Capítulo 2.
Derivación de funciones.

Objetivos del tema

- Concepto matemático de derivada.
- Interpretaciones del concepto de derivada.
- Cálculo de derivadas de funciones y funciones definidas a trozos.
- Propiedades de forma de una función y su análisis mediante derivadas sucesivas.
- Cálculo de límites mediante el teorema de L'Hôpital.

1 Concepto de derivada

Supongamos que nos desplazamos desde la ciudad A hasta la B utilizando un automóvil. Si nuestro viaje viaje dura b horas, tenemos la función

$$\begin{array}{rcl} e : [0,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e(t) = \text{ Kilómetros recorridos hasta la hora } t \end{array}$$

Pretendemos calcular la velocidad a la que circulábamos justo en ese instante t_0. Si realizamos el calculo

$$\frac{e(b) - e(t_0)}{b - t_0}$$

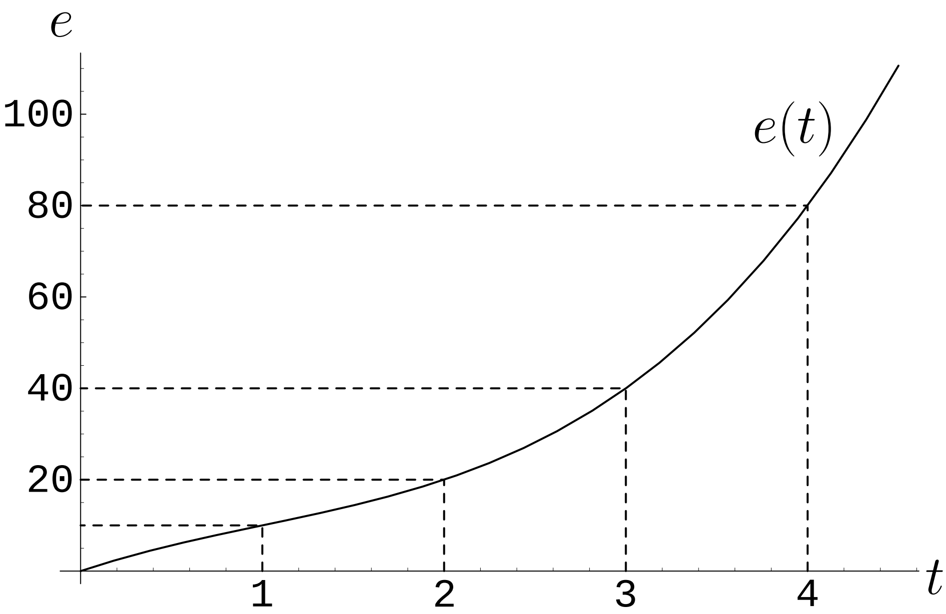
obtendremos la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_0, b]$. En general,

$$\frac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0}$$

no será más que la media de las velocidades en el intervalo (t_0, t)Para estudiar la velocidad justo en t_0 calculamos

$$\lim_{t \to t_0} \frac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0}.$$

Este límite nos proporciona la velocidad instantánea justo en el instante t_0 que queríamos encontrar. Dicho límite es lo que llamaremos derivada de la función e en el punto t_0.


e
100
80
60
40
20
e(t)
1
2
3
4
t

Definición 1. *Dada* $f : D \to \mathbb{R}$*:*

i) Diremos que f *es derivable en* $x_0 \in Ac(D)$ *y que su derivada en tal punto es* $L \in \mathbb{R}$ *si se verifica que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

En tal caso escribiremos

$$f'(x_0) = L \quad \text{ó} \quad \frac{df}{dx}(x_0) = L.$$

Si el límite anterior no existe o es $\pm\infty$*, diremos que la función* f *no es derivable en el punto* x_0*.*

ii) Dado un subconjunto $H \subseteq D$*, decimos que* f *es derivable en* H *si es derivable en todos los puntos de* H*. Si* f *es derivable en* D *(en todo su dominio) diremos que* f *es una función derivable.*

iii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *una función real y sea*

$$D_1 = \{x \in D : f \text{ es derivable en } x\}.$$

Si $D_1 \neq \emptyset$*, llamaremos función derivada de la función* f *a la función*

$$\begin{aligned} f' : D_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}.$$

Pudiera ser que el límite de la derivada no existiera pero que sí dispusiéramos de los límites laterales. Entonces hablaremos de derivadas laterales de la función.

Definición 2.

i) Decimos que la función f es derivable por la izquierda en x_0 y que el valor de la derivada por la izquierda de f en x_0 es $L \in \mathbb{R}$, si tiene sentido y existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

ii) Decimos que la función f es derivable por la derecha en x_0 y que el valor de la derivada por la derecha de f en x_0 es $L \in \mathbb{R}$, si tiene sentido y existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Al igual que sucede para la continuidad, una función podrá ser derivable solo en aquellos puntos en los que esté definida.

Ejemplo 3. Sabemos que, dados los números reales a y b, una función del tipo

$$f(x) = ax + b$$

es un polinomio de grado 1 que se representa siempre como una recta.

Tomemos un punto cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$. Según la definición tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a.$$

Por tanto, una recta es siempre una función derivable en todos los puntos. La función derivada será

$$f'(x) = a.$$

Por ejemplo da la recta $f(x) = 10x - 7$ es la función constante

$$f'(x) = 10.$$

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, si admitimos que es derivable en $x_0 \in D$ tendremos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L \in \mathbb{R}.$$

Pero entonces,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x-x_0)}_{=0} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \cdot L = 0$$

De donde

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En otras palabras, tenemos la siguiente:

Propiedad 4. *Toda función derivable en un punto es también continua en ese punto.*

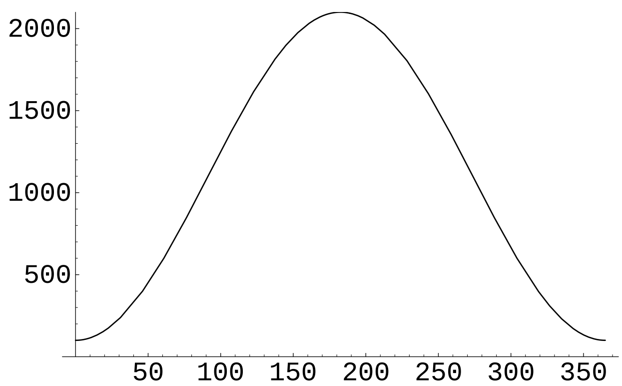
La derivada como velocidad de variación:

Ejemplos 5.

1) La cantidad de empleados de cierta empresa viene dada, en función del número de días pasados desde el comienzo del año, por la función:

$$\begin{array}{c} f : [0,365] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 1100 - 1000\cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right) \end{array} .$$

La gráfica correspondiente es,



Sabemos que la derivada de la función f es la velocidad de variación de $f(x)$ con respecto a x. Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \text{número de empleados} \\ x = \text{días} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{\text{empleados}}{\text{día}}.$$

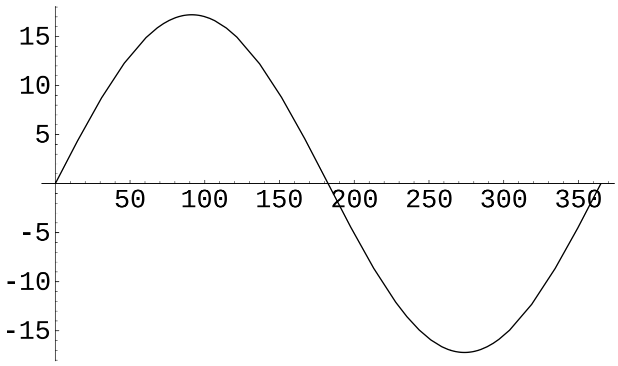
Por tanto, $f'(x)$ es la variación de empleados (contratos o despidos) por día en el día x.

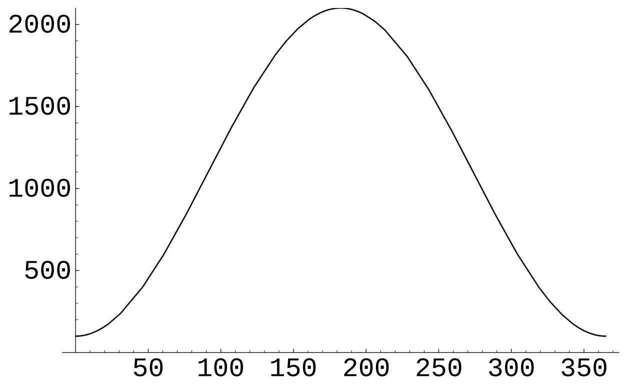
La función derivada de f es

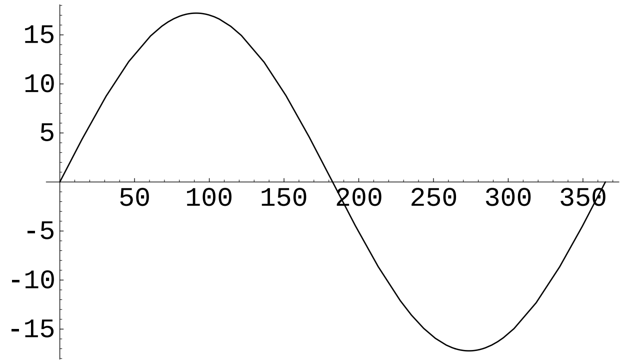
$$f'(x) = \frac{400}{73}\pi \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right).$$

Entonces, por ejemplo:

- $f'(50) = 13.0536 \Rightarrow$ En el día $x = 50$, la velocidad de contratación fue de 13.0536 empleados/día. Por tanto en el día 50 se contrataron aproximadamente 13.0536 empleados.
- $f'(182) = 0.148163 \Rightarrow$ En el día $x = 182$, la velocidad de contratación fue de 0.148163 empleados/día. Por tanto el día 182 se contrataron aproximadamente 0.148163 empleados.
- $f'(260) = -16.7342 \Rightarrow$ En el día $x = 260$, la velocidad de contratación fue de -16.7342 empleados/día. Por tanto el día 260 se produjeron aproximadamente 16.7342 despidos.




2000
1500
1000
500
50 100 150 200 250 300 350


15
10
5
-5
-10
-15
50 100 150 200 250 300 350

2) Al realizar el estudio de la actividad de un negocio es habitual estudiar lo que se denomina función de costos que mide el coste necesario para producir una cierta cantidad de unidades.

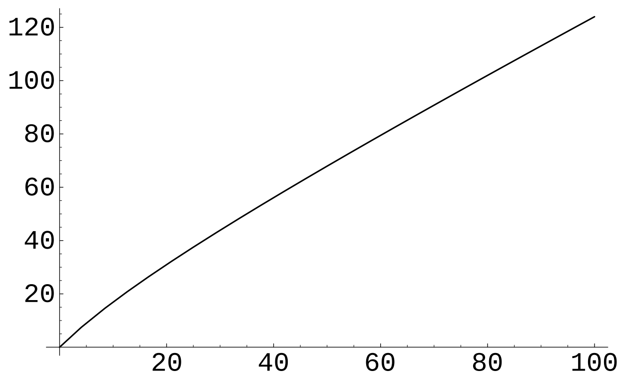
Supongamos que en una empresa que produce componentes electrónicos se tiene la siguiente función de costos (medida en euros):

$$C(x) = x + 10 \log\left(\frac{x+10}{10}\right).$$

En tal caso:

- Para producir $x = 10$ unidades el costo será de $C(10) = 16.9315$ euros.
- Para producir $x = 20$ unidades el costo será de $C(20) = 30.9861$ euros.

La gráfica de la función de costos es



Si calculamos la derivada de la función $C(x)$ obtendremos la velocidad de variación del coste con respecto a la cantidad de unidades producidas:

$$\left.\begin{array}{l} C(x) = \text{coste de producción en euros} \\ x = \text{unidades} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{\text{coste en euros}}{\text{unidad}} = \frac{\text{euros}}{\text{unidad}}.$$

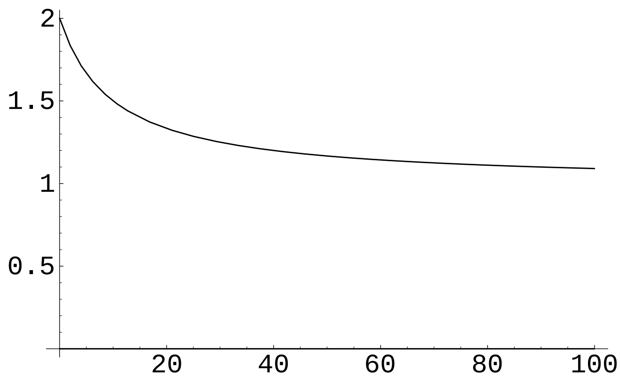
Es decir, $C'(x)$ es el coste por unidad (lo que cuesta fabricar una unidad) cuando llevamos producidas x unidades.

$$C'(x) = \frac{x+20}{x+10},$$

así que:

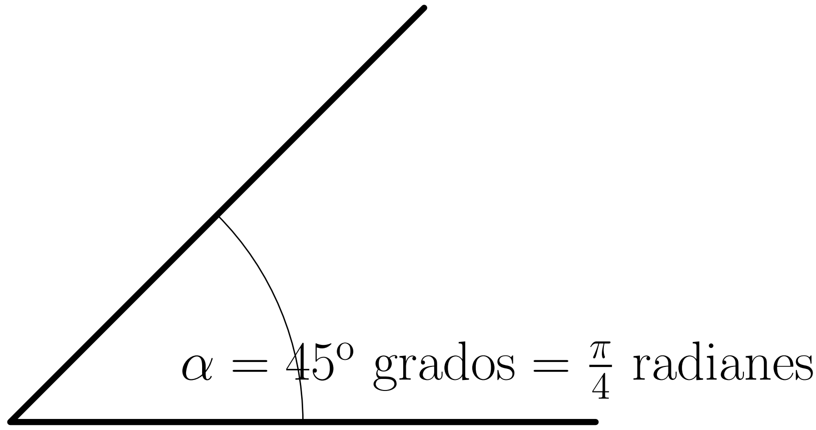
- El coste por unidad cuando hemos producido 10 unidades es $C'(10) = 1.5$ euros/unidad.
- El coste por unidad cuando hemos producido 20 unidades es $C'(20) = 1.33$ euros/unidad.

La derivada $C'(x)$ se denomina coste marginal. En nuestro caso la gráfica de costes marginales es:



Se observa que el precio por unidad cuando la producción es muy baja se aproxima a 2 euros y a medida que aumenta la producción se reduce hasta 1 euro.

Interpretación geométrica de la derivada: Habitualmente un ángulo se mide en grados sexagesimales o en radianes. Así por ejemplo,



Sin embargo en diferentes ocasiones se emplea el concepto de pendiente para indicar o medir el valor de una ángulo.

