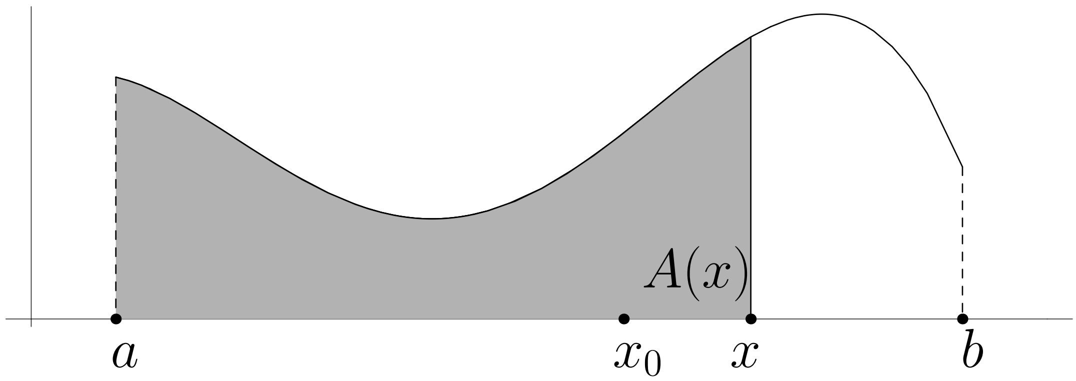
Tomemos un punto $x_0 \in [a,b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



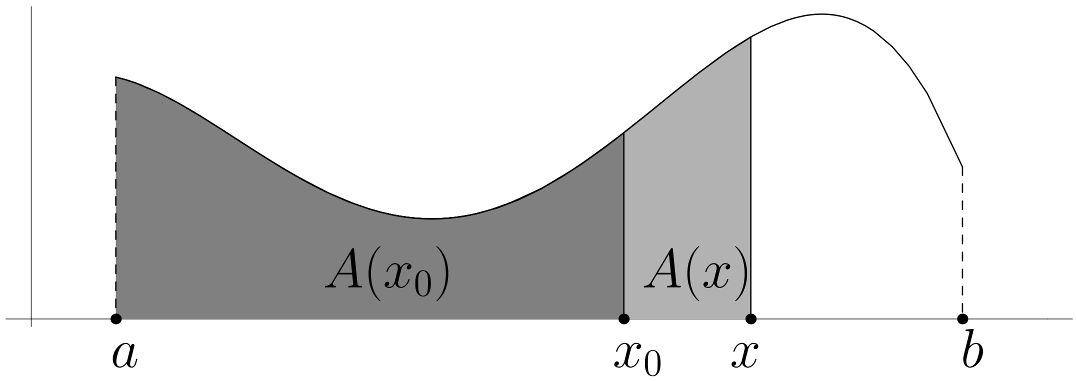
Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



Tomemos un punto $x_0 \in [a,b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

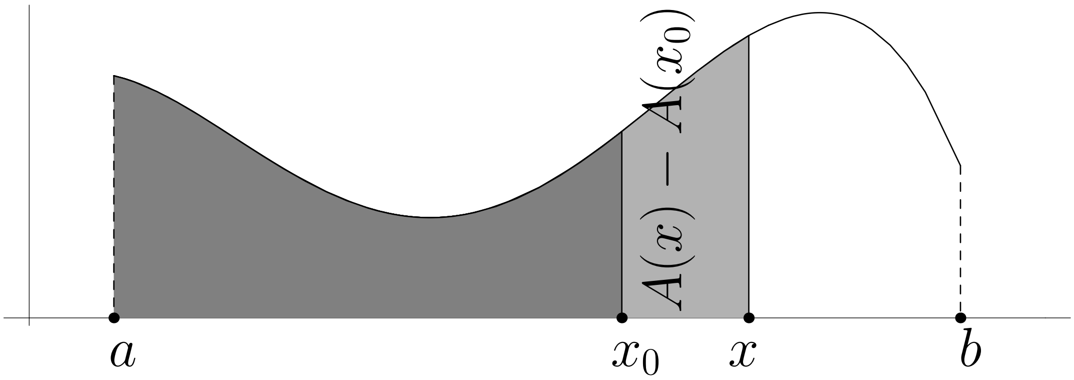
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$¿A(x) - A(x_0)?$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

