Capítulo 5

Sistemas Lineales. Vectores

5.1 Conceptos básicos

Una ecuación es una igualdad matemática en la que aparece uno o varios datos desconocidos denominados incógnitas. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que por lo general comparten las mismas incógnitas. En este capítulo estudiaremos un tipo particular de sistemas, los 'sistemas lineales', que son de especial importancia debido a:

- La gran cantidad de aplicaciones. En la base de prácticamente cualquier cálculo matemático se halla siempre la necesidad de resolver un sistema lineal.
- La posibilidad de un tratamiento teórico a través de técnicas algebraicas elementales. De hecho, todas las técnicas que utilizaremos ya han sido presentadas en el capítulo anterior.

Comencemos con las definiciones fundamentales de la teoría de sistemas lineales de ecuaciones.

Definición 1. *Un sistema lineal con m ecuaciones y n variables o incógnitas ordenadas, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es un conjunto de ecuaciones de la forma*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

donde para cada $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$:

- *$a_{ij} \in \mathbb{R}$ se denomina coeficiente (i, j) del sistema.*
- *$b_i \in \mathbb{R}$ se denomina i-ésimo término independiente del sistema.*
- *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan incógnitas del sistema y son símbolos que representan un valor desconocido que debe ser calculado.*

Llamamos solución del sistema a cualquier n-upla de números reales $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que si en el sistema, para todo $i = 1, \ldots, n$, sustituimos x_i por s_i, todas las ecuaciones del mismo son ciertas. Resolver un sistema es encontrar el conjunto de todas sus soluciones.

Diremos que el sistema es:

- **homogéneo** *si $\forall i = 1, \ldots, m$, $b_i = 0$.*
- **completo** *si para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, $b_i \neq 0$.*

En un sistema pueden aparecer datos desconocidos distintos de las variables a los que llamaremos parámetros del sistema.

Todo sistema lineal puede representarse como una ecuación matricial. Ello nos permitirá abordar su tratamiento a través de las técnicas matriciales del Capítulo 4. En la siguiente definición establecemos la nomenclatura correspondiente.

Definición 2. *Dado el sistema lineal*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

llamamos:

- *Matriz de coeficientes del sistema a la matriz $m \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

- *Columna de términos independientes del sistema a* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}.$

- *Columna de variables del sistema a* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

- *Ecuación matricial del sistema o forma matricial del sistema a*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$$

- *Matriz ampliada del sistema a la matriz*

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

En los siguientes ejemplos ilustramos los conceptos que hemos introducido en las definiciones anteriores. Vemos en ellos que hay sistemas que tienen una única solución pero que también podemos encontrar otros tienen múltiples soluciones. En ese último caso, cuando tenemos un sistema con varias soluciones, es fundamental encontrar un método adecuado que permita escribirlas todas ellas. La técnica básica para la representación de soluciones múltiples consiste en la utilización de parámetros. En los últimos ejemplos presentamos las ideas básicas de esta técnica.

Ejemplos 3.
1) Consideremos el sistema de dos ecuaciones y variables (x, y, z) siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ x+y-2z=3 \end{array}\right. .$$

Se trata de un sistema lineal completo para el que la matriz de coeficientes y las columnas de términos independientes y variables son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 3\end{array}\right).$$

Además, es fácil comprobar que $(5, -2, 0)$, $(10, -5, 1)$, $(0, 1, -1)$ son soluciones del sistema. Para ello, sustituimos las variables x, y y z por los valores correspondientes en las ecuaciones del sistema o en su ecuación matricial. Así por ejemplo:

$$(5,-2,0) \text{ es solución ya que tomando } \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \\ z=0 \end{array}\right. \text{ tenemos } \left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} 5+(-2)+0=1 \\ 5+(-2)-2\ 0=3 \end{array}\right. \\ \text{ó} \\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \end{array}\right. .$$

2) Consideremos el sistema de tres ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x+3y+z=1 \\ x+y+z=-1 \\ x-y+z=0 \end{array}\right. .$$

Puesto que no hemos indicado lista de variables, hemos de suponer que toda incógnita o dato desconocido que aparezca en el sistema es una variable del mismo. En el sistema encontramos las incógnitas

$$\alpha,\ x,\ y,\ z,$$

que, por tanto, serán todas ellas variables. En este caso el sistema de ecuaciones indicado no es lineal puesto que dos de sus variables, α y x, aparecen multiplicadas entre sí.

3) Consideremos el sistema de tres ecuaciones y con variables (x, y, z) siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x+3y+z=1 \\ x+y+z=-1 \\ x-y+z=0 \end{array}\right. .$$

Para este sistema, puesto que hemos indicado quiénes son sus variables, sabemos que α no es una de ellas así que será un parámetro del sistema (recuérdese que un parámetro es una incógnita que aparece en el sistema y que no forma parte de la lista de variables).

En este caso el sistema es lineal y su matriz de coeficientes y columnas de términos independientes y variables son:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema dependerá del valor del parámetro α. Si $\alpha \neq 1$, es fácil comprobar que el sistema tiene una única solución dada mediante

$$\left(\frac{3}{\alpha-1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3}{\alpha-1}\right) \text{ o lo que es lo mismo, } \begin{cases} x = \frac{3}{\alpha-1}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{\alpha-1}. \end{cases}$$

Por contra, si $\alpha = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

y no tiene ninguna solución. Ello podemos verlo fácilmente ya que sumando la primera ecuación con la tercera y restando el doble de la segunda tenemos

$$\begin{array}{rlcl} & x + 3y + z & = & 1 \\ -2(& x + y + z \quad) & = & -2 \cdot (-1) \\ & x - y + z & = & 0 \\ \hline & 0x + 0y + 0z & = & 3 \end{array}$$

y es evidente que la ecuación resultante no puede cumplirse nunca para ningunos valores de x, y, z.

4) El sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 12 \\ y + z + 3w = 10 \\ x + 2y - 3z + 2w = 14 \\ 2x - 2y + 4z + 5w = 9 \end{cases}$$

tiene cuatro ecuaciones y cuatro variables. Su ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que la <u>única</u> solución es

$$(1, 2, -1, 3) \text{ o lo que es lo mismo } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = 3 \end{cases}.$$

5) Intentemos resolver el sistema en las variables x e y,

$$\{x + y = 3\ .$$

Aunque se trata de un sistema extremadamente sencillo, presenta el problema de que en él aparecen dos variables pero solamente una ecuación. Ello hace imposible calcular el valor de una de las variables si desconocemos el valor de la otra. Si pretendemos calcular x, deberemos conocer el valor de y. Así por ejemplo,

- si $y = 1$ entonces $x = 3 - y = 3 - 1 = 2$, $\Downarrow$ $x = 2, y = 1$ es una solución,
- si $y = -7$ entonces $x = 3 - y = 3 - (-7) = 10$, $\Downarrow$ $x = 10, y = -7$ es una solución,
- si $y = 0$ entonces $x = 3 - y = 3 - 0 = 3$, $\Downarrow$ $x = 3, y = 0$ es una solución,

etc.

