Capítulo 5

Geometría en $\mathbb{R}^n$

En los temas 3 y 4 hemos visto lo que es un par o 2-upla de $\mathbb{R}^2$, una 3-upla de $\mathbb{R}^3$ y en general una n-upla de $\mathbb{R}^n$. En principio, tanto uplas como matrices son objetos matemáticos que permiten organizar y analizar los datos o información de los problemas que estemos estudiando. Además sabemos que las uplas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ admiten una representación geométrica en forma de puntos. Profundizaremos aquí en esta perspectiva geométrica de las uplas añadiendo una nueva representación como vector que permitirá interpretar geométricamente diversos conceptos ya introducidos en temas anteriores y que las convierten en la herramienta matemática básica para la manipulación de puntos, coordenadas, vectores, planos, rectas y otros muchos elementos indispensables tanto en esta como en otras materias.

No solamente estudiaremos el aspecto geométrico de los elementos de $\mathbb{R}^n$ de forma aislada sino que también analizaremos las propiedades de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que pueden definirse mediante una ecuación y que estamos acostumbrados a manejar de una u otra forma, hablamos aquí de rectas, planos, esferas y en general de las figuras geométricas habituales.

5.1 Puntos y vectores en $\mathbb{R}^n$. Interpretación geométrica

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ admiten principalmente dos representaciones geométricas. Una de ellas, como punto de una recta, plano o espacio que ya hemos estudiado en el Capítulo 3 y otra nueva que introducimos en este tema como vector o segmento orientado. En realidad, como ya sabemos, de forma efectiva, solamente es posible representar geométricamente los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y, de forma más limitada, $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, por extensión aplicaremos estas ideas geométricas de punto y vector a $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$ y en general a $\mathbb{R}^n$. Comencemos viendo las técnicas para la representación en forma de vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para pasar luego a estudiar la interpretación de diferentes técnicas y conceptos de capítulos anteriores en términos de vectores.

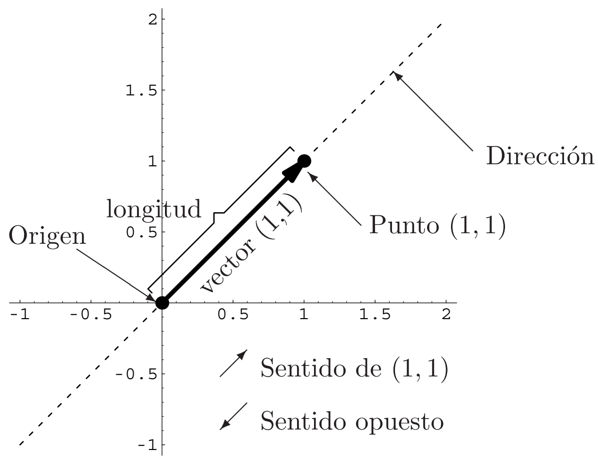
5.1.1 Vectores de $\mathbb{R}^n$

Un vector es un segmento orientado con una dirección, un sentido y una longitud concretas. Dicho de un modo más convencional, un vector es lo que en lenguaje habitual denominaríamos una flecha.

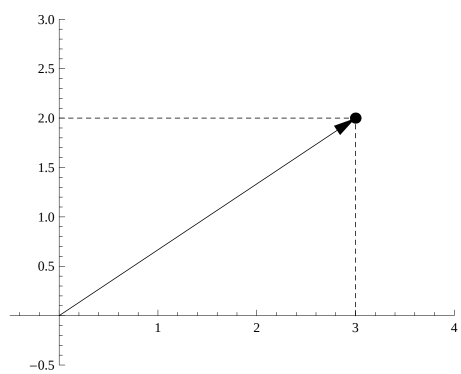
Un elemento de $\mathbb{R}^n$ se puede representar como punto tal y como hemos estudiado en la sección anterior. Pero además, puede también ser representado como un vector o flecha. El vector correspondiente a la upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ será aquel que parte del origen y llega hasta el punto de $\mathbb{R}^n$ determinado por él mismo.

Ejemplos 1.
1) En el siguiente gráfico mostramos todos los elementos (dirección, sentido, etc.) del vector $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$. Véase cómo para representarlo trazamos el vector que parte del origen y llega hasta el punto $(1,1)$. La

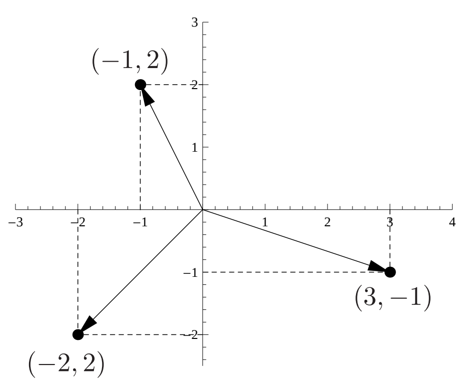
dirección correspondiente a $(1,1)$ es la marcada por la recta sobre la que se halla. Para cada dirección existen dos sentidos posibles y cada vector señala solo una de ellos.