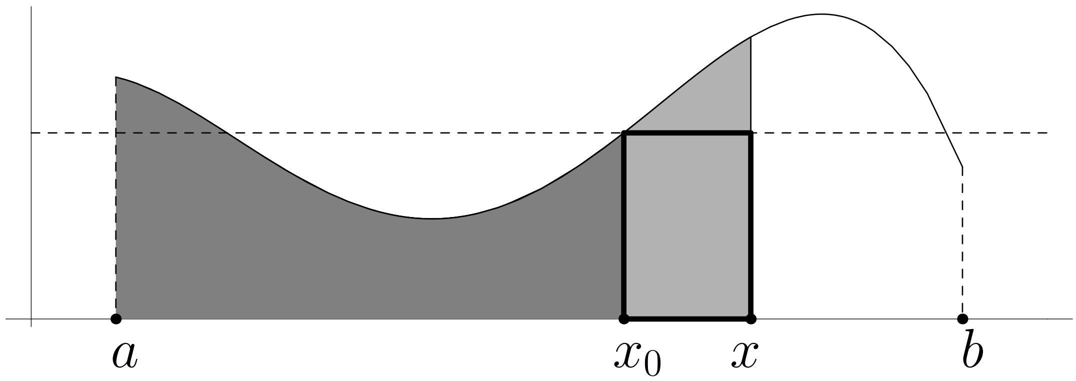
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

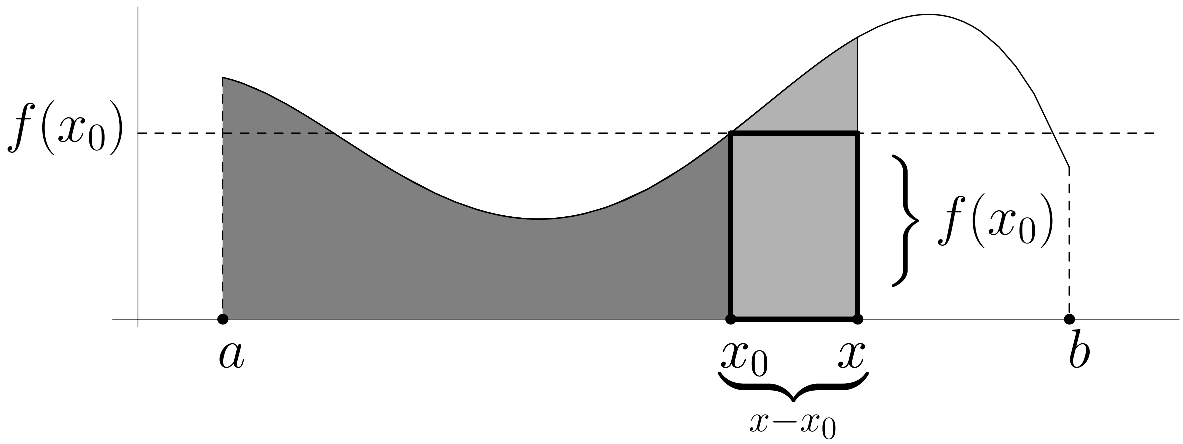
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