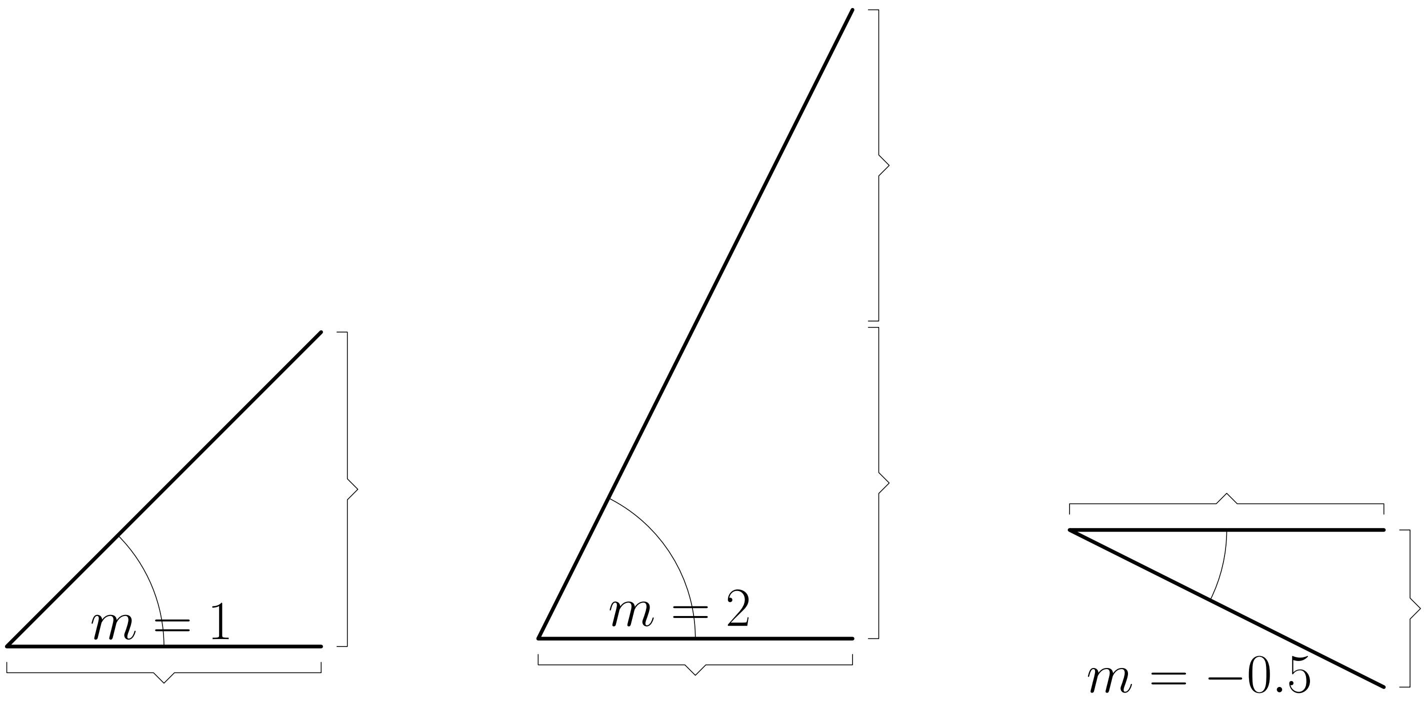
Definición 6. *Dado el ángulo α, llamamos pendiente de α al número*

$$m = \tan(\alpha).$$

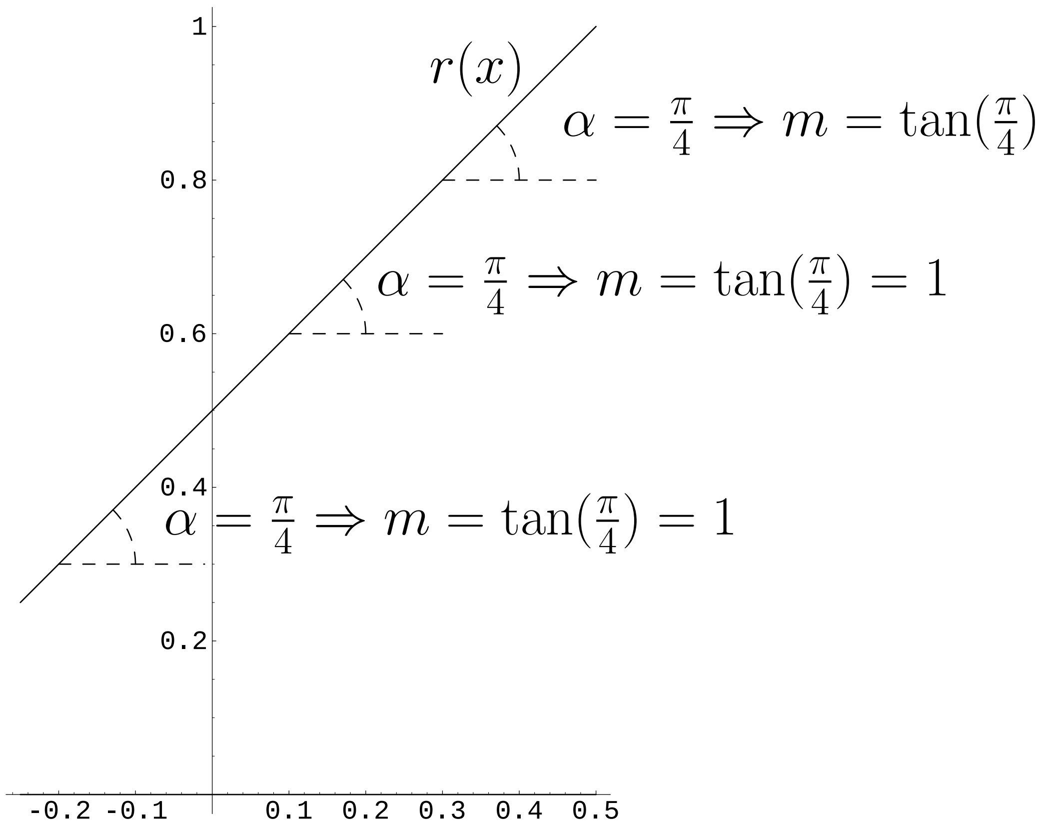
De este modo, la pendiente del ángulo de la gráfica será

$$m = \tan(45^{o}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

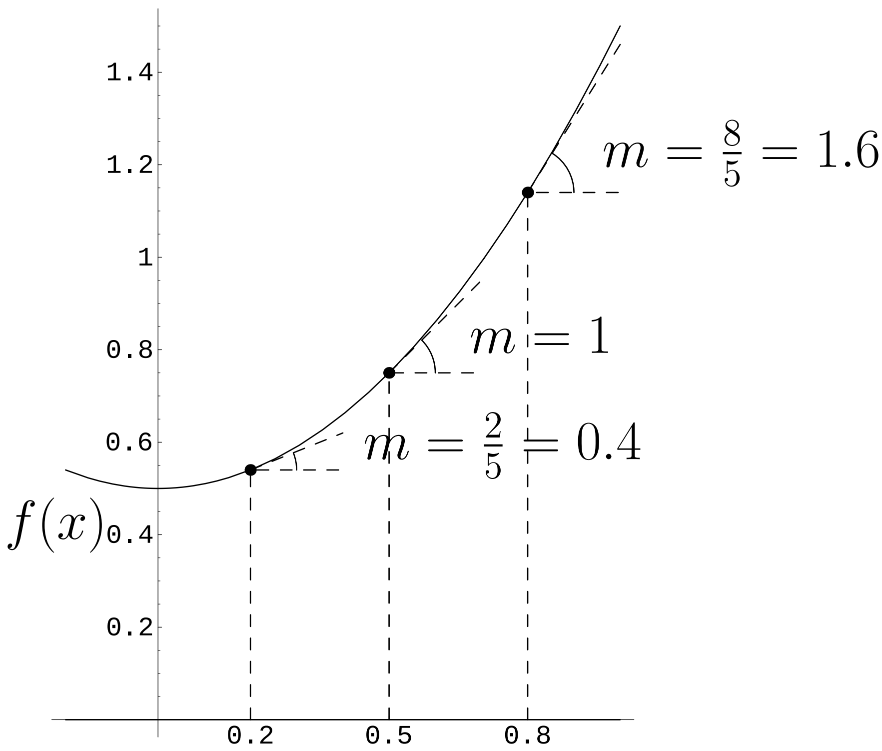
De forma más intuitiva, la pendiente de un ángulo nos indica las unidades que ascendemos por cada unidad que avanzamos si seguimos la dirección de ese ángulo.



Si consideramos una recta, por ejemplo la función $r(x) = x+1$, podemos también calcular el ángulo que forma esa recta con la horizontal y su pendiente. Además es evidente que ese ángulo será el mismo en cualquier punto de la recta:

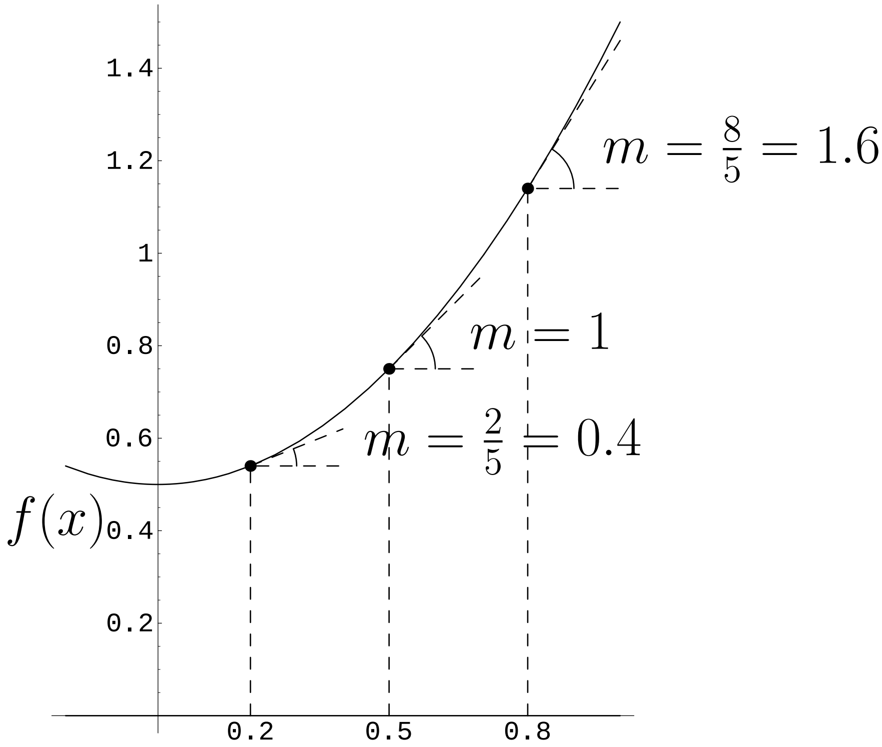


Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



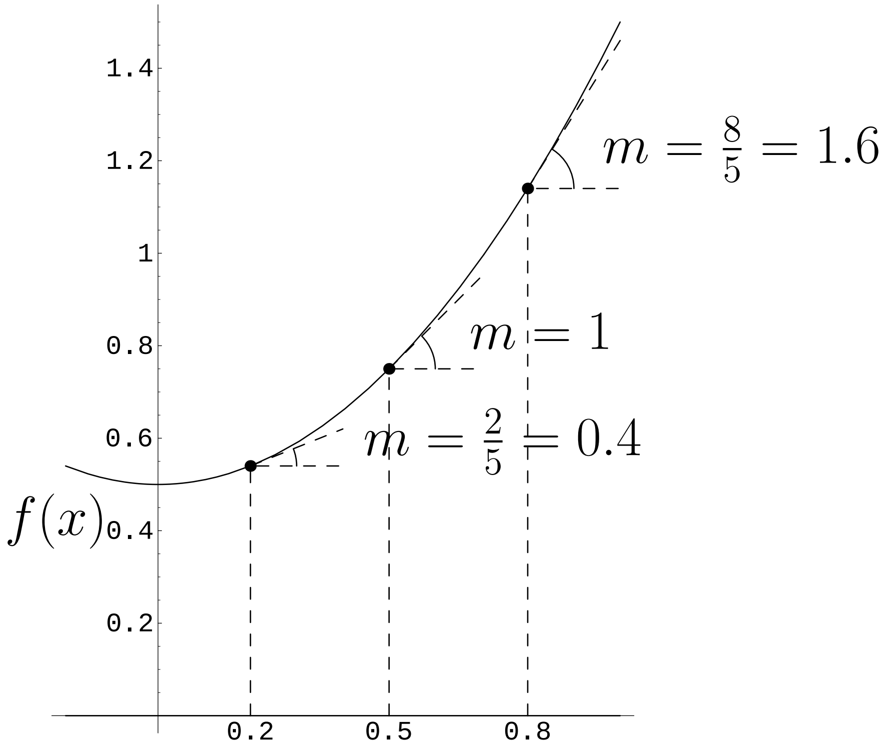
Un razonamiento similar al que hemos realizado al inicio del tema permite demostrar que si f es derivable en x_0 tendremos,

Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



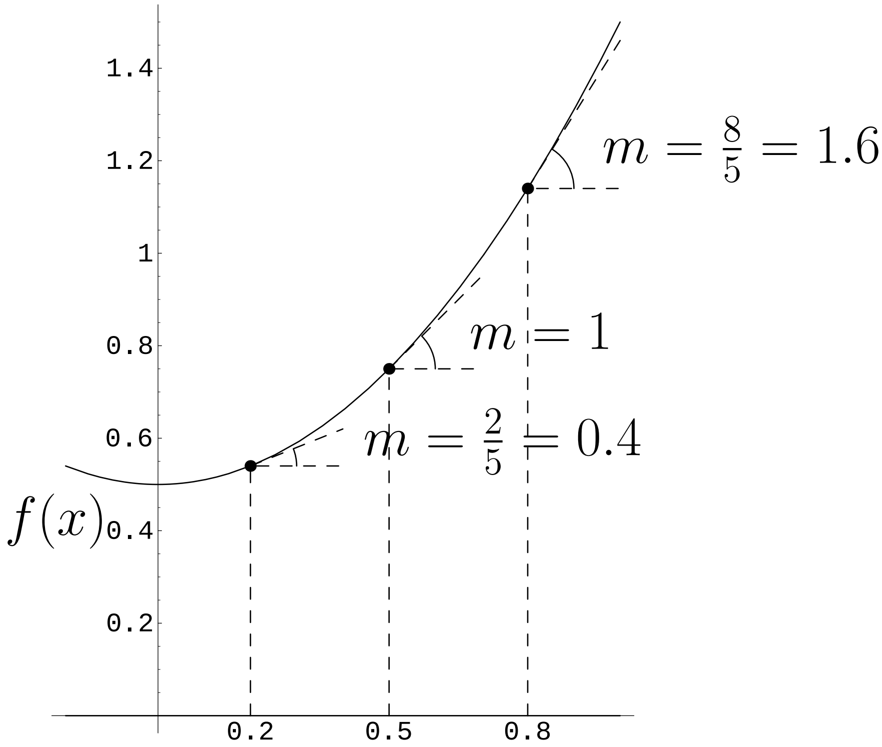
$$\text{pendiente de } f \text{ en } x_0 = f'(x_0).$$

Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

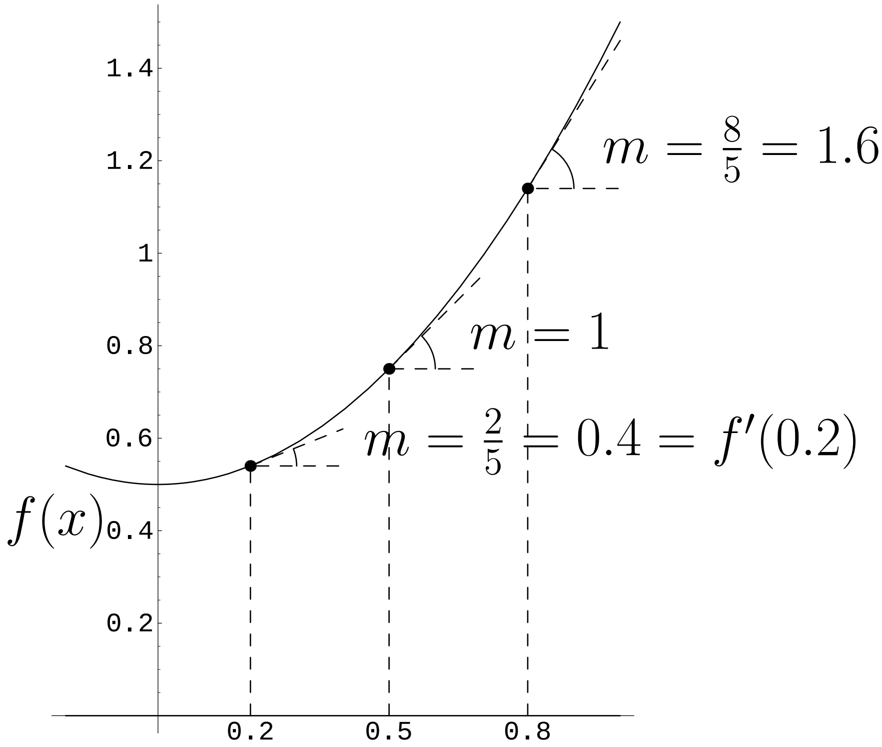
Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.2 \Rightarrow f'(0.2) = 2 \cdot 0.2 = 0.4$$

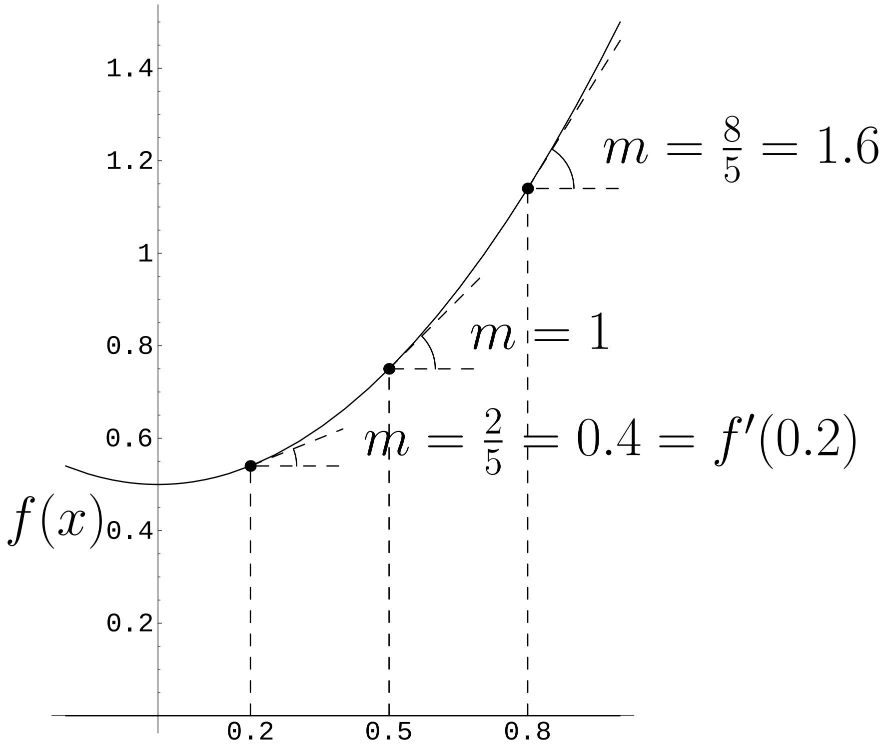
Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.2 \Rightarrow f'(0.2) = 2 \cdot 0.2 = 0.4$$

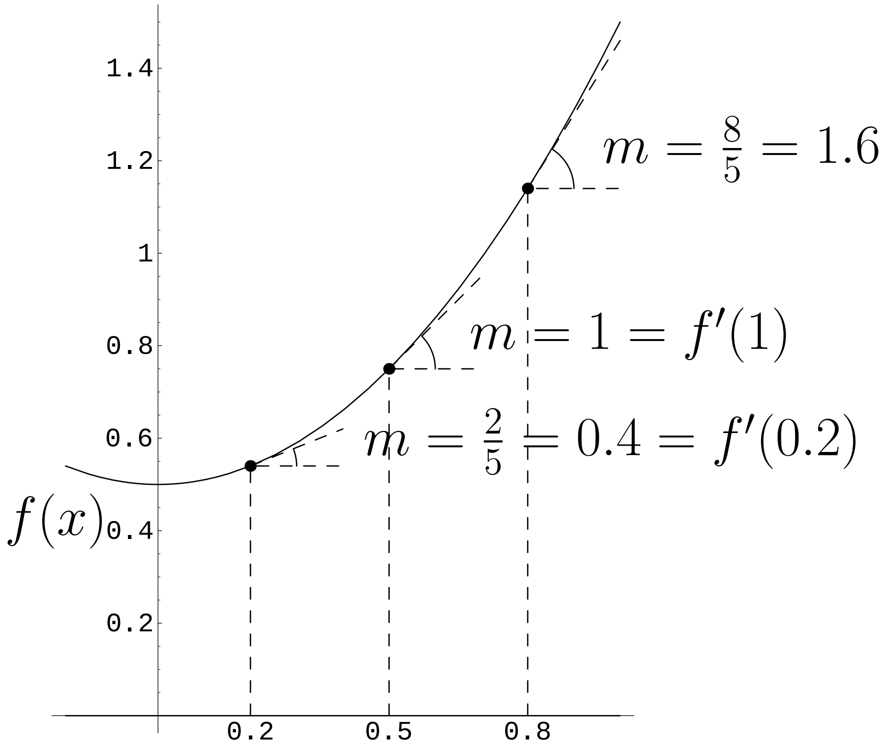
Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.5 \Rightarrow f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1$$

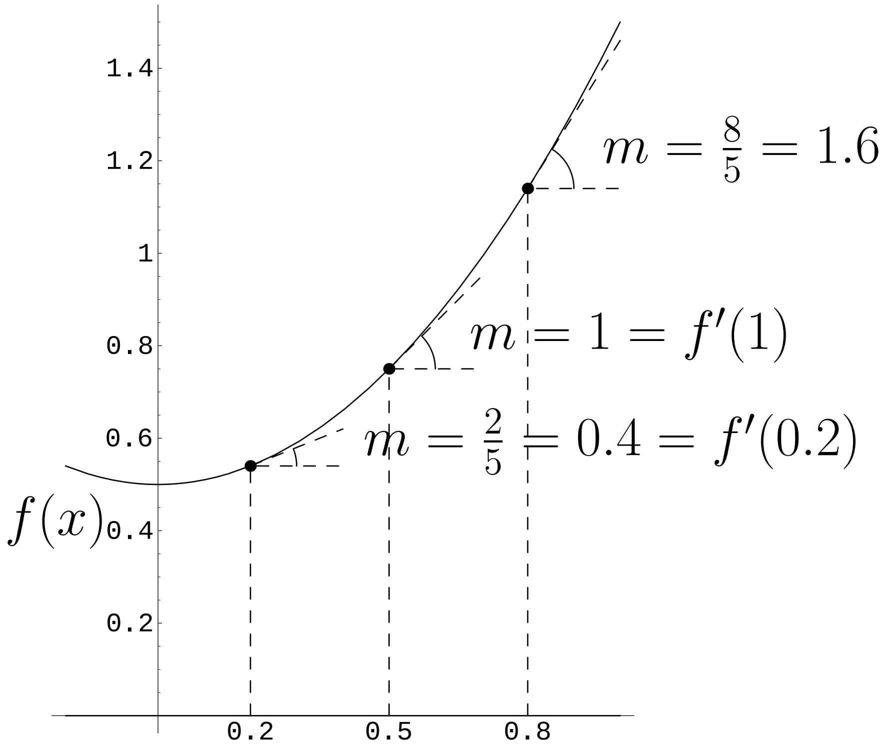
Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.5 \Rightarrow f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1$$

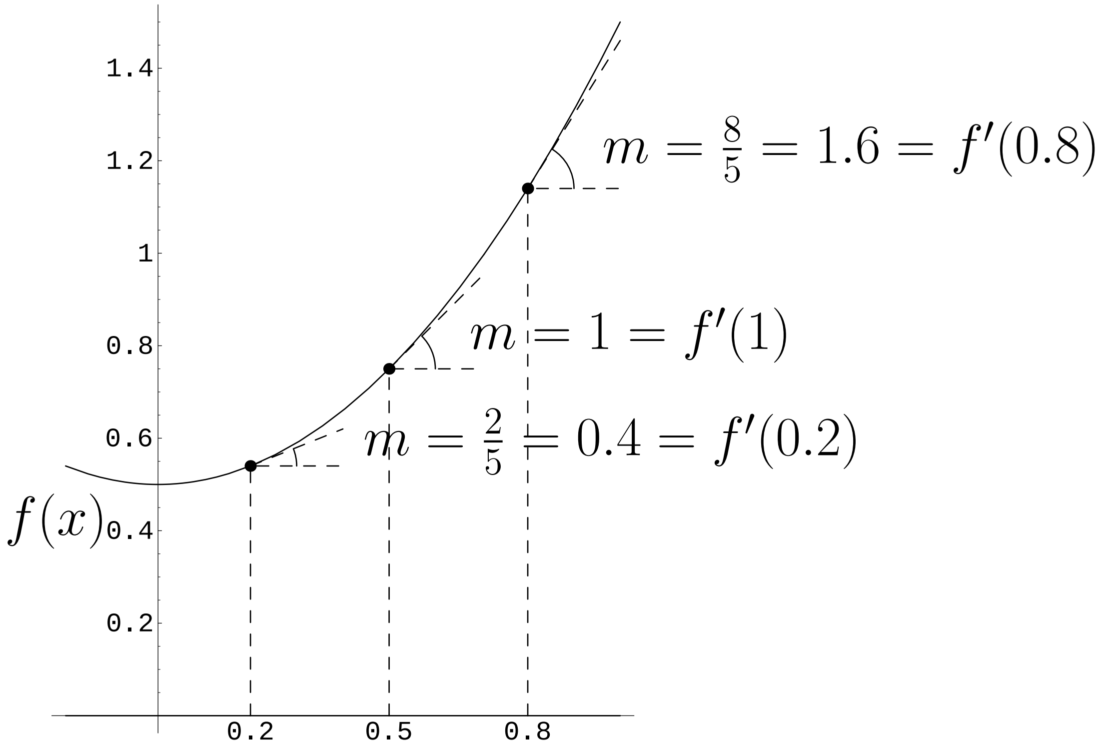
Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.8 \Rightarrow f'(0.5) = 2 \cdot 0.8 = 1.6$$

Si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera, por ejemplo $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, tendremos:



$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 0.8 \Rightarrow f'(0.8) = 2 \cdot 0.8 = 1.6$$

Si consideramos una recta cualquiera,

$$f(x) = ax + b,$$

sabemos que tiene la misma pendiente en todos los puntos y de hecho, si calculamos su derivada, observamos que tiene siempre el mismo valor,

$$f'(x) = a$$

que es la pendiente de la recta. De este modo, observamos directamente que la pendiente de cualquier recta es el coeficiente, a que acompaña a la variable x en la fórmula de la recta.

Ejemplo 7. La pendiente de la recta

$$f(x) = 3x - 10$$

es $m = 3$ ya que el coeficiente que acompaña a la variable, x, es precisamente 3. De otro modo tenemos también que

$$f'(x) = 3.$$

Se llama recta tangente a una función f en el punto x_0 a la recta que en el punto x_0 toma el mismo valor y tiene la misma pendiente que f.

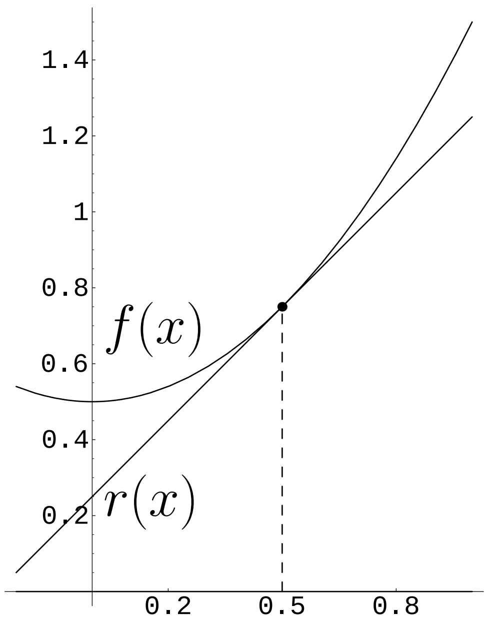
Es decir, pasa por $(x_0, f(x_0))$ con la misma pendiente que f en x_0. Es fácil comprobar que:

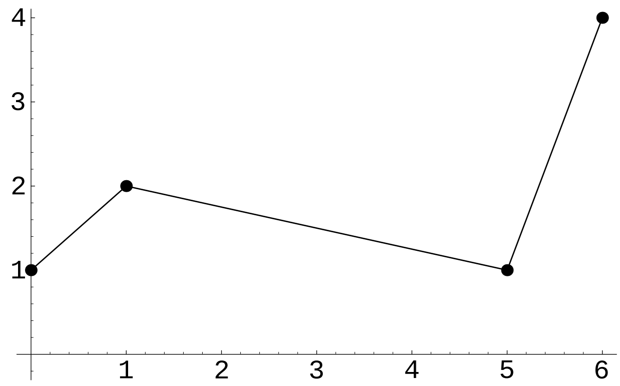
$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

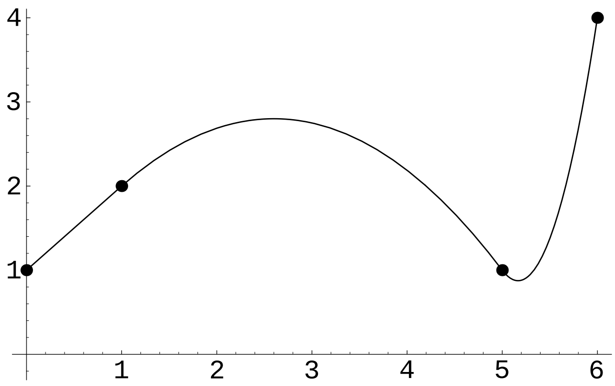
Por ejemplo, la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ en $x_0 = 0.5$ será

$$r(x) = f(0.5) + f'(0.5)(x - 0.5) \Rightarrow r(x) = 0.75 + 1 \cdot (x - 0.5)$$

$$\Rightarrow r(x) = x + 0.25.$$




4
3
2
1
1
2
3
4
5
6



4
3
2
1
1
2
3
4
5
6

2 Calculo de derivadas

De la misma manera que hicimos en el caso de los límites, utilizaremos las propiedades de la derivada respecto de las operaciones algebraicas para poder realizar cálculos sin tener que acudir a la evaluación del límite de la definición de derivada.

Propiedades 8. *Sean f y g funciones reales de variable real. Entonces*

- *Si f y g son derivables en $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*

  1. *$f+g$ es derivable en x y*
  $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$
  2. *$k \cdot f$ es derivable en x para cualquier $k \in \mathbb{R}$ y*
  $$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x).$$
  3. *$f \cdot g$ es derivable en x y*
  $$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
  4. *Si $g(x) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x y*
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- *(Regla de la cadena) Si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x y se verifica que:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

A la fórmula anterior se la conoce como regla de la cadena.