Como vemos la única manera para encontrar soluciones del sistema consiste en suponer que conocemos el valor de y. En lugar de ir dando distintos valores, de forma genérica podemos suponer que y adopta un cierto valor α (que en los ejemplos anteriores era $\alpha = 1$, $\alpha = -7$ ó $\alpha = 0$) de manera que tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = \alpha \end{cases}$$

cuya solución es evidentemente

$$\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \quad \text{o de otro modo} \quad (3 - \alpha, \alpha).$$

Como vemos en este ejemplo, cuando tenemos pocas ecuaciones no disponemos de información suficiente para calcular las soluciones del sistema. En tal caso podemos proceder como aquí suponiendo que conocemos el valor de alguna de las variables y que este valor es igual a cierto parámetro (en este caso α). Suele decirse entonces que hemos 'tomado una variable como parámetro'. Concretamente, aquí hemos tomado la variable y como parámetro para resolver el sistema.

Dándole valores al parámetro α obtenemos todas las soluciones del sistema. Así tenemos,

$$(3-\alpha,\alpha) \quad \begin{array}{ll} \xrightarrow[\alpha = 1]{} & (2,1) \text{ o de otro modo} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \\ \xrightarrow[\alpha = -7]{} & (10,-7) \text{ o de otro modo} \begin{cases} x = 10 \\ y = -7 \end{cases}, \\ \xrightarrow[\alpha = 0]{} & (3,0) \text{ o de otro modo} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}, \\ \xrightarrow[\alpha = 3]{} & (0,3) \text{ o de otro modo} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}$$

y en general tendremos infinitas soluciones correspondientes a todos los demás posibles valores de α. El conjunto de todas las soluciones será

$$\{(3 - \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

6) En el sistema,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \end{cases},$$

aparecen cuatro variables y solamente dos ecuaciones. Con sólo dos ecuaciones no podemos calcular el valor de las cuatro variables x, y, z y w. Como en el ejemplo anterior, sólo podremos resolver el sistema si sabemos lo que valen algunas de las variables. Supongamos por tanto que el valor de z es α y el de w es β. Es decir, hemos tomado como parámetro las variables z y w con lo que el sistema queda en la forma,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \\ z = \alpha \\ w = \beta \end{cases}.$$

Puesto que hemos supuesto que conocemos las variables z y w, las sustituiremos por sus valores y dejaremos en el miembro izquierdo de cada igualdad solamente las variables que aún desconocemos,

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{array}\right. .$$

De esta forma, nos queda por resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \end{array}\right. .$$

que tiene dos variables y dos ecuaciones y podremos encontrar sus soluciones dando un valor concreto para x y y que, por supuesto, aparecerá en función de los parámetros α y β. Para ello bastará con sumar o restar entre sí las dos ecuaciones como sigue:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2-\alpha-\beta \\ x-y=1-\alpha+2\beta \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{sumando las ecuaciones}]{} \\ \xrightarrow[\text{restando las ecuaciones}]{} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x=3-2\alpha+\beta \\ 2y=1-3\beta \end{array}$$

y la solución final es

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{3-2\alpha+\beta}{2} \\ y=\frac{1-3\beta}{2} \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{array}\right. \quad \text{o de otra forma, } \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta\right).$$

El sistema tiene infinitas soluciones todas las cuales se obtienen dando valores a los parámetros α y β. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lcl} \alpha=1, \beta=0 & \rightarrow & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) \\ \alpha=1, \beta=1 & \rightarrow & (1, -1, 1, 1) \end{array}$$

pudiéndose obtener las demás soluciones de esta manera. De este modo, el conjunto de todas las soluciones del sistema es

$$\{(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

En los dos últimos ejemplos hemos sido capaces de escribir todas las soluciones de cada sistema tomando variables como parámetro. En el ejemplo **5)** hemos tomado la variable y como parámetro asignándole el parámetro α y en el ejemplo **6)** hemos tomado las variables z y w como parámetro asignándoles los parámetros α y β.

Cuando un sistema tiene una única solución, como en el ejemplo **4)**, no es preciso emplear ningún parámetro para resolverlo. Solamente cuando un sistema tenga varias soluciones necesitaremos utilizar parámetro para expresarlas. En la siguiente definición precisamos lo que entendemos por ‘tomar una variable como parámetro’ en un sistema.

Definición 4. *Dado el sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. ,$$

el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_i=\alpha_i \end{array}\right. ,$$

resultante de añadir al sistema inicial la ecuación $x_i = \alpha_i$, se dice que ha sido obtenido tomando la variable x_i como parámetro mediante el parámetro α_i.

Por supuesto, en un sistema es posible tomar sucesivamente distintas variables como parámetro. La cuestión es saber cuántas variables y cuáles hemos de tomar como parámetro para conseguir llegar a la solución del sistema. Podemos encontrar sistemas que necesitan dos, uno o ningún parámetro para ser resueltos. En la siguiente definición damos una clasificación de los sistemas lineales en función de las características de su conjunto de soluciones.

Definición 5. *Un sistema lineal se dice que es:*

- **compatible:** *Si tiene al menos una solución.*
- **incompatible:** *Si no tiene ninguna solución.*
- **indeterminado:** *Si tiene más de una solución.*
- **determinado:** *Si tiene una única solución.*
- **de solución d-dimensional:** *Si en el sistema se pueden seleccionar d variables tales que el sistema resultante al tomarlas como parámetros es compatible y determinado. Es decir, si todas sus soluciones se pueden expresar tomando d variables del sistema como parámetros.*

Esquemáticamente tenemos:

$$\text{Sistema lineal} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c}\text{Compatible}\\ \text{(con solución)}\end{array} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c}\text{Determinado}\\ \text{(solución única)}\end{array} \\[2ex] \begin{array}{c}\text{Indeterminado}\\ \text{(varias soluciones)}\end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{De solución 1 dimensional.} \\ \text{De solución 2 dimensional.} \\ \quad\vdots \\ \text{De solución } d \text{ dimensional.} \end{array} \right. \end{array} \right. \\[4ex] \begin{array}{c}\text{Incompatible}\\ \text{(sin solución)}\end{array} \end{array} \right.$$

Ya hemos comentado que un sistema compatible que tiene una única solución no necesita ningún parámetro para ser resuelto. Es decir, necesita 0 parámetros y será, en consecuencia, de solución 0-dimensional.

Es evidente que un sistema homogéneo siempre tendrá al menos una solución consistente en elegir todas las variables iguales a cero. Por tanto, todo sistema homogéneo es siempre compatible. En caso de que el sistema no sea homogéneo será necesario recurrir a argumentos más complejos para determinar si el sistema es o no compatible.

Ejemplo 6. Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right. .$$

Es evidente que no tiene ninguna solución ya que no es posible encontrar ningunos valores de x e y que cumplan al mismo tiempo las dos ecuaciones (si x e y suman 0, es imposible que al mismo tiempo sumen también 1). El sistema es por tanto incompatible.