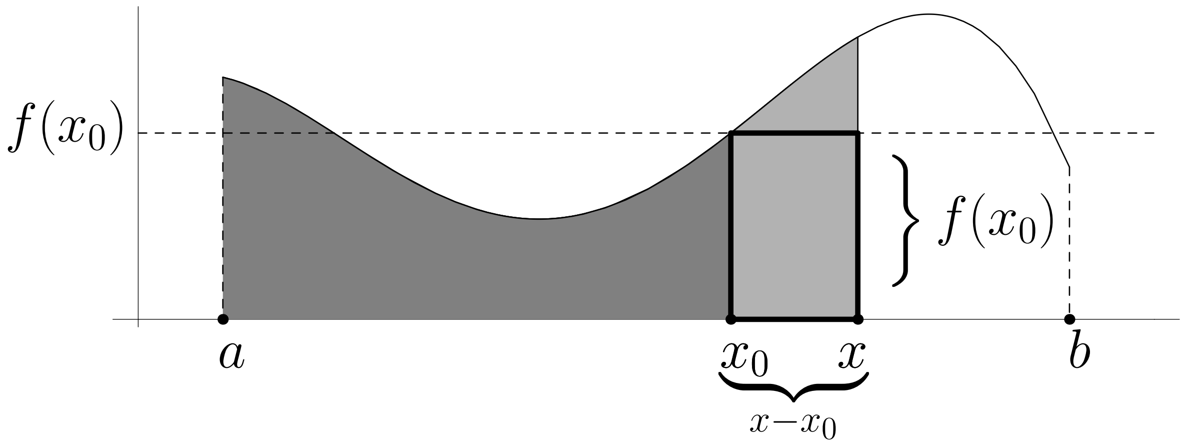
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

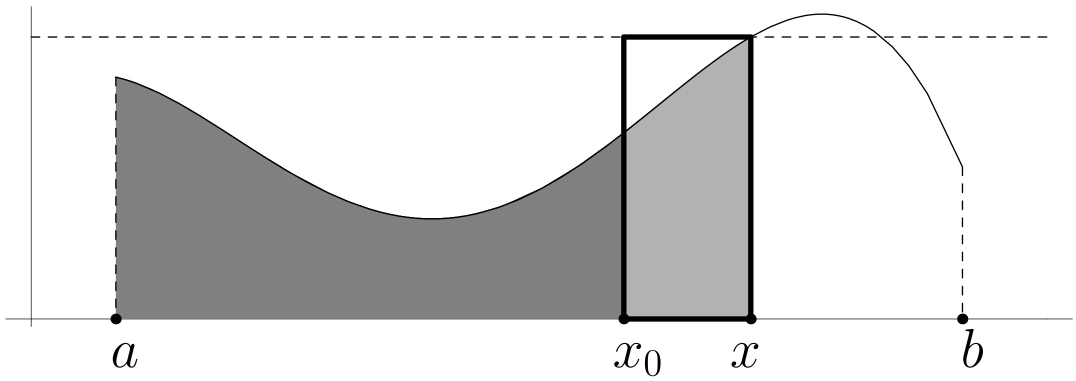
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$(x - x_0) f(x_0) \le A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

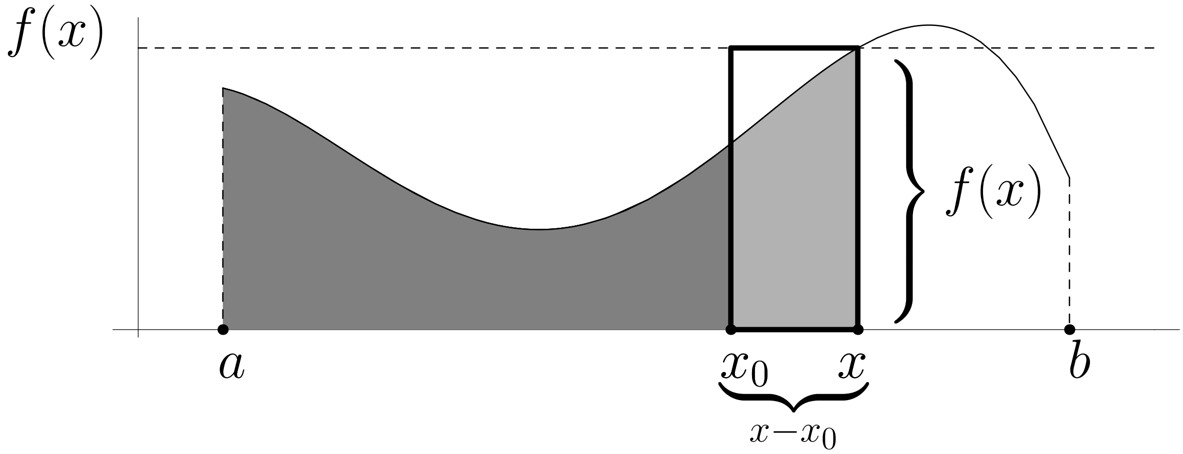
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$(x - x_0) f(x_0) \leq A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