- *(Teorema de la función inversa) Si f es derivable en x, biyectiva sobre su imagen y verifica que $f'(x) \neq 0$ entonces la función inversa de f, f^{-1}, es derivable en $y = f(x)$ y se verifica que*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Toda función que se obtenga por composición u operación de funciones derivables será una función derivable.

La siguiente lista nos proporciona un repertorio inicial de funciones derivables:

1. Dado $k \in \mathbb{R}$ y $f(x) = k$ (función constante), $f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ es derivable en todos los puntos en los que está definida su función derivada,
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$
3. $(e^x)'(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Para $a > 0$, $(a^x)'(x) = \log(a) \cdot a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
5. $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
6. Para $a \neq 1$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\log(a)} \cdot \dfrac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
7. $(\cos)'(x) = -\mathrm{sen}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.
8. $(\mathrm{sen})'(x) = \cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.
9. $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
10. $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1)$.

11. $(\text{arcsen})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1,1).$

12. $(\text{arctg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Queda pendiente el caso de las funciones definidas a trozos.

Propiedad 9.

i) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *una función real, sea un intervalo* $I = (a, b) \subseteq D$ *y sea* $x_0 \in I$*, entonces* f *es derivable en* $x_0 \Leftrightarrow f|_I$ *es derivable en* x_0 *y en tal caso se cumple que*

$$f'(x_0) = (f|_I)'(x_0).$$

ii) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una función real y* $x_0 \in (a, b)$ *de manera que* f *es continua en* (a, b) *y derivable en* $(a, b) - \{x_0\}$*. Consideremos la función derivada,* f'*, que está definida en* $(a, b) - \{x_0\}$*, entonces:*

a) Si f' *tiene límite en* x_0*,* f *es derivable en* x_0 *y además*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

b) Si los límites laterales de f' *en* x_0 *son diferentes o iguales a* $\pm\infty$*,* f *no es derivable en* x_0*.*

3 Derivación y propiedades de forma de una función

Definición 10. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $H \subseteq D$. Entonces:*

- *Decimos que f es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante) en H si $f|_H$ es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante).*
- *Decimos que f tiene un máximo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*
$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in D.$$
- *Decimos que f tiene un mínimo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*
$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in D.$$

- *Decimos que* f *tiene un máximo local en el punto* $x_0 \in D$ *si* $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, *tales que*

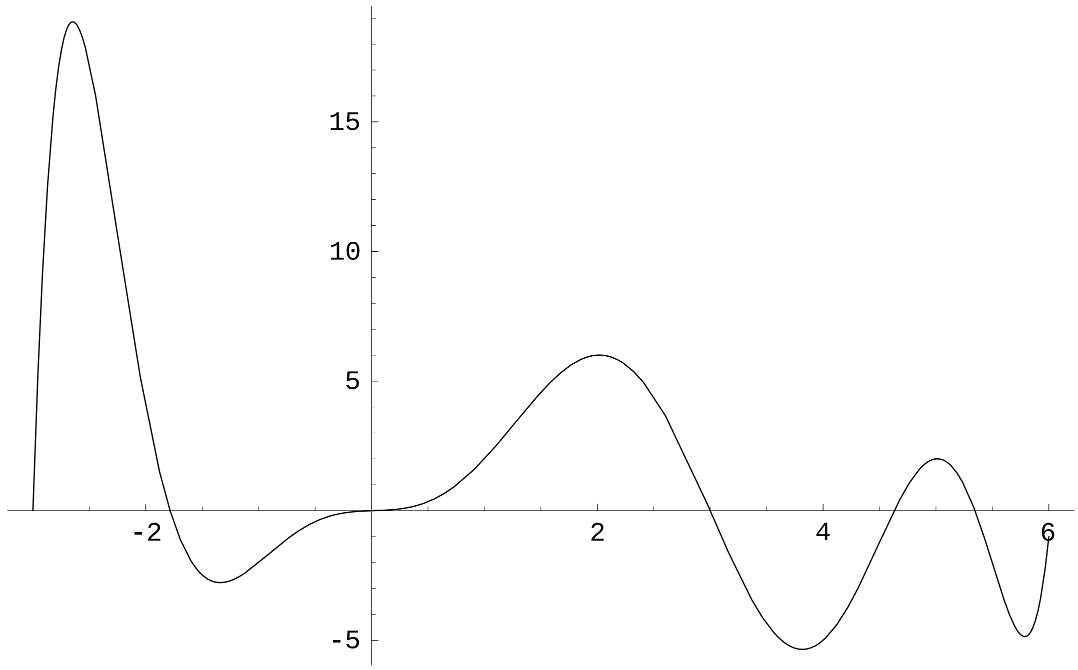
$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in D \cap (a, b).$$

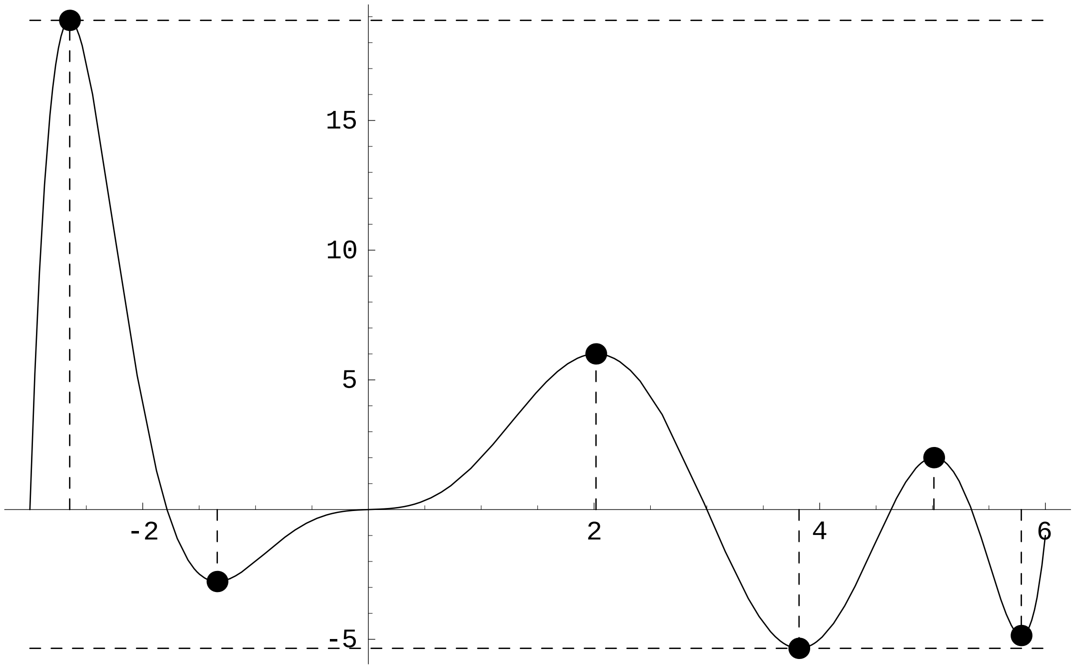
Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto x_0 *(la desigualdad se verifica no sólo para* $\geq$ *sino también para* $>$*), diremos que* f *tiene un máximo local estricto en* x_0.

- *Decimos que* f *tiene un mínimo local en el punto* $x_0 \in D$ *si* $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, *tales que*

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in D \cap (a, b).$$

Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto x_0 *(la desigualdad se verifica no sólo para* $\leq$ *sino también para* $<$*), diremos que* f *tiene un mínimo local estricto en* x_0.


15
10
5
-5
-2
2
4
6



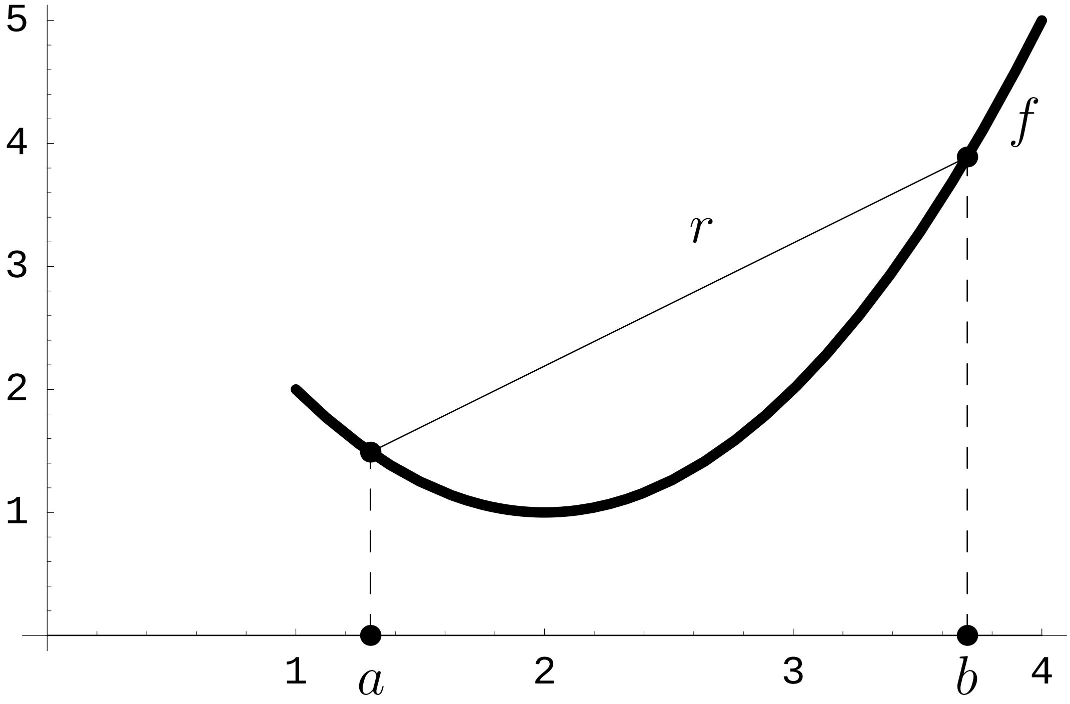
15
10
5
-5
-2
2
4
6

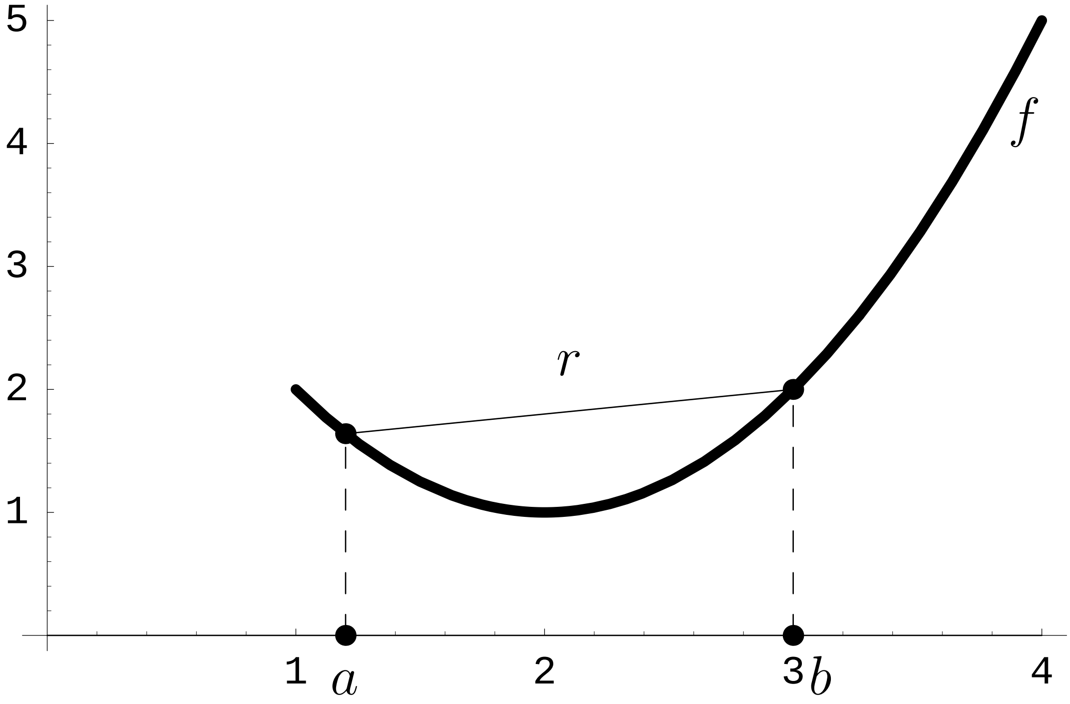
- *Decimos que f es convexa en H si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

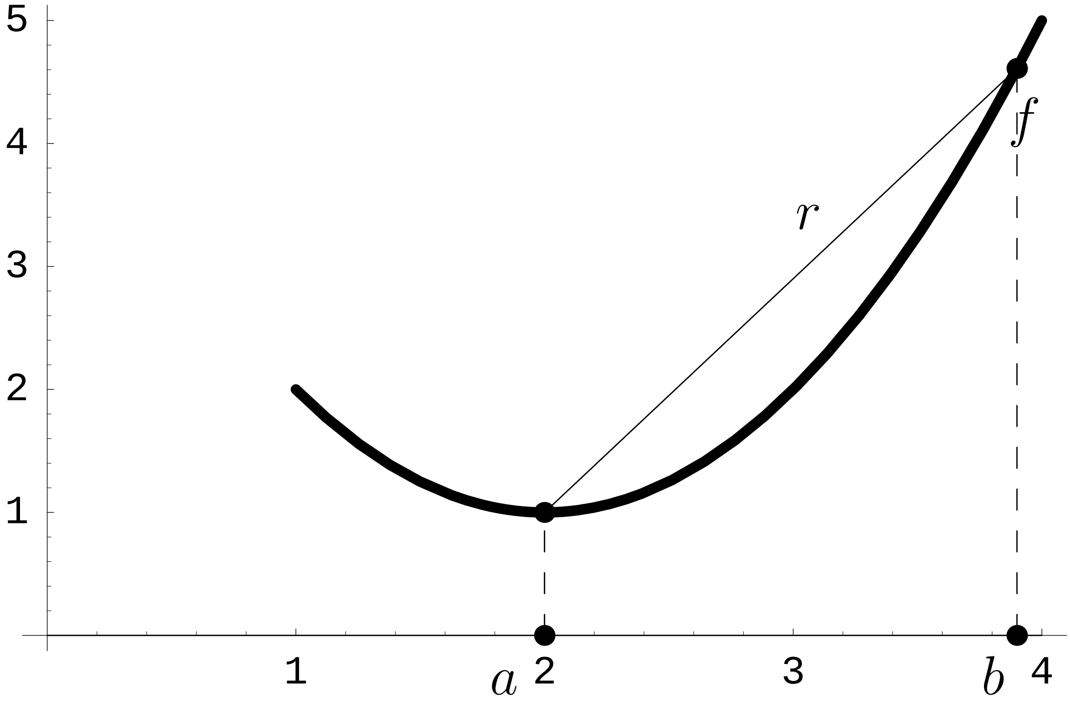
$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)), \ \forall x \in H \cap (a, b),$$

es decir, si se tiene que dentro del conjunto H, f está por debajo del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\leq$ sino además con $<$) entonces diremos que f es estrictamente convexa en H.