En este caso ha sido posible comprobar a simple vista que el sistema es incompatible. Sin embargo, podemos encontrarnos con otros casos no tan sencillos en los que no será tan fácil determinar si el sistema en cuestión es compatible o incompatible.

El siguiente teorema permite determinar de qué tipo es un sistema a partir del estudio de los rangos de su matriz de coeficientes y de su matriz ampliada.

Teorema 7 (Rouché-Frobenius)**.** *Consideremos un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas expresado mediante su forma matricial:*

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. *Entonces:*

i) El sistema es compatible $\Leftrightarrow \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|B)$.

ii) El sistema es determinado $\Leftrightarrow \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|B) = n =$ *número de incógnitas.*

iii) El sistema tiene solución d-dimensional ($d > 0$) $\Leftrightarrow n - \operatorname{rango}(A) = d$.

Demostración. Veamos ahora solamente la demostración del punto *i)*. La demostración de los puntos *ii)* y *iii)* se consigue fácilmente recurriendo a los argumentos que emplearemos más tarde en la **Propiedad 17**.

Si consideremos las m-uplas columna de A, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tenemos que $A = (v_1|v_2|\cdots|v_n)$ y el sistema se puede escribir en la forma

$$(v_1|v_2|\cdots|v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B.$$

Teniendo en cuenta las representaciones vistas en el Capítulo 4 (página **??**) para el producto de una matriz de uplas columna por una columna, podemos escribir esta última igualdad en la forma

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = B.$$

En tal caso, el sistema tendrá solución si existen los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que, sustituidos en esta expresión, la hacen cierta. Pero si se verifica la última igualdad entonces B se puede obtener como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. En resumidas cuentas,

$$\text{El sistema tiene solución} \Leftrightarrow B \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle \Leftrightarrow \operatorname{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_n) = \operatorname{rango}(v_1|v_2|\cdots|v_n|B)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|B),$$

donde la última implicación es consecuencia de la **Propiedad 69** del Capítulo 4. □

En un sistema de solución d-dimensional, $d > 0$, el conjunto de soluciones depende de ciertos parámetros que pueden tomar cualquier valor y por ello el sistema tendrá infinitas soluciones. Un sistema compatible siempre es determinado con una única solución o indeterminado y por tanto de solución d-dimensional, $d > 0$, con infinitas soluciones. En consecuencia, un sistema tiene o bien ninguna solución (sistema incompatible) o bien una única solución (determinado) o bien infinitas soluciones (indeterminado)

Ejemplos 8.

1) El sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z + w = 3 \\ y - z + w = 2 \\ 2x + z + w = -1 \\ 2x + 3y + z + 2w = 4 \end{array}\right.$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 4, \quad \text{rango}(A|B) = 4.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 4 = \text{n. variables}$$

y el sistema es compatible determinado.

2) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = -3 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 2.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2 < \text{n. variables}$$

y el sistema es compatible indeterminado de solución

$$n - \text{rango}(A) = 4 - 2 = 2\text{-dimensional}.$$

3) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = 7 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 3.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|B)$$

y el sistema es incompatible.

5.2 Método de eliminación gaussiana

En esta sección estudiamos una primera técnica para encontrar la solución de un sistema lineal. Este método se basa en la utilización de operaciones elementales adecuadas para simplificar progresivamente el sistema inicial hasta transformarlo en otro cuya solución se puede calcular de forma inmediata. Dichas operaciones elementales las aplicaremos sobre la matriz detallada del sistema que recoge en una sola matriz por bloques a la matriz ampliada y a la columna de variables. En la siguiente definición se describe de forma precisa lo que entendemos por matriz detallada de un sistema.

Definición 9. *Dado el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

llamamos matriz detallada del sistema a la matriz

$$\begin{array}{c} \\ \textit{filas} \\ \textit{numéricas} \end{array}\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & | & 0 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}\right. .$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textit{columnas de variables}}$$

Filas numéricas de la matriz detallada son todas sus filas exceptuando la primera y columnas de variables de la matriz detallada son aquellas columnas cuyo primer elemento es alguna de las variables x_i.

Ejemplos 10.

1) La matriz detallada del sistema lineal $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{array}\right.$ es $\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

2) A la matriz detallada $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ le corresponde el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{array}\right. .$$

Si modificamos la matriz detallada también estaremos modificando el sistema que le corresponde. Así por ejemplo si aplicamos diversas modificaciones, los sistemas obtenidos son:

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F2}\leftrightarrow\text{ F3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) .$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{array}\right.$$

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{C1}\leftrightarrow\text{ C2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} y & x & z & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) .$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ 2y - x + 3z = 2 \end{cases}$$

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2F2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) .$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = -2 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$* \quad \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{F3=F3+F2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right) .$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 4y + 4z = 1 \end{cases}$$

Al aplicar diferentes transformaciones hemos obtenido también diferentes sistemas lineales pero es fácil, no obstante, comprobar que todos estos sistemas tienen las mismas soluciones y son por tanto equivalentes al sistema lineal inicial. Vemos así que existen ciertas transformaciones de la matriz detallada que no alteran el sistema que esta matriz representa o que lo transforman en otro equivalente.

A estas transformaciones de la matriz detallada que dan lugar a sistemas equivalentes con las mismas soluciones, las llamaremos 'operaciones elementales para la matriz detallada'. Nosotros consideraremos las que aparecen en la siguiente definición. Como ya hemos dicho, el objetivo será transformar el sistema inicial en otro cuya matriz detallada sea más sencilla.

Definición 11. *Llamamos operación elemental para la matriz detallada de un sistema a cualquiera de las siguientes acciones:*

1. *Modificar el orden de las filas numéricas.*
2. *Modificar el orden de las columnas de variables.*
3. *Multiplicar una fila numérica por un número no nulo.*
4. *Sumar a una fila numérica otra fila numérica multiplicada por un número.*

Como ya hemos visto, la matriz detallada de un sistema está dividida en dos bloques, uno para las columnas de variables y otro para la columna de términos independientes. Para resolver un sistema interesa obtener el mayor número posible de ceros en el bloque correspondiente a las columnas de variables del sistema y para ello aplicaremos el método de eliminación gaussiana. Ahora las reglas son similares a las que ya indicamos en el tema anterior para el cálculo de la matriz inversa. Deberemos, entonces, seguir de forma iterativa los siguientes pasos:

1. Seleccionamos una de las columnas de variables.
2. En la columna seleccionada elegimos un elemento (pivote), no nulo, que deberá estar a altura distinta de los seleccionados en pasos anteriores.
3. Utilizando el pivote anulamos los elementos de la columna seleccionada.

En el procedimiento que seguiremos, en principio, no es necesario modificar el orden de las columnas de variables o de las filas numéricas.