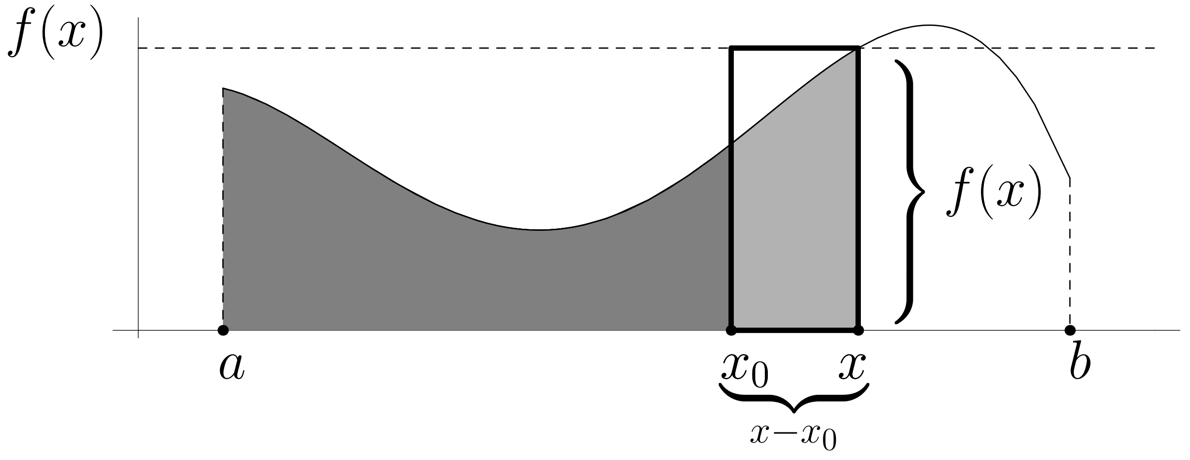
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$(x - x_0) f(x_0) \leq A(x) - A(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

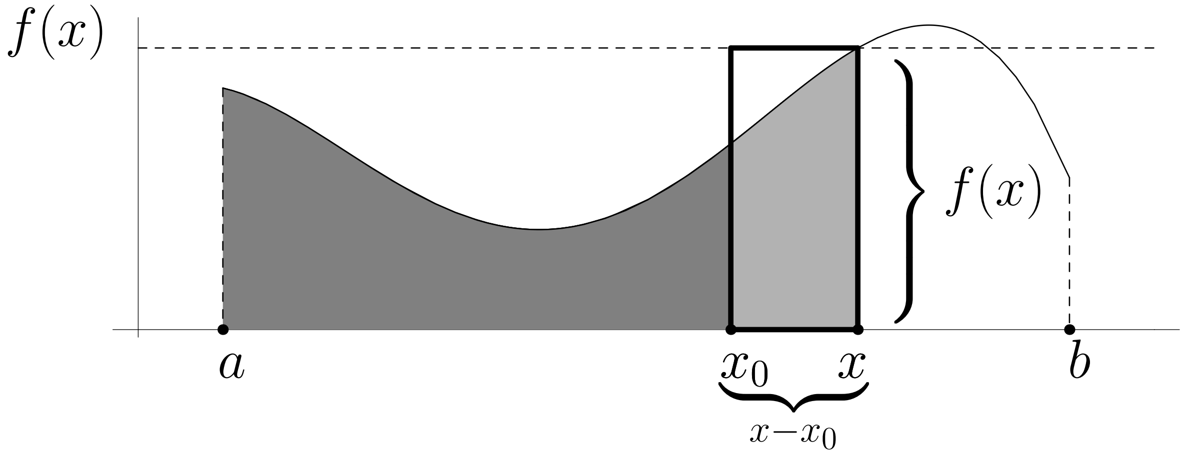
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$(x - x_0)f(x_0) \leq A(x) - A(x_0) \leq (x - x_0)f(x)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