5
4
3
2
1
1
a
2
3
b
4
r
f


5
4
3
2
1
1
2
3
4
a
b
r
f

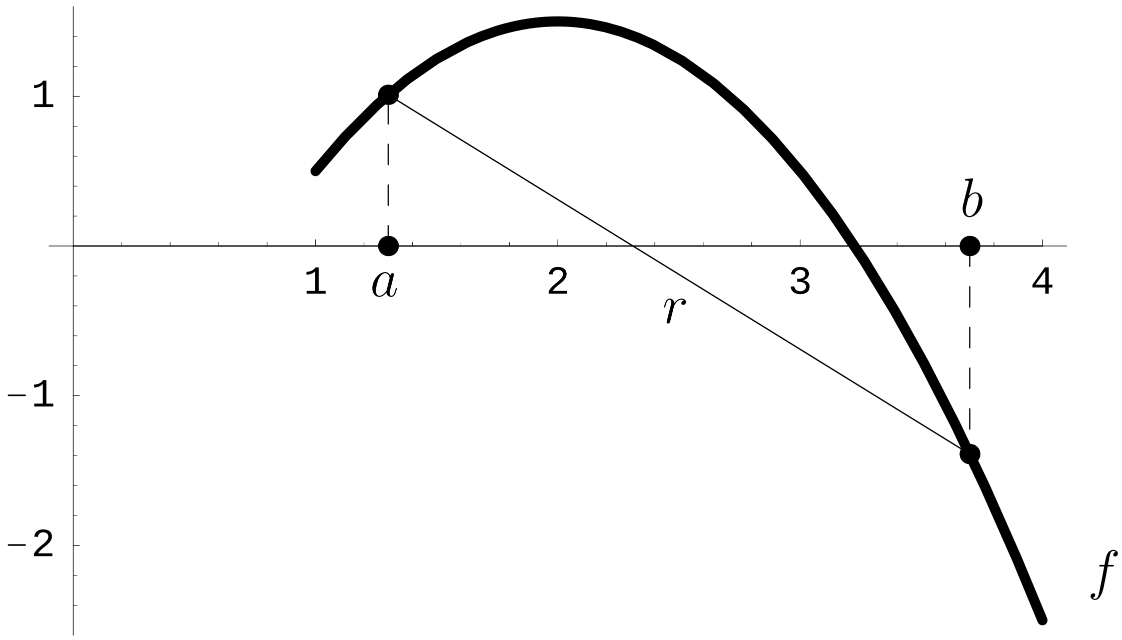

5
4
3
2
1
1
2
3
4
a
b
r
f

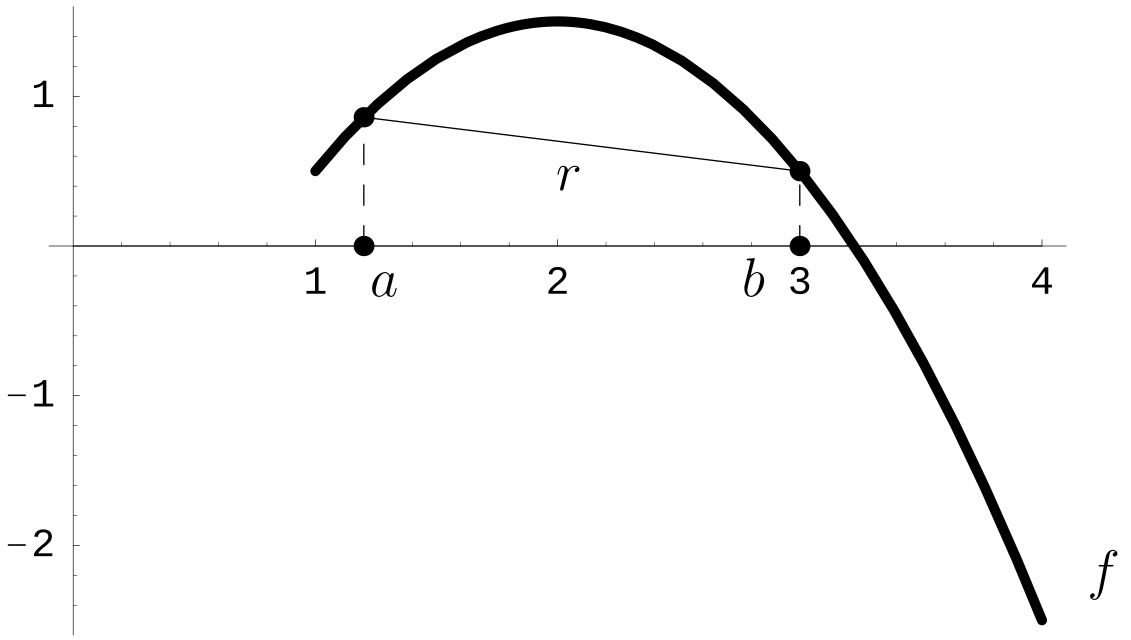
- *Decimos que f es cóncava en H si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)), \ \forall x \in H \cap (a, b),$$

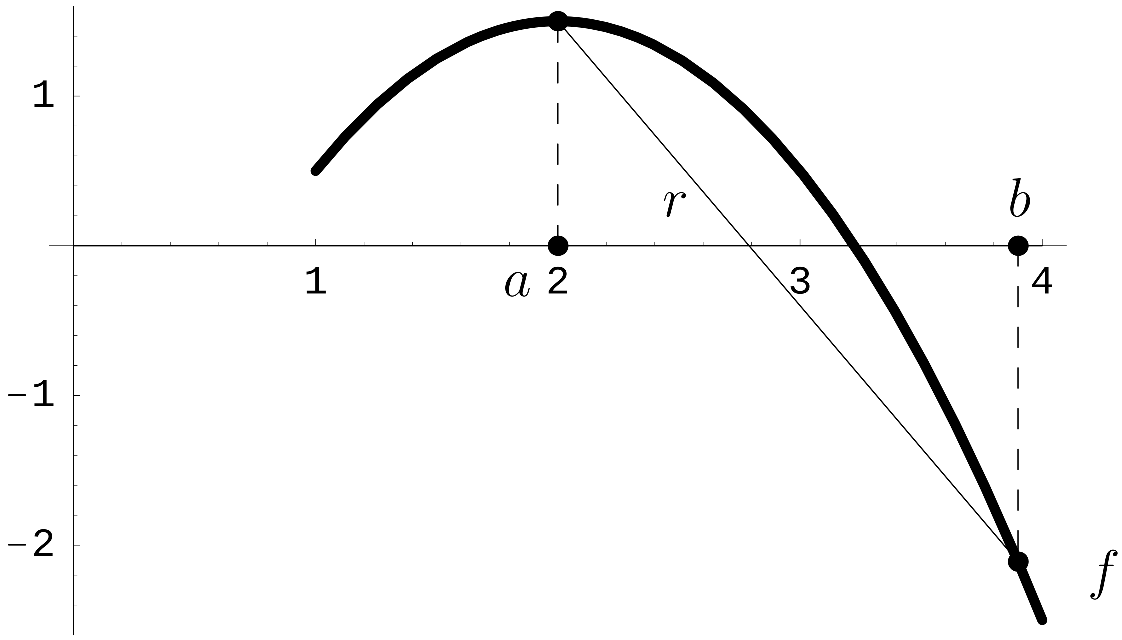
  es decir, si se tiene que dentro del conjunto H, f está por encima del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

  Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\geq$ sino además con $>$) entonces diremos que f es estrictamente cóncava en H.


1
−1
−2
1
a
2
r
3
b
4
f



1
−1
−2
1
a
2
b
3
4
r
f

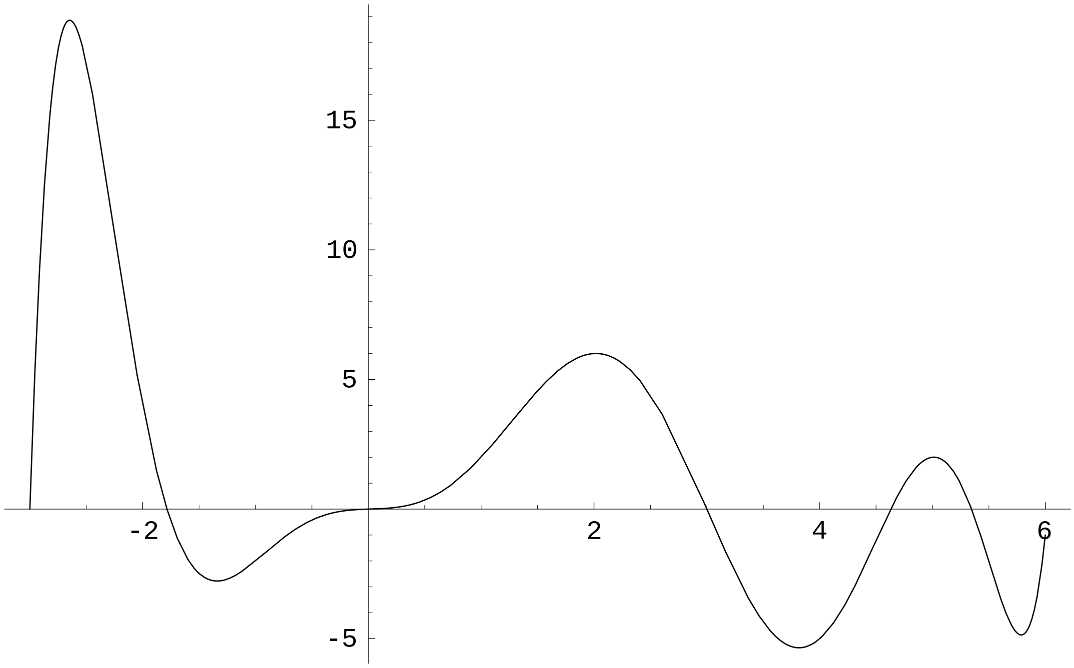

1
-1
-2
1
2
3
4
a
b
r
f

- *Decimos que* f *tiene un punto de inflexión en* $x_0 \in D$ *si* $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ *tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

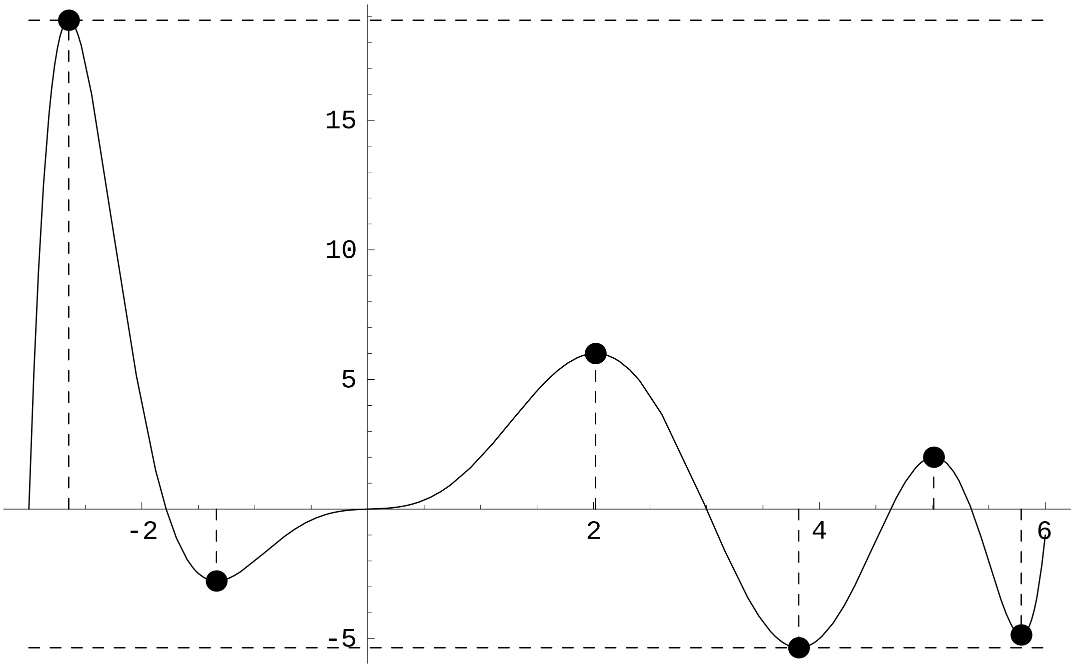
  a) f *es estrictamente cóncava en* $(a, x_0] \cap D$ *y es estrictamente convexa en* $[x_0, b) \cap D$.

  b) f *es estrictamente convexa en* $(a, x_0] \cap D$ *y es estrictamente cóncava en* $[x_0, b) \cap D$.

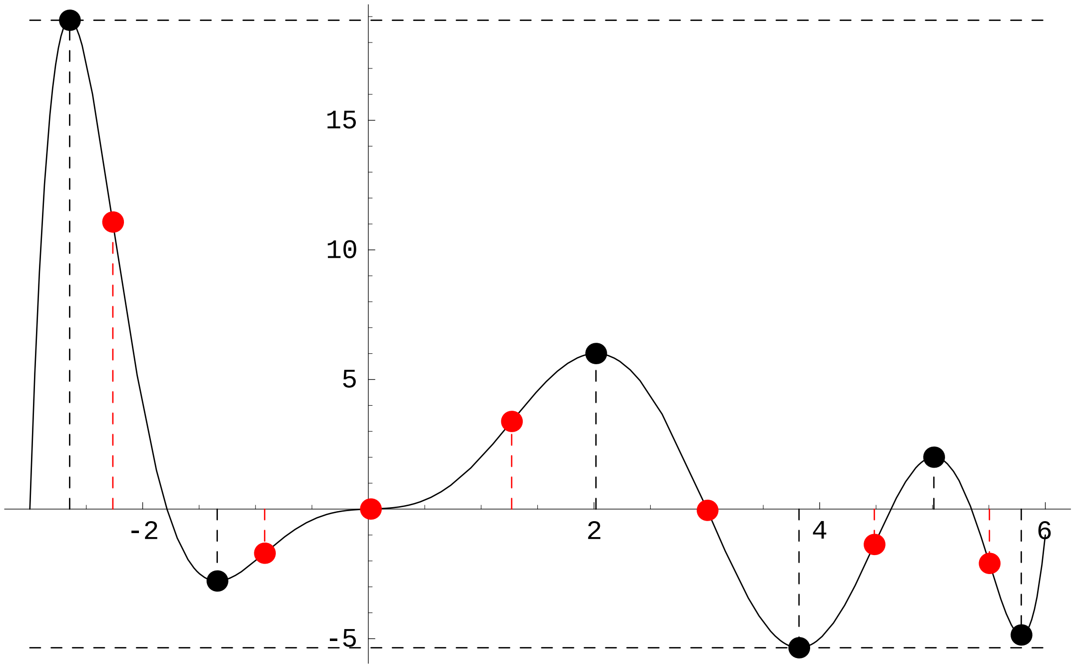
Ejemplo 11.



Ejemplo 11.



Ejemplo 11.



- Los máximos y mínimos separan los intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los puntos de inflexión separan los intervalos de concavidad y convexidad.

La propiedades de forma que verifica una función en cada intervalo dependerán de los signos de sus derivadas sucesivas.

Definición 12.

Sea una función real, $f : D \to \mathbb{R}$. Entonces:

a) *Definimos la función derivada primera de f como la función derivada de f.*

b) *Dado $n \in \mathbb{N}$, si la función derivada n-ésima de f está definida y es derivable en algún punto, definimos la función derivada $(n+1)$-ésima de f como su derivada.*

Notaremos a la función derivada n-ésima de f como

$$f^{n)} \qquad \text{ó} \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Si, para $n \in \mathbb{N}$, la función $f^{n)}$ está definida en el punto $x_0 \in D$, diremos que la función f es n veces derivable en x_0 y notamos al valor de la derivada n-ésima en tal punto como

$$f^{n)}(x_0), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \quad \text{ó} \quad \frac{d^n f}{dx^n}|_{x_0}.$$

Las funciones derivada primera, segunda y tercera se suelen designar mediante f', f'' y f''', en lugar de $f^{1)}$, $f^{2)}$ y $f^{3)}$.