Terminamos de aplicar estos tres pasos una vez que hemos reducido todas las columnas de variables o que no queden pivotes no nulos a alturas distintas de los ya realizados. Entonces decimos que el sistema está en forma *escalonada reducida*. Un sistema en forma escalonada reducida se resuelve de forma inmediata teniendo en cuenta los siguientes puntos:

- Si tras reducir la matriz mediante operaciones elementales aparece una fila con todos sus elementos nulos en las columnas de variables y el elemento en el término independiente no nulo, entonces el sistema será incompatible.

Ejemplo 12. En la siguiente matriz detallada,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array},$$

aparece una fila completa de ceros acompañada en los términos independientes por un elemento no nulo. Si escribimos la ecuación correspondiente a esta file tendríamos

$$0x + 0y + 0z + 0w = 2$$

y es evidente que no existe solución válida para esta ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.

- Despejaremos las variables correspondientes a las columnas que hemos reducido.
- Tomaremos como parámetro las variables correspondientes a las columnas que no han sido reducidas.

Ejemplo 13. En la siguiente matriz,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} \mathrm{x} & y & \mathrm{z} & w & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{\underline{1}} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \overline{\underline{2}} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array},$$

después de reducir dos columnas no podemos elegir más pivotes no nulos a altura diferente de los ya marcados. Por tanto no aplicaremos más operaciones elementales y la matriz está ya en forma escalonada reducida. Las columnas que hemos reducido corresponden a las variables x y z y por estas serán las que despejaremos, las otras dos variables y, w, serán las que tomaremos cómo parámetro. Para resolver, simplemente reescribimos (por supuesto, no es necesario escribir la tercera ecuación ya que es, toda ella, nula) el sistema y despejamos del modo indicado:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + w = -1, \\ -y + 2z + 3w = 2, \\ y = \alpha, \\ w = \beta \end{array}\right. \quad \overset{\Rightarrow}{\begin{array}{l}\text{Sustituyendo}\\ \text{parámetros}\\ \text{y despejando}\end{array}} \left\{\begin{array}{l} x = -1 - \alpha - \beta, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ y = \alpha, \\ w = \beta. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 - \alpha - \beta, \\ y = \alpha, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ w = \beta. \end{array}\right.$$

Veamos algunos ejemplos en los que reproducimos esta técnica de resolución de sistemas.

Ejemplos 14.
1) Resolvamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{array}\right. .$$

La matriz detallada del sistema es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} .$$

Obtengamos la matriz escalonada reducida. Para ello, iremos tomando distintos pivotes, todos ellos a diferentes alturas, para ir anulando cada columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{F3 = F3 - 5F2} \\ \text{F4 = F4 - 3F2} \\ \text{F5 = F5 - 2F2} \\ \text{F6 = F6 - 3F2}}]{\text{(pivote=2}^{\text{o}}\text{ elemento de la 1}^{\text{a}}\text{ columna)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{\mathbf{1}} & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & -6 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - F6} \\ \text{F3 = F3 + 2F6} \\ \text{F4 = F4 + F6} \\ \text{F5 = F5 - 2F6}}]{\text{(pivote=6}^{\text{o}}\text{ elemento de la 2}^{\text{a}}\text{ columna)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{\mathbf{1}} & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 15 & -16 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & \underline{\mathbf{1}} & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 + }\frac{6}{9}\text{ F4} \\ \text{F3 = F3 - }\frac{15}{9}\text{ F4} \\ \text{F5 = F5 + }\frac{6}{9}\text{F4} \\ \text{F6 = F6 - }\frac{4}{9}\text{F4}}]{\text{(pivote=4}^{\text{o}}\text{ elemento de la 3}^{\text{a}}\text{ columna)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{9}} & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \underline{\mathbf{1}} & 0 & -1 & -\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 + F3} \\ \text{F4 = F4 - 9F3} \\ \text{F5 = F5 + F3} \\ \text{F6 = F6 - F3}}]{\text{(pivote=3}^{\text{o}}\text{ elemento de la 4}^{\text{a}}\text{ columna)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mathbf{-1}} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{9}} & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{1}} & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \end{array}$$

Puede observarse que ya no es posible elegir ningún pivote no nulo a altura diferente de los anteriormente seleccionados. Ello indica que tenemos ya la forma escalonada reducida. La simple observación de ella nos permite afirmar que se trata de un sistema compatible indeterminado con solución 1-dimensional que necesita un único parámetro para ser resuelto. Las variables correspondiente a las columnas que hemos reducido son x_1, x_2, x_3, x_4 y estas serán las que despejaremos y por tanto hemos de tomar la variable x_5 como parámetro para obtener la solución. La ventaja de la forma escalonada reducida reside en que, una vez que llegamos a ella, calcular las soluciones no precisa de más operaciones. En efecto, si escribimos el sistema correspondiente a la matriz escalonada reducida y tomamos como parámetro la variable x_5 tenemos,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -x_4 - \frac{2}{3}x_5 = -\frac{1}{3} \\ 9x_3 + x_5 = -13 \\ 0 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{9}x_5 = -\frac{5}{9} \\ x_5 = \alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ x_3 = -\frac{13}{9} - \frac{\alpha}{9} \\ x_2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{array}\right. .$$

De donde deducimos directamente que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha \\ x_3 = -\frac{13}{9} - \frac{1}{9}\alpha \\ x_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases} \qquad \text{o bien en la forma} \quad (0, -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha, -\frac{13}{9} - \frac{1}{9}\alpha, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha, \alpha)$$

en función del parámetro α.

2) Estudiemos ahora el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Para ello intentaremos llegar a su matriz escalonada. Para ello vamos seleccionando pivotes y anulando las columnas correspondientes.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - 2F4} \\ \text{F6 = F6 + F4}}]{\text{(pivote=4º elemento de la 4ª columna)}} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \underline{\mathbf{1}} & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{F2 = F2 - 3F5} \\ \text{F3 = F3 -4F5} \\ \text{F6 = F6 -F5}}]{\text{(pivote=5º elemento de la 3ª columna)}} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \hline -9 & -14 & 0 & 0 & -7 \\ -9 & -16 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & \underline{\mathbf{1}} & 1 \\ 3 & 3 & \underline{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En realidad podríamos seguir reduciendo columnas pero observamos que aparece una fila, la última, toda de ceros acompañando a un término independiente no nulo. Sin necesidad de llegar a la forma escalonada reducida deducimos que el sistema es incompatible indeterminado.