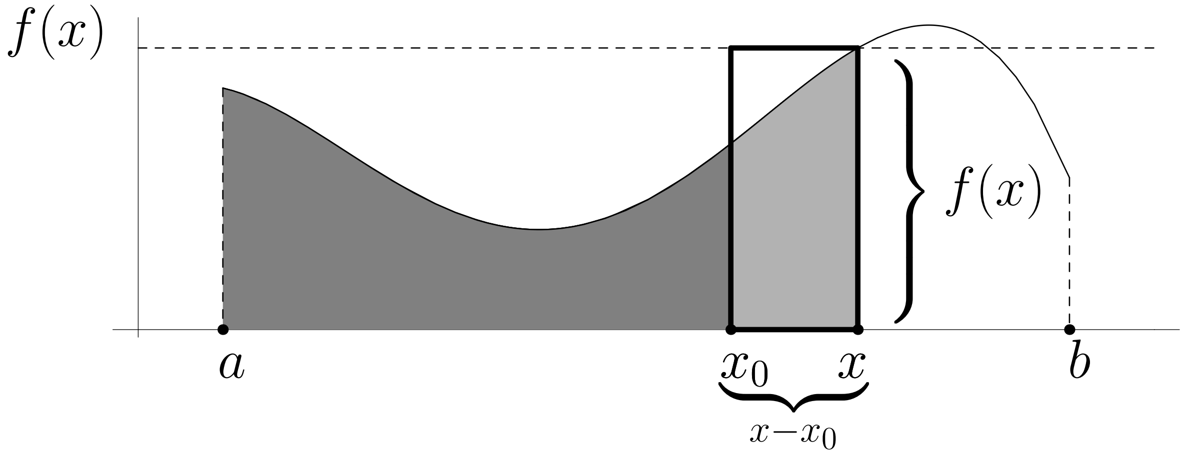
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$\frac{(x - x_0)f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{(x - x_0)f(x)}{x - x_0}$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

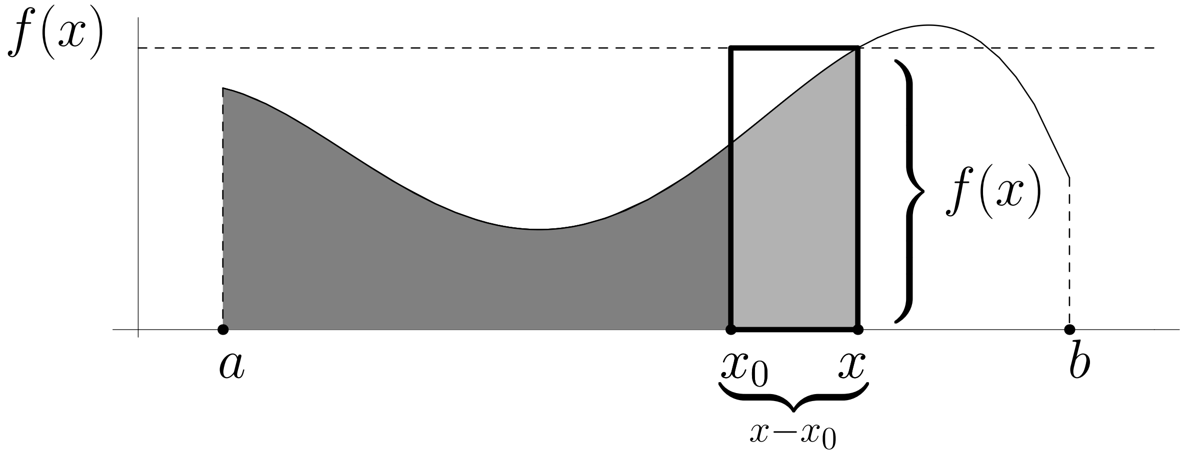
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$f(x_0) \leq \qquad \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq \qquad f(x)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