Definición 13. *Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$, diremos que f es de clase C^n en D si se cumple las dos condiciones siguientes:*

1. *La función $f^{n)}$ está definida en todo D.*
2. *La función $f^{n)}$ es continua en D.*

El conjunto de todas las funciones de clase C^n en D se denota mediante $C^n(D)$.

Así mismo, una función que es de clase C^n en D para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una función de clase C^∞ en D. El conjunto de todas las funciones de clase C^∞ en D se denota mediante $C^\infty(D)$.

Propiedades 14. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sea un intervalo $I = (a, b) \subseteq D$ y $x_0 \in (a, b)$. Se verifica que:*

i) *Si f es derivable en I se tiene que:*

1. *Si $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$, entonces f es creciente en I.*
2. *Si $f'(x) > 0,\ \forall x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I.*
3. *Si $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in I$, entonces f es decreciente en I.*
4. *Si $f'(x) < 0,\ \forall x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I.*
5. *Si $f'(x) = 0,\ \forall x \in I$, entonces f es una función constante en I.*

ii) *Si f es derivable en x_0 y f tiene un máximo o un mínimo local en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.*

iii) *Si f es de clase C^2 en I y $f'(x_0) = 0$ entonces:*

1. *Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local estricto en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local estricto en x_0.*

iv) *Si dado $n \in \mathbb{N}$, f es de clase C^n y se cumple que*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-2)}(x_0) = f^{n-1)}(x_0) = 0$$

y que

$$f^{n)}(x_0) \neq 0,$$

entonces:

1. *Si $f^{n)}(x_0) > 0$ y n es par entonces x_0 es un mínimo local estricto de f.*
2. *Si $f^{n)}(x_0) < 0$ y n es par entonces x_0 es un máximo local estricto de f.*
3. *Si n es impar entonces f no tiene máximo ni mínimo local en x_0.*

v) *Si f es de clase C^2 en I entonces:*

1. *Si $f''(x) \geq 0, \ \forall x \in I$ entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) > 0, \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente convexa en I.*
3. *Si $f''(x) \leq 0, \ \forall x \in I$ entonces f es cóncava en I.*
4. *Si $f''(x) < 0, \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente cóncava en I.*

vi) *Si f es de clase C^2 en I y x_0 es un punto de inflexión de f entonces*

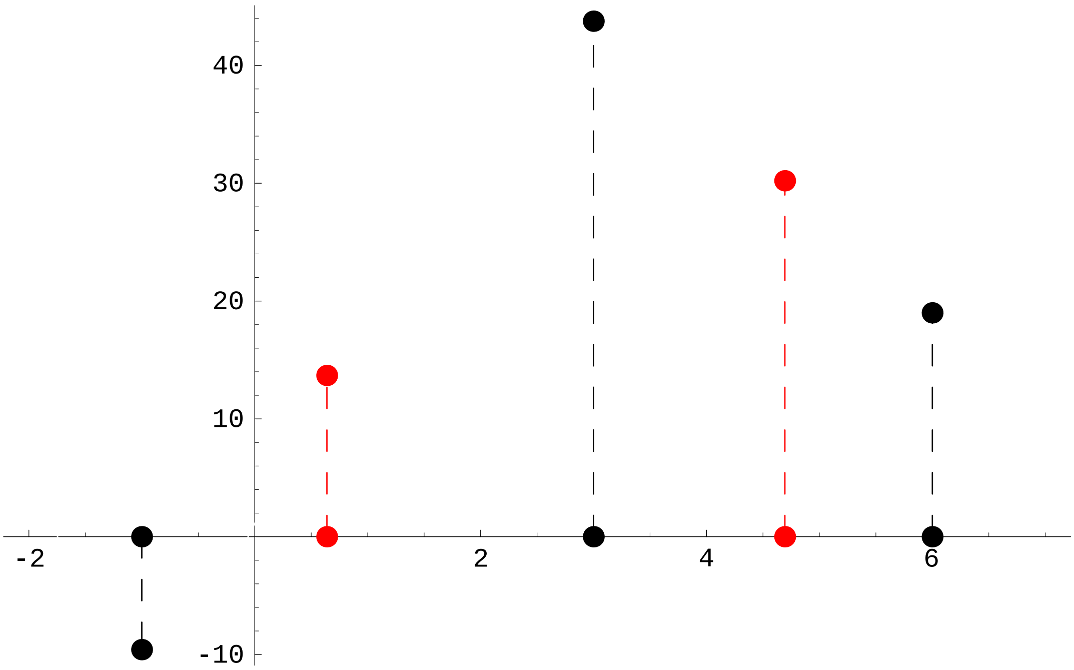
$$f''(x_0) = 0.$$

vii) *Si f es de clase C^3 en I y se verifica que*

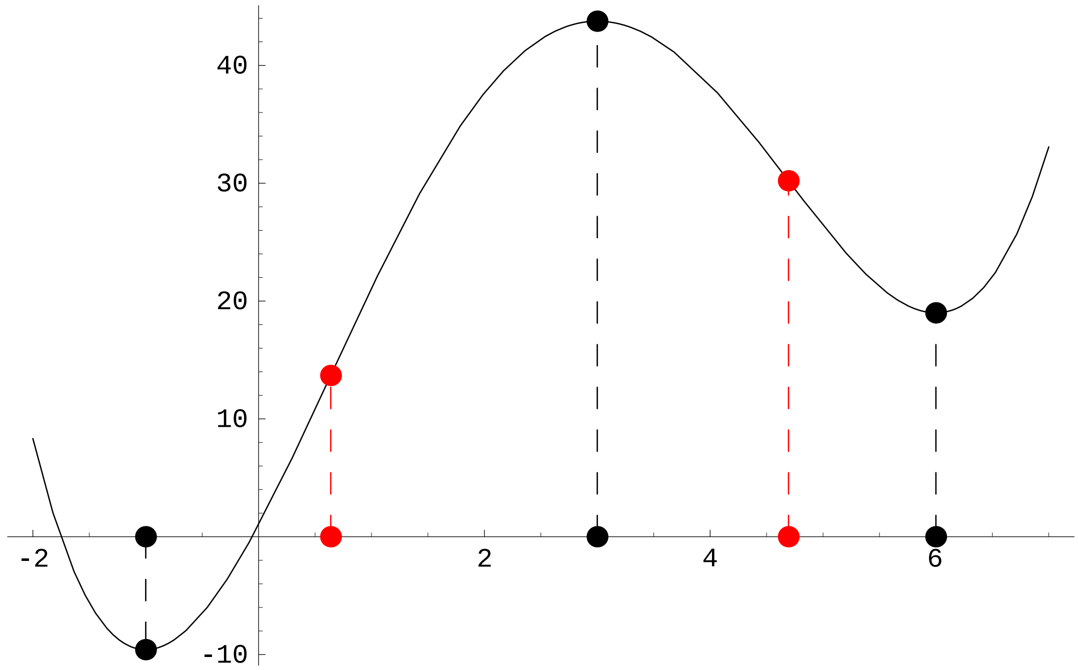
$$f''(x_0) = 0 \qquad y \qquad f'''(x_0) \neq 0$$

entonces x_0 es un punto de inflexión de f.

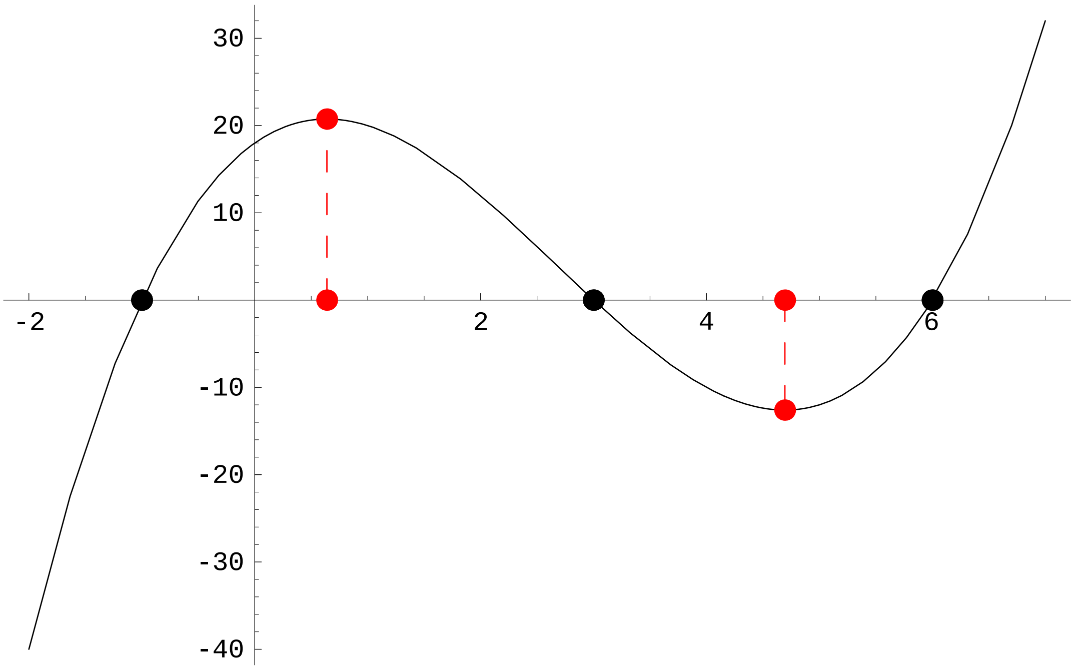
Ejemplo 15.



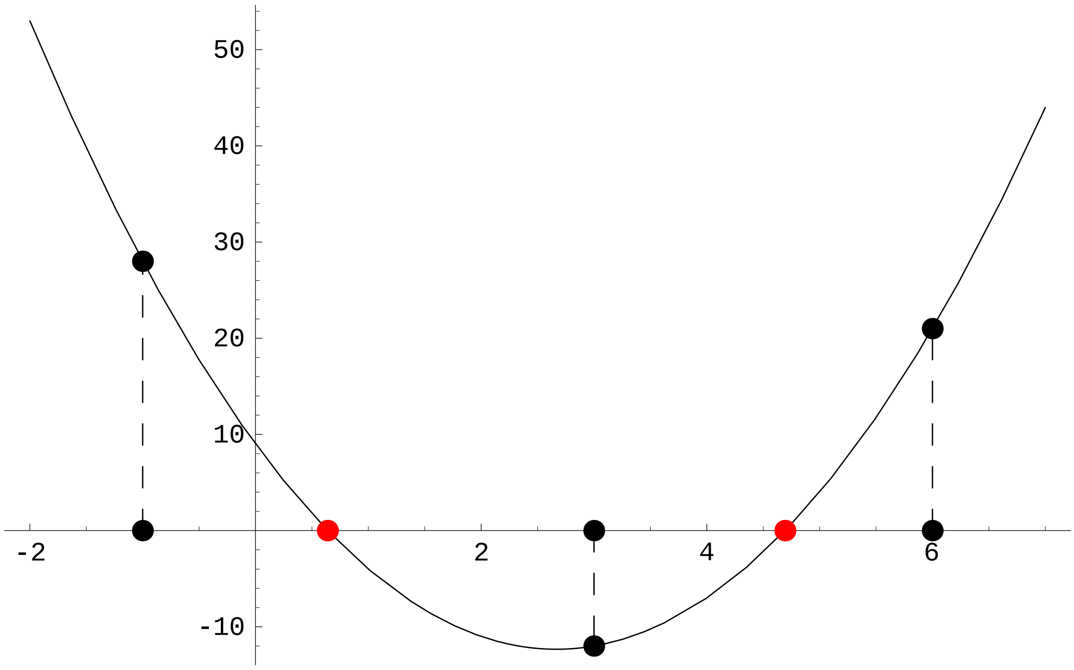
Ejemplo 15.



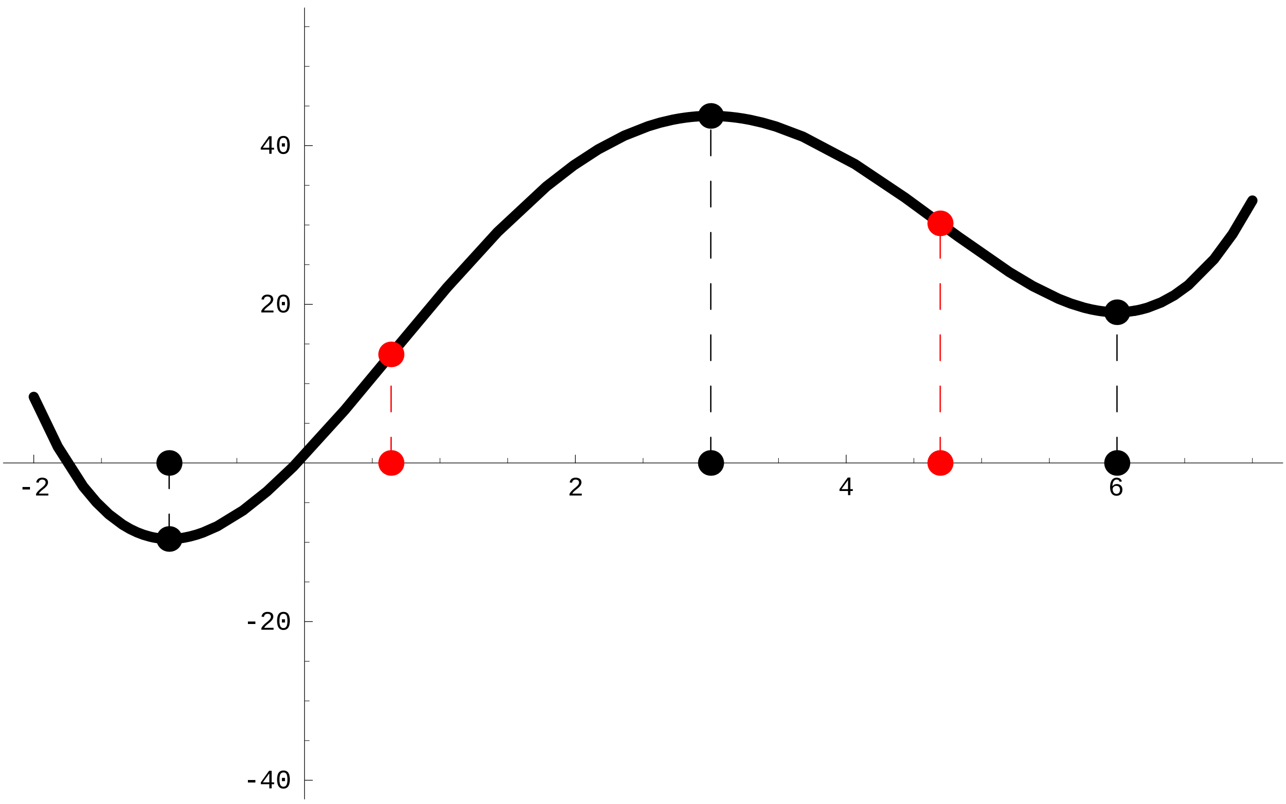
Ejemplo 15.