5.3 Regla de Cramer (Resolución de sistemas mediante cálculo de matriz inversa)

Dado un sistema cualquiera podemos siempre extraer su ecuación matricial que será de la forma

$$AX = B, \qquad A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Entonces, es posible aplicar las reglas para la manipulación de igualdades de matrices del Capítulo 4 para resolver el sistema. En realidad, bastaría con despejar X de esa ecuación matricial para llegar a la solución en la forma

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Esto último nos proporciona un método válido para resolver sistemas. Sin embargo, debemos tener en cuenta que despejar de esta manera es factible solamente cuando la matriz A es cuadrada (o lo que es lo mismo, el sistema tiene tantas ecuaciones como variables) y regular. Un sistema que satisface estas condiciones y que puede ser resuelto despejando la matriz de coeficientes se denomina 'sistema de Cramer'. Con más precisión tenemos:

Propiedad 15. *Consideremos el sistema con n ecuaciones y variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dado mediante su ecuación matricial*

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $|A| \neq 0$ el sistema es compatible y determinado y su solución es

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^t \cdot B. \tag{5.1}$$

La última expresión de (5.1) es lo que suele conocerse como regla de Cramer. Generalmente se presenta la regla de Cramer desarrollando el producto matricial que aparece indicado en la propiedad despejando cada variable de forma particular. Adquiere entonces la siguiente formulación:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Véase que en estas fórmulas, para el cálculo de la variables i-ésima, aparece, en el denominador, el determinante de la matriz de coeficientes y, en el numerador, el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima de la matriz de coeficientes por los términos independientes del sistema.

Ejemplo 16. Intentemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 9, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

empleando las ideas anteriores. En primer lugar debemos cerciorarnos de que el sistema es realmente un sistema de Cramer, es decir, que tiene igual número de ecuaciones que de variables, lo cual es evidente, y que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Comenzamos pues calculando el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = -9 \neq 0.$$

Puesto que el determinante es no nulo, el sistema efectivamente es de Cramer. Ahora podemos seguir dos caminos para resolver el sistema. En primer lugar, podríamos emplear el cálculo matricial tal y como aparece en la ecuación (5.1) y, en segundo lugar, sería posible recurrir a las ecuaciones de la regla de Cramer. Veamos cómo procederíamos en ambos casos.

Método 1: Mediante cálculo matricial. Escribimos el sistema mediante su expresión matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene determinante distinto de cero, podremos calcular su inversa y despejarla en la última desigualdad de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular la inversa de la matriz de coeficientes empleando cualquiera de los métodos que conocemos para ello. En este caso, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & -7 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos ahora la inversa por su valor y efectuamos los productos matriciales que aparecen para obtener el resultado final

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & -7 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{-20}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{-20}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ y = \frac{8}{9}, \\ z = \frac{-20}{9}. \end{cases}$$

Método 2: Mediante la regla de Cramer. Las fórmulas de Cramer para resolver este sistema serían las siguientes:

$$x = \frac{\left|\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 2 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}, \qquad y = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{9} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}, \qquad z = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathbf{9} \\ 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}.$$

Véase que, en el numerador, para la primera variable sustituimos la primera columna de la matriz de coeficientes por los términos independientes del sistema, para la segunda variable sustituimos la segunda columna y para la tercera variable la tercera columna. Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes ya lo hemos calculado, tendremos únicamente que resolver los tres determinantes que aparecen en el numerador. Tenemos que

$$\left|\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 2 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = -15, \qquad \left|\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{9} & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 2 \end{pmatrix}\right| = -8, \qquad \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathbf{9} \\ 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\right| = 20,$$

con lo que finalmente

$$x = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \qquad y = \frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}, \qquad z = \frac{20}{-9} = -\frac{20}{9}.$$

Tenemos entonces, dos vías alternativas para resolver un sistema de Cramer. En principio, para sistemas con dos, tres o cuatro ecuaciones, los dos métodos suponen una dificultad equivalente y ambos, el basado en operaciones matriciales y el que utiliza la regla de Cramer, pueden usarse indistintamente.

Cabría preguntarse si es posible modificar esta técnica de algún modo que permita su uso para cualquier tipo de sistemas y no solamente para sistemas de Cramer. La clave para responder a esta pregunta la encontramos en la definición alternativa de rango de una matriz que dimos en la **Propiedad 79**. Entonces vimos que el rango es el orden del mayor menor regular de una matriz. Si la matriz A no es regular o no es cuadrada no podremos obtener su inversa pero si tenemos que rango$(A) = r$ podremos encontrar dentro de A una submatriz que sí es regular. Si bien el sistema inicial puede no tener el mismo número de variables que de ecuaciones, una vez detectada dicha submatriz regular podremos modificar esta situación si tenemos en cuenta que:

⋆ En un sistema podemos eliminar aquellas ecuaciones que sean superfluas.

⋆ El número de ecuaciones se puede modificar tomando variables como parámetro.

En la siguiente propiedad desarrollamos de forma detallada la idea del párrafo anterior que permitirá extender el método de Cramer a cualquier sistema.

Propiedad 17. *Consideremos el sistema con m ecuaciones y variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dado mediante su ecuación matricial*

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el sistema es compatible, en cuyo caso

$$\text{rango}(A \mid B) = \text{rango}(A) = r.$$

Consideremos el menor $\tilde{A}_{r\times r}$ de A obtenido como intersección de las filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_r$ de A y supongamos que $|\tilde{A}| \neq 0$. Entonces:

i) El sistema compuesto únicamente por las ecuaciones i_1-ésima, i_2-ésima, …, i_r-ésima del sistema inicial tiene las mismas soluciones que éste.

ii) El sistema obtenido al tomar como parámetro toda variable que no sea alguna de $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ es determinado.

Dicho de otra manera, una vez que hemos detectado dentro de la matriz de coeficientes, A, un menor regular de orden r, debemos eliminar todas las ecuaciones que no intervengan en el menor y tomar como parámetro todas las variables cuya columna no interviene en el menor.

Ejemplo 18. En principio, para resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 9 \\ 3x_1 + 7x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$$

no sería posible aplicar el método de Cramer. Sin embargo podemos recurrir a la **Propiedad 17** para transformar el sistema adecuadamente. En primer lugar, dado que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -18 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & -18 & -5 & -6 \end{array}\right) = 3$$

el sistema es compatible indeterminado de solución 1-dimensional. El rango de la matriz de coeficientes es igual a 3 y por ello existirá dentro de ella una submatriz de orden 3 regular. Si tomamos la submatriz correspondiente a las filas primera, segunda y cuarta y a las columnas primera, segunda y cuarta tenemos que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

y por tanto dicho menor es regular, tiene inversa. Marquemos en la matriz de coeficientes del sistema las filas y columnas correspondientes al menor seleccionado,

$$
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{ecuación } 1^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 2^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 4^{\text{a}} \\ \text{ecuación } 5^{\text{a}} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & \mathbf{2} & -5 & \mathbf{-1} \\
\mathbf{2} & \mathbf{3} & -7 & \mathbf{1} \\
1 & 1 & -2 & 2 \\
\mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{6} \\
3 & 7 & -18 & -5
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Eliminemos las ecuaciones que no intervienen en el menor y tomemos como parámetro las variables que tampoco lo hacen. Tras ello, el sistema queda de la forma

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\
2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9 \\
x_3 = \alpha
\end{array}
\right. .
$$

Puesto que, en función del parámetro α, ya conocemos el valor de x_3, resolveremos solamente el sistema

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\
2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9
\end{array}
\right. .
$$

Pero ahora tenemos igual número de ecuaciones y de variables y además la matriz de coeficientes es precisamente el menor seleccionado antes que es regular. Por tanto este sistema es de Cramer y puede ser resuelto despejando en la ecuación matricial que es