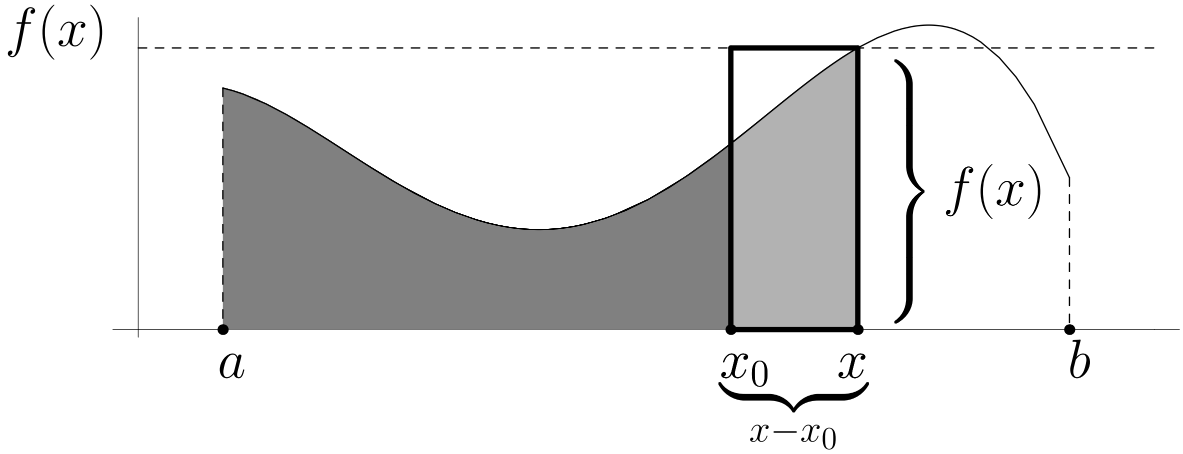
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

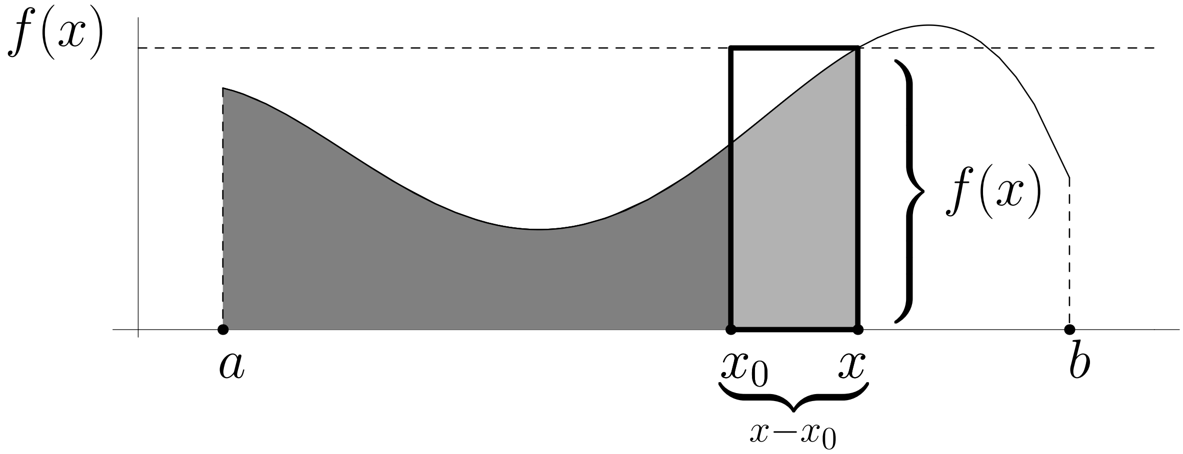
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0)$$

Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$



$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0)$$

$$\Rightarrow A'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Puesto que x_0 es cualquier punto de $[a, b]$, obtenemos dos conclusiones:

- La función $A(x)$, que mide al área en el tramo desde el punto a hasta el punto x, es derivable en $[a, b]$.
- La derivada de la función $A(x)$ es

$$A'(x) = f(x), \ x \in [a, b].$$

Por tanto, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Si aplicamos la **Definición 12**, sabemos que

$$\int_a^x f(x)dx = A(x) - A(a).$$

Puesto que $A(a) = 0$ finalmente deducimos que

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Con ello hemos demostrado la propiedad que expusimos en el apartado 3.1.1:

Propiedad 22. *Dada la función* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 12**, *el área comprendida entre el eje* $y = 0$, *las rectas verticales* $x = a$ *y* $x = b$ *y la gráfica de la función* f *se calcula mediante la integral definida*

$$\int_a^b f(x)dx$$

de modo que si f *es positiva en* (a, b) *dicha integral proporcionará el área con signo positivo y si* f *es negativa lo hará con signo negativo.*

4.5 El interés variable compuesto continuamente

Ampliación de las aplicaciones de la integral definida. Página 34

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Capital inicial}=P_0\\ \text{Interés }=I=I(t)\end{array}\right. \Rightarrow ¿P(t)?$$

Sabemos que $P'(t)$ será la velocidad de crecimiento

$$\left.\begin{array}{l}P(t)=\text{capital acumulado en euros}\\ t=\text{año}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t)=\text{ velocidad de crecimiento en }\frac{\text{euros}}{\text{año}}.$$

De este modo,

- Capital en la cuenta en el año t: $P(t)$.
- Cantidad ingresada por intereses en el año t: $P'(t)$.

Entonces,

$$\text{Tipo de interes en tanto por uno } = \frac{\text{capital ingresado por intereses}}{\text{capital inicial}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Interés en el año } t = \frac{\text{capital ingresado por intereses en el año } t}{\text{capital inicial en el año } t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I(t) = \tfrac{P'(t)}{P(t)}}\ . \tag{3}$$

Esta última fórmula nos permitiría calcular la función $I(t)$ fácilmente a partir de la función de capital $P(t)$.

Es sencillo aplicar la regla de la cadena para comprobar que

$$(\log(P(t)))' = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

con lo que, empleando (3),

$$(\log(P(t)))' = I(t).$$

Supongamos que sabemos que en un instante inicial t_0, el capital en cuenta es P_0 (es decir, $P(t_0) = P_0$). Si ahora calculamos la integral definida entre t_0 y t, en la expresión anterior tendremos

$$\int_{t_0}^{t} (\log(P(t)))'\, dt = \int_{t_0}^{t} I(t)dt$$

y empleando el apartado *ii)* de la **Propiedad 13** obtenemos

$$\log(P(t)) - \log(P(t_0)) = \int_{t_0}^{t} I(t)dt.$$

Pretendemos despejar $P(t)$,

$$\underbrace{e^{\log(P(t))-\log(P(t_0))}}_{= \frac{e^{\log(P(t))}}{e^{\log(P(t_0))}} = \frac{P(t)}{P(t_0)}} = e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}$$

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{\int_{t_0}^{t} I(t)dt}}\,.$$