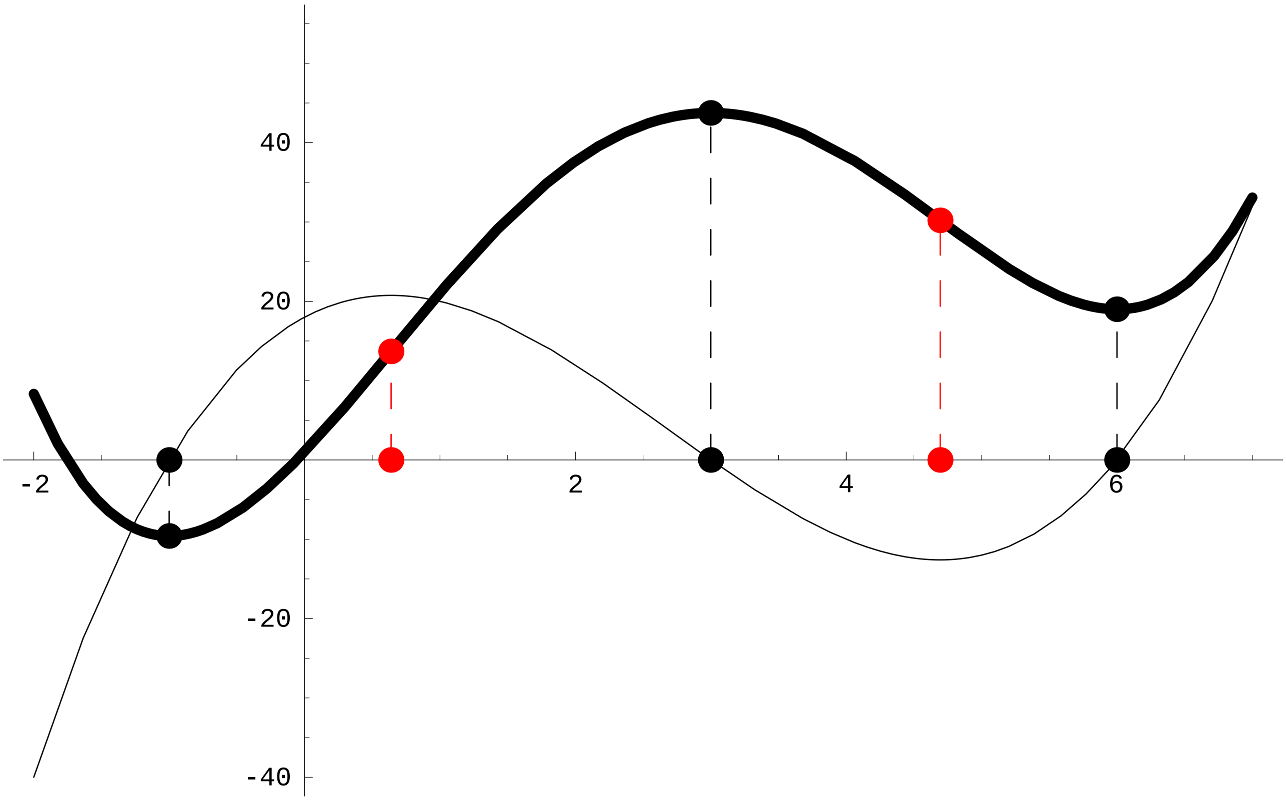
Ejemplo 15.



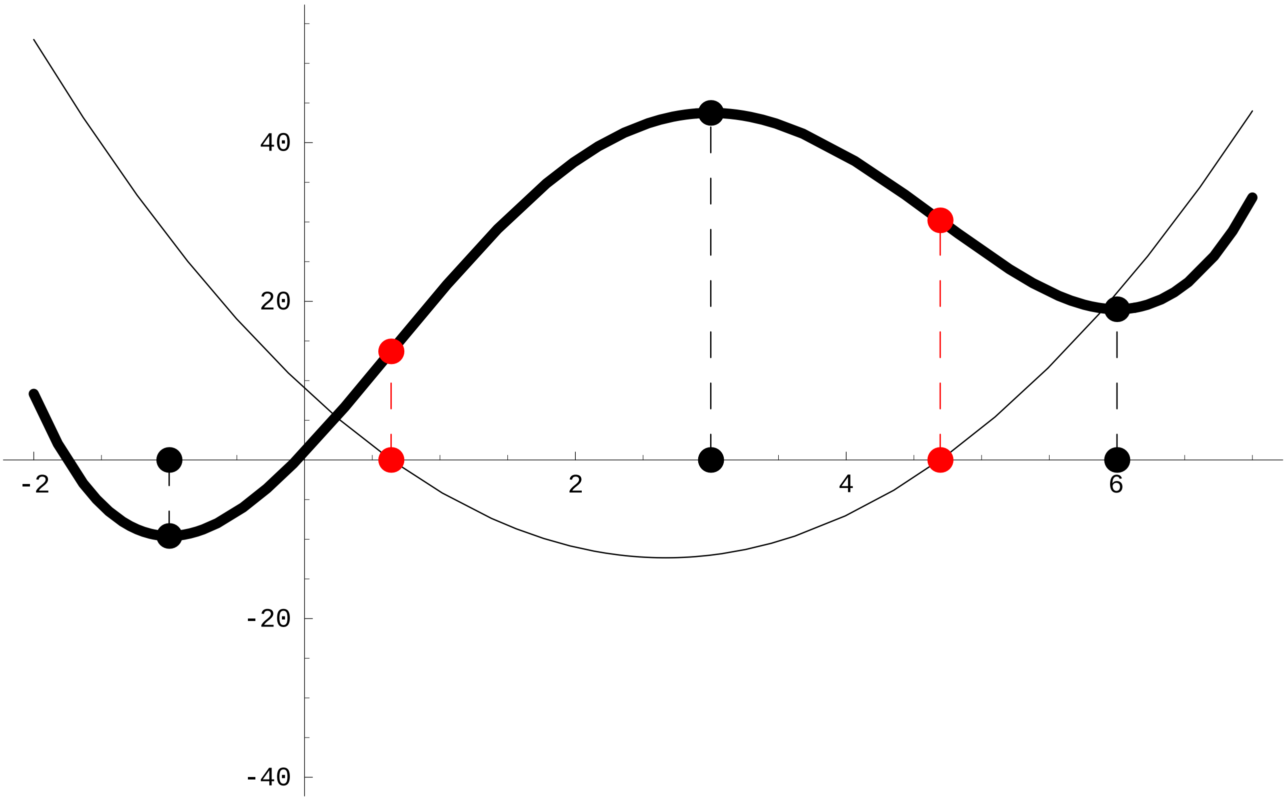
Ejemplo 15.



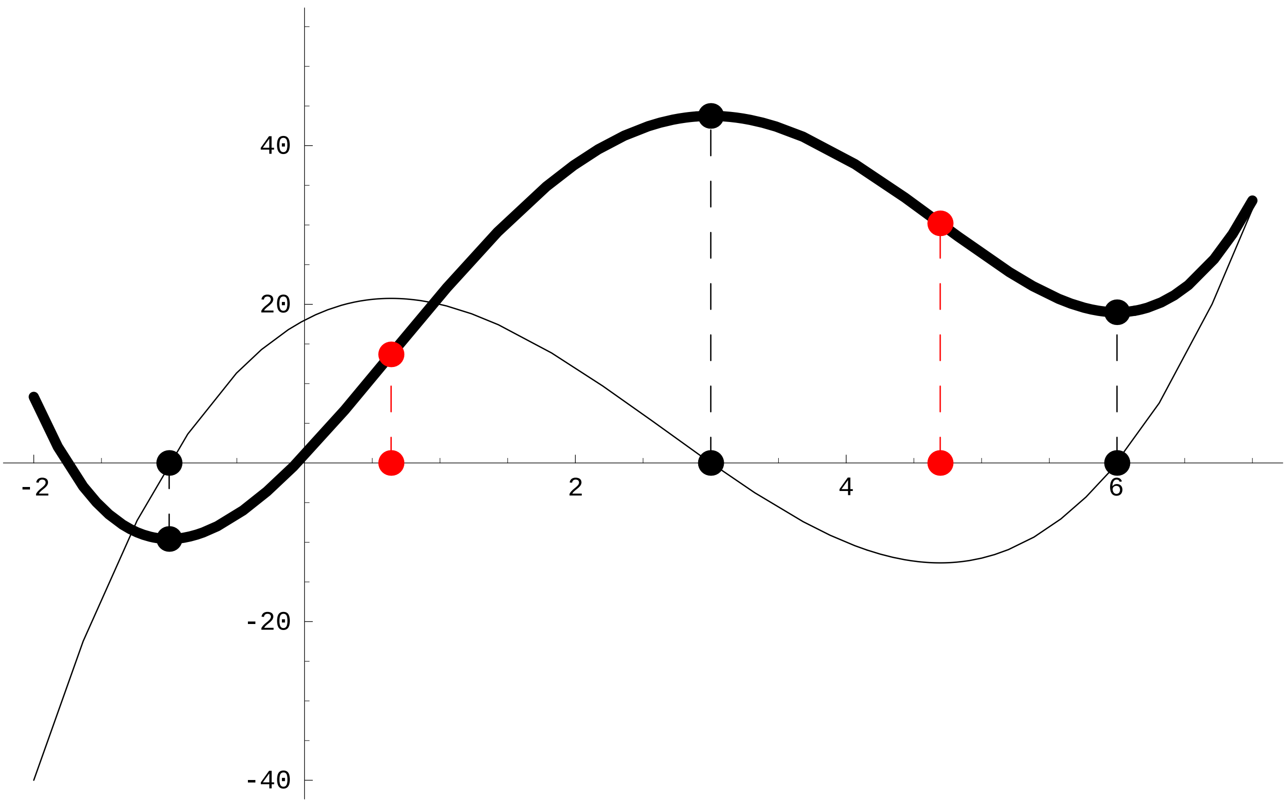
Ejemplo 15.



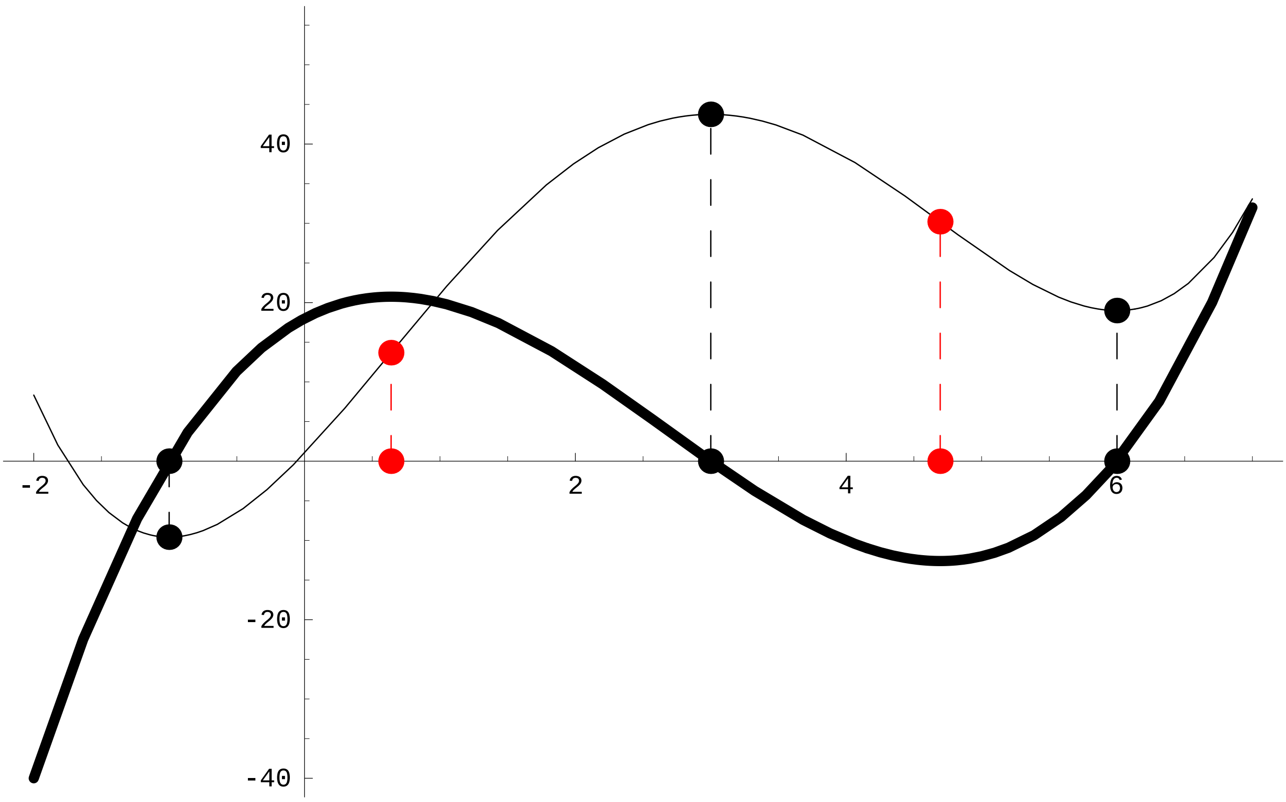
Ejemplo 15.



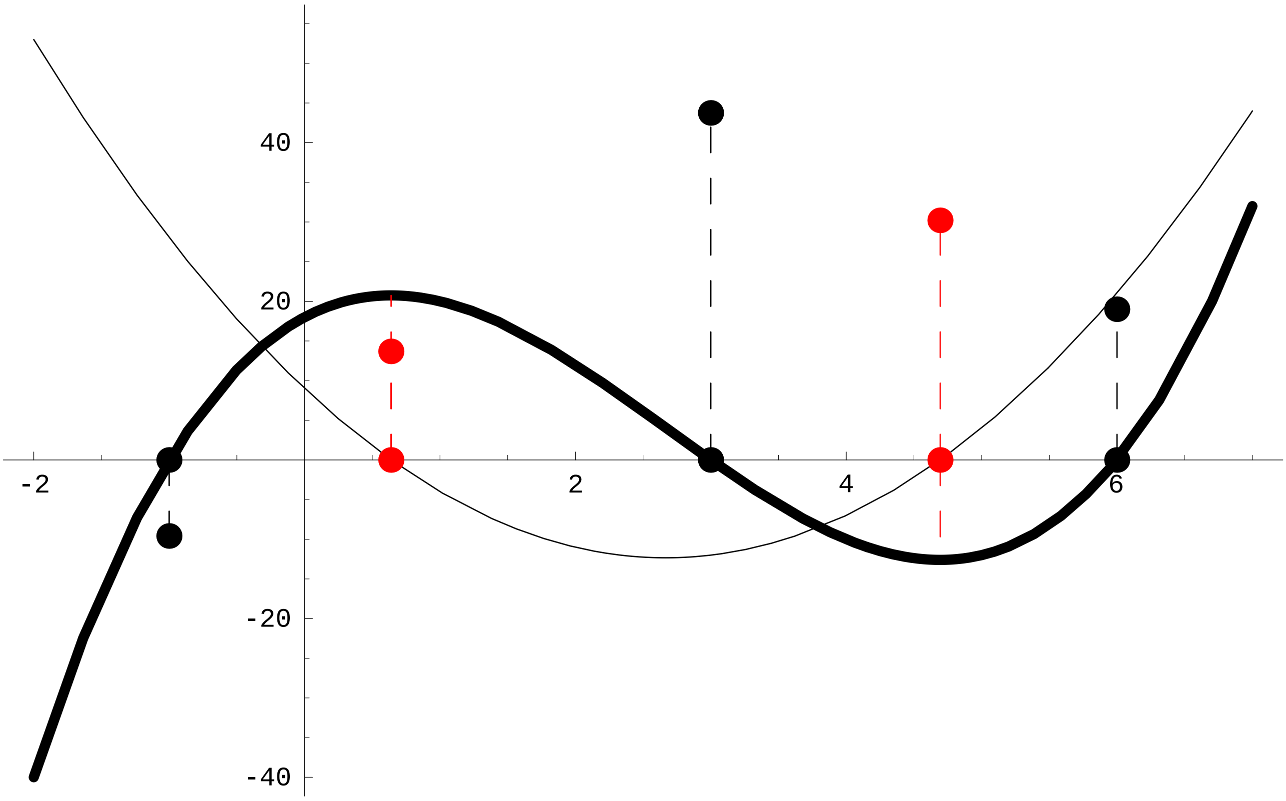
Ejemplo 15.