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix}.
$$

Despejando y calculando la inversa, finalmente tenemos

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 17 & -13 & 5 \\ -10 & 8 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 2 - \alpha \\ 3\alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

La solución del sistema será entonces,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 = 2 - \alpha, \\
x_2 = 3\alpha - 1, \\
x_3 = \alpha, \\
x_4 = 1
\end{array}
\right.
\qquad \text{ó lo que es lo mismo } (2 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha, 1).
$$

5.4 Expresión de la solución de un sistema mediante combinaciones lineales

Hemos visto que para expresar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales necesitamos introducir parámetros. La representación de la solución del sistema que obtenemos mediante ellos se denomina 'expresión paramétrica' de la solución del sistema. Sin embargo, en esta sección veremos que también podemos describir las soluciones de un sistema mediante combinaciones lineales. Para obtener esta representación mediante combinaciones lineales nosotros tomaremos como base la expresión paramétrica de la solución del sistema. A partir de su forma de upla, bastará con separar adecuadamente las uplas correspondientes a cada parámetro. Necesitaremos únicamente introducir la siguiente notación:

Definición 19. *Dado un subconjunto de uplas $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y una upla fija $p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de uplas que se obtiene si sumamos la upla fija, p, a todas las uplas de C, se denota $p + C$. Es decir:*

$$p + C = \{p + c : c \in C\}.$$

Ejemplo 20. Tomemos el siguiente conjunto de 2-uplas

$$C = \{(1,0), (2,3), (-1,4)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

y consideremos la upla fija $(2,-1) \in \mathbb{R}^2$. Entonces el conjunto $p + C$ es el que se obtiene si sumamos la upla $(2,-1)$ a todas las de C:

$$\begin{aligned} p + C &= (2,-1) + \{(1,0), (2,3), (-1,4)\} \\ &= \{(2,-1) + (1,0), (2,-1) + (2,3), (2,-1) + (-1,4)\} \\ &= \{(3,-1), (4,2), (1,3)\}. \end{aligned}$$

Veamos ya mediante algunos ejemplos cómo podemos obtener la expresión de la solución de un sistema mediante combinaciones lineales:

Ejemplos 21.
1) Consideremos el sistema lineal,

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \end{array} \right. .$$

En el apartado **3)** de **Ejemplos 3** (pag. 199) resolvimos este sistema tomando dos variables como parámetro de manera que se trata de un sistema de solución 2-dimensional. Empleando los parámetros α y β la solución se escribe en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \\ y = \frac{1-3\beta}{2}, \\ z = \alpha, \\ w = \beta \end{array} \right. \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta\right).$$

Estas dos últimas representaciones son lo que se denominan expresiones paramétricas de la solución del sistema. Para expresar las soluciones mediante combinaciones lineales emplearemos la forma de upla (la segunda) de la expresión paramétrica de la solución. Comenzaremos separando en cada componente los sumandos que corresponden a cada uno de los dos parámetros y los que no corresponden a ninguno de ellos y procederemos luego como se indica a continación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta\right) &= \Big(\underbrace{\frac{3}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } \frac{3}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: -\alpha \\ \text{Parte para } \beta: \ \frac{1}{2}\beta}} , \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } \frac{1}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: \ -\frac{3}{2}\beta}} , \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: \alpha \\ \text{Parte para } \beta: \ 0}} , \underbrace{\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: \ \beta}} \Big) \\ \left(\begin{array}{l} \text{Separamos en uplas dife-} \\ \text{rentes la parte que no} \\ \text{corresponde a ningún} \\ \text{parámetro y la que corres-} \\ \text{ponden a cada parámetro} \end{array}\right) &= \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)}_{\text{Parte sin parámetros}} + \underbrace{(-\alpha, 0, \alpha, 0)}_{\text{Parte para } \alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\beta, -\frac{3}{2}\beta, 0, 1\right)}_{\text{Parte para } \beta} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Sacamos factor común en}\\ \text{la upla de cada parámetro}\end{array}\right) \quad = \quad (\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)+\alpha(-1,0,1,0)+\beta(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)$$

En definitiva tenemos que

$$(\frac{3-2\alpha+\beta}{2},\frac{1-3\beta}{2},\alpha,\beta)=\underbrace{(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)}_{\text{Upla fija}}+\underbrace{\alpha(-1,0,1,0)+\beta(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)}_{\substack{\text{Combinación lineal de}\\ (-1,0,1,0)\text{ y }(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)}}$$

Observamos entonces que todas las soluciones del sistema se obtienen sumando la upla fija $(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)$ a una combinación lineal de las uplas $(-1,0,1,0)$ y $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)$. Ahora bien, el conjunto de soluciones del sistema lo obtenemos dando distintos valores a los parámetros α y β por lo que la solución del sistema podrá expresarse como

$$\{\underbrace{(\frac{3-2\alpha+\beta}{2},\frac{1-3\beta}{2},\alpha,\beta)}_{(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)\text{ más un elemento de }\langle(-1,0,1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)\rangle}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)+\langle(-1,0,1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)\rangle.$$

Esta última expresión,

$$(\frac{3}{2},\frac{1}{3},0,0)+\langle(-1,0,1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)\rangle,$$

es la representación del conjunto de soluciones del sistema mediante combinaciones lineales.

2) Calculemos la solución del siguiente sistema expresándola en su forma paramétrica y mediante combinaciones lineales,

$$H\equiv\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3+2x_4+x_5=0\\ 5x_1+3x_2-3x_3+4x_4+2x_5=0\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+x_4=0\\ 3x_1+4x_2-2x_3+x_4=0\end{array}\right. .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Ello podemos hacerlo mediante cualquiera de las técnicas del Capítulo 5 obteniéndose como resultado que el sistema es de solución 1-dimensional. En función del parámetro α, todas las soluciones del sistema se escriben como

$$(0,\frac{1}{9}\alpha,-\frac{1}{9}\alpha,-\frac{2}{3}\alpha,\alpha).$$

Esta sería la solución del sistema expresada en forma paramétrica. A partir de ella, separando las uplas correspondientes a cada parámetro (en este caso tenemos un único parámetro α) y a los términos sin parámetro, tenemos,

$$(0,\frac{1}{9}\alpha,-\frac{1}{9}\alpha,-\frac{2}{3}\alpha,\alpha)=(0,0,0,0,0)+\alpha(0,\frac{1}{9},-\frac{1}{9},-\frac{2}{3},1).$$

Por tanto, la expresión de la solución del sistema mediante combinaciones lineales es

$$(0,0,0,0,0)+\langle(0,\frac{1}{9},-\frac{1}{9},-\frac{2}{3},1)\rangle$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\langle(0,\frac{1}{9},-\frac{1}{9},-\frac{2}{3},1)\rangle.$$

Véase que cuando el sistema es homogéneo la upla fija que aparece en la representación mediante combinaciones lineales es la upla nula y podemos eliminarla fácilmente. Sin embargo, esto no sucede en el caso de los sistemas completos para los que la upla fija nunca será nula.

5.5 Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

En el ejemplo último de la sección anterior, conseguimos expresar el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo que nos aparecía como el conjunto de combinaciones lineales de un conjunto de vectores. En esta sección vamos a probar que esta propiedad es cierta para cualquier sistema lineal homogéneo y de ello se van a derivar importantes propiedades que vamos a aprovechar en capítulos posteriores (por ejemplo, en la diagonalización de matrices).

5.5.1 Definición y propiedades

Dado un sistema lineal homogéneo de ecuaciones con variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. .$$

podemos considerar su conjunto de soluciones. Es evidente que todas esas soluciones son elementos de $\mathbb{R}^n$ ya que el sistema tiene n variables. De este modo si, por ejemplo, llamamos H a dicho conjunto de soluciones, se tiene que H es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. El sistema anterior se puede escribir de manera equivalente en forma matricial,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así pues, tenemos también la siguiente representación matricial para H:

$$H \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los subconjuntos, H, obtenidos de esta forma como el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones constituyen lo que se denomina subespacios vectoriales. Veámoslo con más precisión en la siguiente definición.

Definición 22. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$.*

Llamamos subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ a cualquier subconjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$, formado por las soluciones de un sistema lineal homogéneo con variables $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Diremos entonces que dicho sistema constituye un conjunto de ecuaciones implícitas para el subespacio vectorial H y utilizaremos la notación

$$H \equiv \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

En la definición anterior podemos escribir las ecuaciones implícitas mediante su expresión matricial,

$$AX = 0,$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces abreviadamente tenemos que

$$H \equiv AX = 0.$$

Una solución de este sistema es cualquier elemento $p \in \mathbb{R}^n$ que, sustituido en la ecuación matricial, la verifique, es decir, que cumpla $Ap = 0$ y entonces H, que está formado por el conjunto de soluciones de dicho sistema, será con más precisión:

$$H = \{p \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } Ap = 0\}.$$

Un aspecto fundamental en la teoría de subespacios vectoriales reside en el hecho de que siempre pueden ser obtenidos como el conjunto de combinaciones lineales de ciertos vectores. En realidad, las bases para realizar esta afirmación ya han sido puestas en el tema dedicado a la resolución de sistemas.

Tomemos un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$,

$$H \equiv AX = 0, \qquad \text{donde } A \in \mathcal{M}_{m\times n}, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Los elementos de H son las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones implícitas, $AX = 0$ y por tanto para determinar esos elementos hemos de resolver este sistema. Para ello en primer lugar calcularemos el número de parámetros necesarios. Supongamos que el sistema es de solución d-dimensional y que por tanto necesita d parámetros, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, para ser resuelto. Aplicando cualquiera de los métodos vistos en el Capítulo 5 llegaremos a una solución general del sistema, escrita mediante los parámetros, que puesta en columna tiene la forma

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}\alpha_1 + v_{1,2}\alpha_2 + \cdots + v_{1,d}\alpha_d \\ v_{2,1}\alpha_1 + v_{2,2}\alpha_2 + \cdots + v_{2,d}\alpha_d \\ \vdots \\ v_{n,1}\alpha_1 + v_{n,2}\alpha_2 + \cdots + v_{n,d}\alpha_d \end{pmatrix},$$

donde $v_{i,j}$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d$ son ciertas constantes que aparecerán durante el proceso de resolución. Ahora bien, si empleamos las propiedades de la suma y del producto de uplas por un número tenemos

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}\alpha_1 + v_{1,2}\alpha_2 + \cdots + v_{1,d}\alpha_d \\ v_{2,1}\alpha_1 + v_{2,2}\alpha_2 + \cdots + v_{2,d}\alpha_d \\ \vdots \\ v_{n,1}\alpha_1 + v_{n,2}\alpha_2 + \cdots + v_{n,d}\alpha_d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_d \begin{pmatrix} v_{1,d} \\ v_{2,d} \\ \vdots \\ v_{n,d} \end{pmatrix}.$$

Si llamamos

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix}, \ldots \quad v_d = \begin{pmatrix} v_{1,d} \\ v_{2,d} \\ \vdots \\ v_{n,d} \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}\alpha_1 + v_{1,2}\alpha_2 + \cdots + v_{1,d}\alpha_d \\ v_{2,1}\alpha_1 + v_{2,2}\alpha_2 + \cdots + v_{2,d}\alpha_d \\ \vdots \\ v_{n,1}\alpha_1 + v_{n,2}\alpha_2 + \cdots + v_{n,d}\alpha_d \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d.$$

Es decir, todas las soluciones del sistema $AX = 0$ que se obtiene dando valores a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ en la igualdad anterior se escriben como una combinación lineal con coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d$. H es el conjunto de todas esas soluciones y por tanto

$$\begin{aligned} H &= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle. \end{aligned}$$

En definitiva, hemos demostrado la siguiente propiedad

Propiedad 23. *Para todo subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ existen $v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Decimos entonces que el subespacio vectorial H está generado por $v_1, v_2, \ldots, v_d$ o también que $v_1, v_2, \ldots, v_d$ son un sistema de generadores de H.

Además, los argumentos que hemos empleado antes nos proporcionan un método para calcular los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d$.

Ejemplos 24.
1) Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - 2w = 0 \end{array} \right.$$

e intentemos representarlo mediante el conjunto de combinaciones lineales de ciertas uplas. Para ello, en primer lugar resolvemos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de H. Utilizando cualquiera de las técnicas del Capítulo 5, podemos ver que se trata de un sistema de solución 2-dimensional. Mediante los parámetros α y β la solución podemos escribirla en la forma

$$(\frac{-2\alpha + \beta}{2}, \frac{-3\beta}{2}, \alpha, \beta).$$

Empleando las propiedades de la suma y producto de matrices, tenemos que

$$(\frac{-2\alpha + \beta}{2}, \frac{-3\beta}{2}, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 0, 1, 0) + \beta(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$$

y por tanto

$$H = \langle (-1, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1) \rangle.$$

2) Calculemos ahora un sistema de generadores para el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Ello podemos hacerlo mediante cualquiera de las técnicas del Capítulo 5 obteniéndose como resultado que el sistema es de solución 1-dimensional. En función del parámetro α, todas las soluciones del sistema se escriben como

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha).$$

Además,

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha) = \alpha(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Por tanto,

$$H = \langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle.$$

Es de resaltar la siguiente propiedad:

Propiedad 25. $\mathbb{R}^n$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$*. Además, se verifica que*

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle,$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *son las* n*-uplas coordenadas de* $\mathbb{R}^n$*,*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Demostración.
Podemos ver que $\mathbb{R}^n$ es justamente el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo con n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de ecuaciones

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_n = 0 \end{cases}$$

En efecto, dado que el anterior sistema lineal homogéneo se verifica para cualesquiera valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tenemos que el conjunto de soluciones H de dicho sistema viene dado por

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\},$$

para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, es decir, H es justamente $\mathbb{R}^n$.