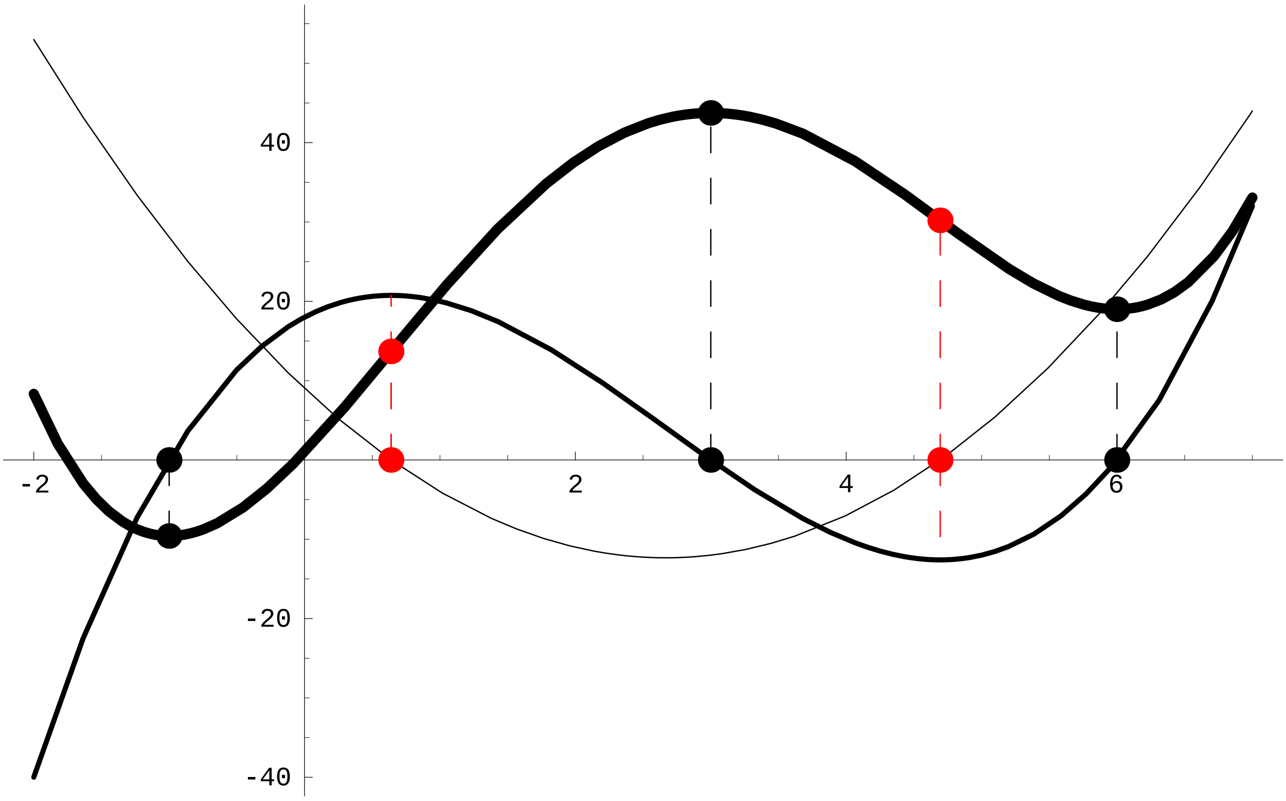
Ejemplo 15.



Ejemplo 15.



Ejemplo 15.



Durante los primeros seis meses del año, se prevé que las cotizaciones en bolsa de una empresa varíen según la función

$$\begin{array}{c} C : [0, 6] \to \mathbb{R} \\ C(t) = t^3 - 6t^2 + 3t + 25 \end{array},$$

donde t indica el mes y $C(t)$ el valor en euros de una acción en ese mes.

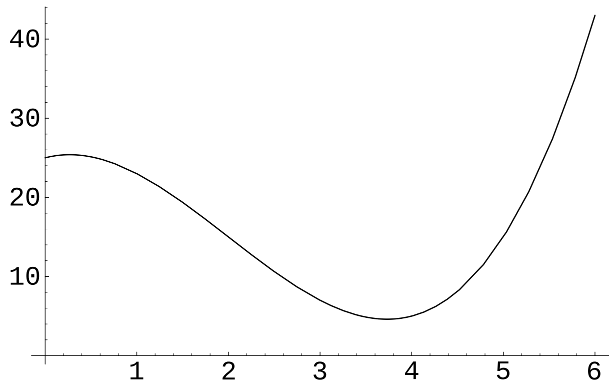
Determinar entre qué valores oscilarán las cotizaciones de las acciones durante los seis primeros meses. Realizar el mismo estudio para los cinco primeros meses y para los dos primeros meses.

Durante los primeros seis meses del año, se prevé que las cotizaciones en bolsa de una empresa varíen según la función

$$\begin{array}{c} C : [0,6] \to \mathbb{R} \\ C(t) = t^3 - 6t^2 + 3t + 25 \end{array},$$

donde t indica el mes y $C(t)$ el valor en euros de una acción en ese mes.

Determinar entre qué valores oscilarán las cotizaciones de las acciones durante los seis primeros meses. Realizar el mismo estudio para los cinco primeros meses y para los dos primeros meses.



4 La regla de l'Hôpital

Dadas dos funciones, $f, g : D \to \mathbb{R}$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ó $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \boxed{=} \frac{\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\displaystyle\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Teorema 16 (Reglas de l'Hôpital). *Sean dos funciones reales f y g, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$ de manera que se verifican las siguientes condiciones*

1. *f y g son derivables en $I - \{x_0\}$.*
2. *$g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I - \{x_0\}$.*
3. *Se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:*
   a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
   b) $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

donde L puede ser un número real, $+\infty$ ó $-\infty$. La propiedad también es correcta para el límite por la izquierda o por la derecha.

Ejemplos 17.

1) Si calculamos el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ de forma directa,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\frac{0}{0},$$

pero aplicando L'Hôpital tenemos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}'(x)}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$

2) Calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. De entrada tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0.$$

Utilizando las propiedades del logaritmo sabemos que

$$x^x = e^{x\log(x)},$$

en cuyo caso,

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log(x)} = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)}.$$

Ahora, en lugar del límite inicial, debemos calcular $\lim_{x\to 0} x\log(x)$. Pero escribiendo ese producto en forma de cociente y aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log'(x)}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

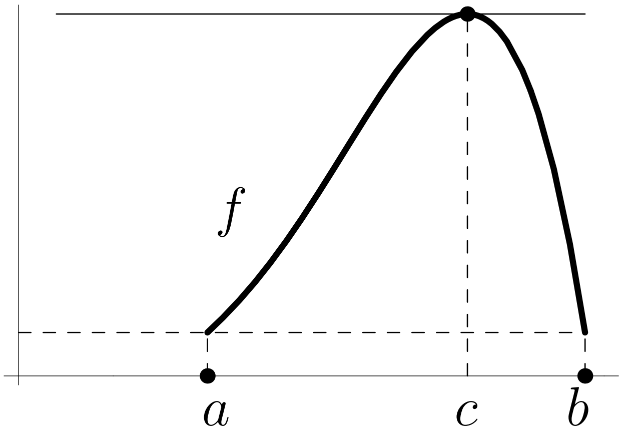
Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)} = e^0 = 1.$$

5 Material Adicional

5.1 Teoremas clásicos de derivación

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $f(a) = f(b)$, su gráfica será algo del tipo



La intuición nos indica que, forzosamente, en algún punto intermedio entre a y b la tangente a la función debe ser horizontal. El Teorema de Rolle afirma que esto efectivamente es así.

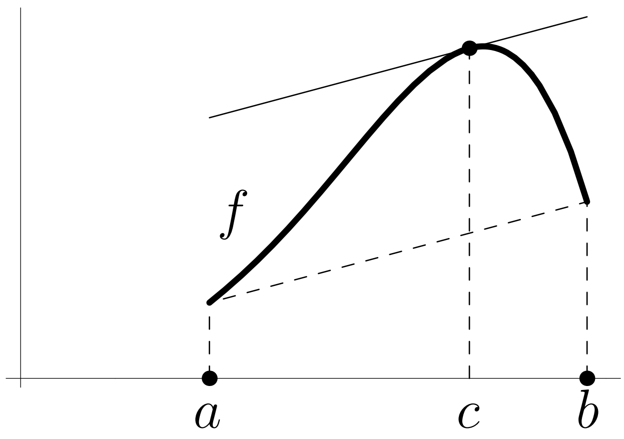
Teorema 18 (Teorema de Rolle)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces si $f(a) = f(b)$ se verifica que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Cuando $f(a) \neq f(b)$ el razonamiento anterior no es válido pero es fácil formular una versión del Teorema de Rolle para esta situación.

Teorema 19 (Teorema del valor medio)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



5.2 Desarrollo de Taylor y McLaurin

Supongamos que queremos encontrar una función de forma que en cierto punto x_0 sus derivadas tomen sucesivamente los valores $f_0, f_1, \ldots, f_k$, es decir,

$$f(x_0) = f_0,\ f'(x_0) = f_1,\ f''(x_0) = f_2, \ldots, f^{n)}(x_0) = f_n.$$

Hay muchas maneras de resolver este problema pero la forma más sencilla consiste en considerar el siguiente polinomio:

$$p_n(x) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(x - x_0) + \frac{f_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f_n}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$

es una solución a este problema, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ es lo que se denomina número factorial. Es fácil comprobar que

$$p(x_0) = f_0,\ p'(x_0) = f_1,\ p''(x_0) = f_2, \ldots, p^{n)}(x_0) = f_n.$$

Tomemos ahora una función $f : D \to \mathbb{R}$, n veces derivable en cierto punto x_0. Supongamos que únicamente tenemos información de la función en el punto x_0

$$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{n)}(x_0).$$

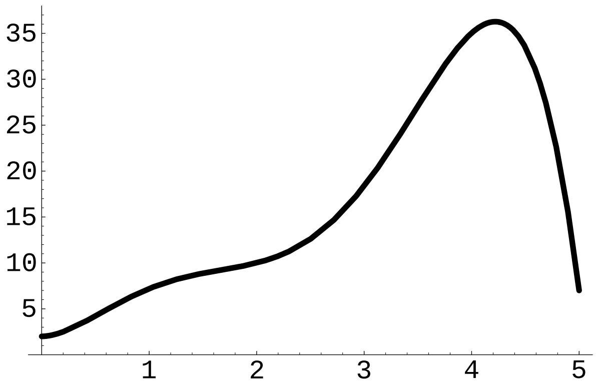
¿Será posible reconstruir la función f a partir de esta información?

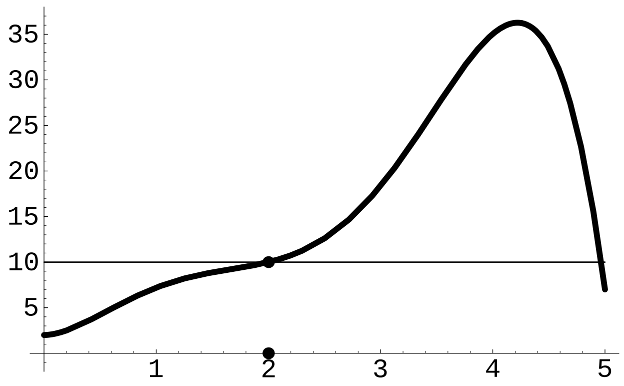
Definición 20. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n en D y sea $x_0 \in D$. Llamamos polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al polinomio*

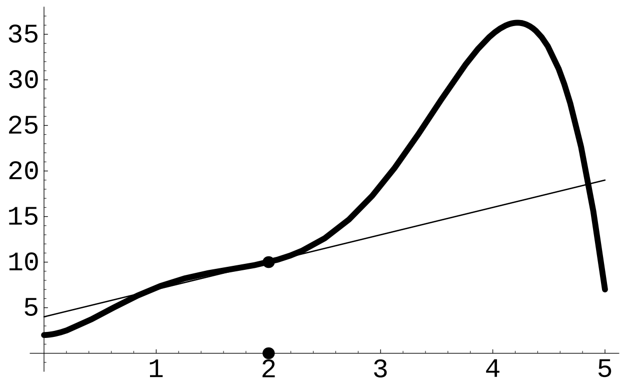
$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

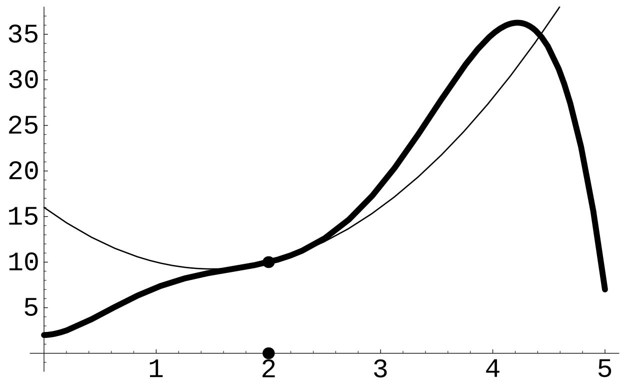
El polinomio de Taylor de grado n en $x_0 = 0$ se denomina también polinomio de McLaurin de grado n.

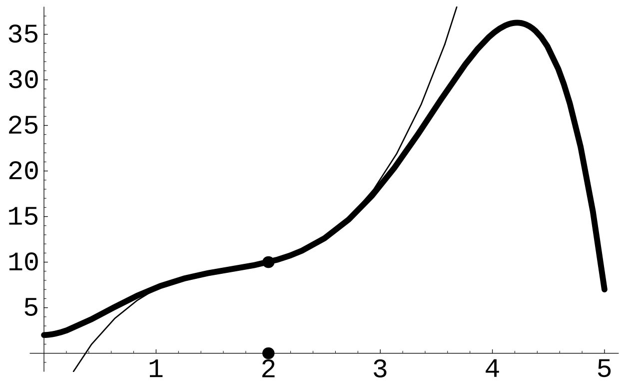
El polinomio de Taylor de una función constituye una aproximación de dicha función que presenta la ventaja de un más fácil manejo.


35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5


35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5


35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5


35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5


35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5

Propiedad 21. *Sea un intervalo $I = (a, b)$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} en I y sea $x_0 \in I$. Entonces para cualquier $x \in I$ existe un punto real ξ situado entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$+ \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A la fórmula anterior se la conoce como fórmula de Taylor de grado n de la función f en el punto x_0.

La formula de Taylor nos proporciona el error cometido al tomar el polinomio de Taylor en lugar de la función.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{p_n(x)}$$

$$+\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

y por lo tanto el error cometido será

$$E_n(x) = \left| \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$