Puesto que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \cdots \alpha_n(0, 0, 0, \ldots, 0, 1),$$

tenemos que

$$\mathbb{R}^n = \langle (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \rangle,$$

resultado que ya vimos en el apartado **ii)** de **Propiedad 72** en el Capítulo 4.

□

5.5.2 Bases y dimensión

Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse a partir del conjunto de combinaciones lineales de ciertos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ que lo generan en la forma

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Por supuesto, interesa que esa representación sea los más simple posible y que involucre cuantos menos vectores mejor. Sabemos que si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d$ son dependientes, podemos eliminar algunos de ellos y seguir generando el mismo conjunto de combinaciones lineales. Por contra, si son independientes, en $\langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle$ no podremos eliminar ningún vector sin perder combinaciones. En otras palabras, lo ideal sería tener una representación de H mediante un conjunto de vectores generadores que fueran independientes ya que ello garantizaría que dicha representación es la más sencilla posible. Ello motiva el concepto de base de un subespacio vectorial.

Definición 26. *Llamamos base del subespacio vectorial* $H \subseteq \mathbb{R}^n$ *a cualquier conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *tales que:*

- $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle$*. Es decir, son un sistema de generadores de* H*.*
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ *es independiente.*

El número de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d$ que forman parte de una base es un invariante del subespacio vectorial correspondiente y no depende de la técnica empleada para calcularlos. Es por eso que podemos dar la siguiente definición:

Definición 27. *Llamamos dimensión del subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$, y la notamos* $\dim(H)$*, al número de vectores que integra una cualquiera de sus bases.*

Ejemplo 28.

Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2z + 3w = 0 \\ y - 4z + 6w = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema, es sencillo ver que un sistema de generadores de H viene dado por

$$\{(2,4,1,0),(1,2,2,1)\}.$$

Es evidente que $(2,4,1,0)$ y $(1,2,2,1)$ son independientes. En consecuencia

$$\{(2,4,1,0),(1,2,2,1)\}$$

es una base de H y por tanto, al aparecer dos vectores en la base, tenemos que $\dim(H) = 2$.

Véase que:

- Dado el subespacio mediante unas ecuaciones implícitas, resolviendo el sistema mediante alguno de los métodos del Capítulo 5, el procedimiento que vimos en la página 218 nos proporciona siempre una base.
- El número de elementos de la base coincide con el número de parámetros resultante al resolver el sistema, es decir, si las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial H son un sistema de solución d-dimensional entonces $\dim(H) = d$.

Es fácil probar la siguiente propiedad que hace posible el cálculo de la dimensión de un subespacio sin la necesidad de calcular su base.

Propiedad 29. *Consideremos el subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por sus ecuaciones implícitas*

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. . \textit{ Entonces:}$$

$$\dim(H) = n - \text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 30.

Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2z + 3w = 0 \\ y - 4z + 6w = 0 \end{array} \right. ,$$

puesto que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} = 2,$$

tenemos que

$$\dim(H) = 4 - 2 = 2.$$

Nota. En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar, para $i = 1, \ldots, n$, los vectores coordenados (las n-uplas coordenadas)

$$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Es fácil comprobar que $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ ya que son independientes y $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$. A la base B_c la llamaremos base canónica de $\mathbb{R}^n$ y puesto que tiene n elementos concluimos que

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

La siguiente propiedad nos posibilita ahorrarnos algunos cálculos a la hora de encontrar una base de un subespacio, conocida la dimensión de éste:

Propiedad 31. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial con dimensión d. Entonces:*

1. *Cualquier conjunto de vectores de H con más de d elementos es siempre dependiente.*
2. *Ningún conjunto de vectores de H con menos de d elementos puede generar todo H.*
3. *Un conjunto de vectores con d elementos que sea independiente genera a todo H (y es por tanto una base de H).*
4. *Un sistema de generadores de H con d elementos es independiente (y por tanto una base de H).*

A la vista de la anterior propiedad y dado que, de acuerdo a lo que indicamos antes, la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n, rescatamos aquí como consecuencia algunos de los resultados que aparecían en la **Propiedad 72** en el Capítulo 4:

Propiedad 32.

1. *Cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con más de n elementos es siempre dependiente.*
2. *Ningún conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ con menos de n elementos puede generar todo $\mathbb{R}^n$.*
3. *Un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ que sea independiente genera a todo $\mathbb{R}^n$ (y es por tanto una base de $\mathbb{R}^n$).*
4. *Un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ con n elementos es independiente (y por tanto una base de $\mathbb{R}^n$).*

5.5.3 Coordenadas respecto a una base

Consideremos un subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ una base de H. En tal caso sabemos que

$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d\rangle.$$

Entonces, dado cualquier elemento de $q \in H$ tendremos que

$$q = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d$$

para ciertos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$. Podemos preguntarnos si q puede admitir dos representaciones diferentes de este tipo. Es decir, si será posible que

$$q = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_d v_d$$

para $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d \in \mathbb{R}$ diferentes de los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ anteriores. La cuestión es que de ser esto cierto llegamos a que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d = q = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_d v_d$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_d - \beta_d)v_d = 0$$

y, puesto que $v_1, v_2, \ldots, v_d$ son independientes, finalmente

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_d = \beta_d \end{cases}$$

Forzosamente las dos representaciones de q deben coincidir. En otras palabras, la representación de cualquier elemento de un subespacio vectorial respecto a una base dada es única. A los coeficientes que aparecen en esa representación (y que hemos visto que son únicos ya que una vez fijada la base sólo dependen de q) son a lo que llamamos coordenadas de q respecto a la base.

Definición 33. *Dado el subespacio vectorial H y la base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ de H, llamamos coordenadas de $v \in H$ respecto a la base B a los coeficientes ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ tales que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d.$$

Ejemplos 34.
1) Tomemos la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dado cualquier vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

y por tanto las coordenadas de v respecto a B_c son $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Es decir, las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica son él mismo.

2) Consideremos el subespacio vectorial H que tiene como base a

$$B = \{(2, 0, 1, 0), (-1, 1, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}.$$

Supongamos que sabemos que $(5, 2, -2, 2) \in H$ y que necesitamos calcular sus coordenadas respecto a B. Tenemos que las coordenadas serán los coeficientes (α, β, γ) tales que

$$(5, 2, -2, 2) = \alpha(2, 0, 1, 0) + \beta(-1, 1, 1, 1) + \gamma(0, 1, -1, 1).$$

Realizando las operaciones indicadas en esta igualdad,

$$(5, 2, -2, 2) = (2\alpha - \beta, \beta + \gamma, \alpha + \beta - \gamma, \beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = -2 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $\gamma = 3$. Por tanto las coordenadas de $(5, 2, -2, 2)$ son $(2, -1, 3)$.

En realidad, tal y como vemos en el ejemplo anterior, el cálculo de las coordenadas respecto a una base se reduce siempre a resolver un sistema lineal de ecuaciones.