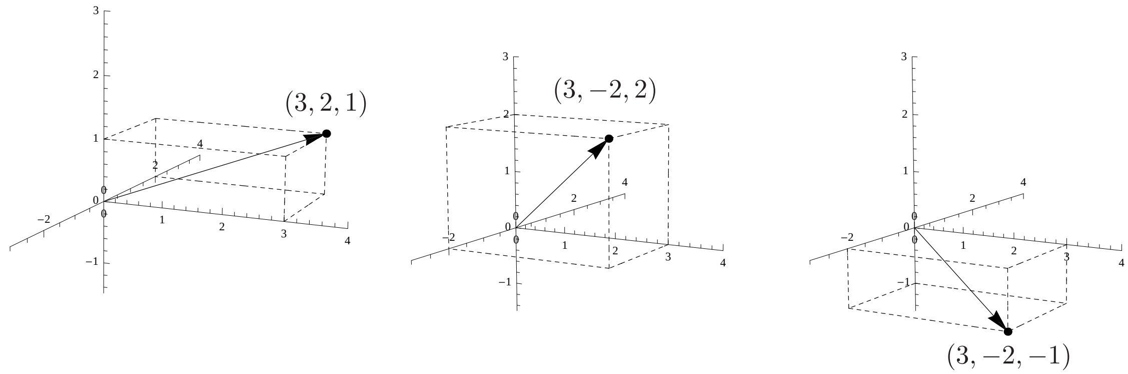
2) Del mismo modo, para representar el vector $(3,2)$, comenzamos marcando el punto $(3,2)$ para luego trazar el vector que parte del origen y llega hasta dicho punto. Obtenemos así la gráfica del vector $(3,2)$



e igualmente podemos hacer para los vectores $(-2,2)$, $(-1,2)$ y $(3,-1)$.



3) Igualmente, en $\mathbb{R}^3$, representamos las uplas $(3,2,1)$, $(3,-2,2)$ y $(3,-2,.1)$ en la forma

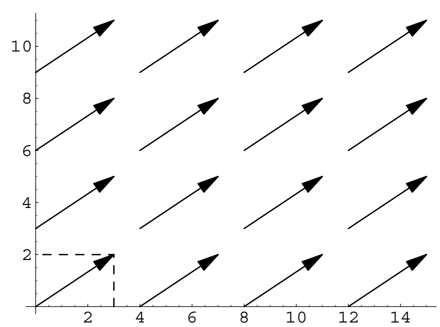


Aquí podemos hacer el mismo comentario que en el caso de las representaciones puntuales ya que aunque sabemos que las representaciones gráficas en $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ y, en general, en $\mathbb{R}^n$ no son posibles, podemos, de forma intuitiva, imaginar que también las uplas de $\mathbb{R}^n$ pueden representarse como vectores. De esta forma, denominaremos a las upla de $\mathbb{R}^n$ también vectores o puntos de $\mathbb{R}^n$.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ admiten, pues, esta doble interpretación como puntos y como vectores. En cada momento los observaremos desde el punto de vista que nos permita una mejor compresión de cada concepto o problema. De hecho, es más frecuente hablar de un punto de $\mathbb{R}^n$ o de un vector de $\mathbb{R}^n$ que de n-upla.

Hay que tener en cuenta un aspecto fundamental de la representación vectorial de una upla, la característica esencial de un punto es su posición en el plano o espacio que es fija y está determinada por las componentes de la upla correspondiente a ese punto. Sin embargo, las características básicas de un vector son su dirección, sentido y longitud y no su posición exacta dentro del espacio. Dicho de otro modo, podemos situar el mismo vector en distintos puntos del espacio.

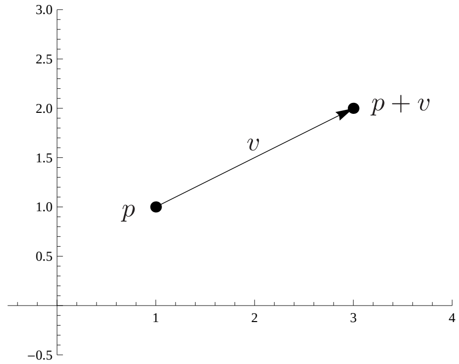
Por ejemplo, podemos situar el vector $(3, 2)$ de $\mathbb{R}^2$ en distintos puntos del plano y siempre será el mismo vector, con las mismas dirección, sentido y longitud. Así, en el siguiente gráfico representamos ese vector en diferentes posiciones y, no importa en qué punto lo apliquemos, siempre se trata del mismo vector $(3, 2)$.



5.1.2 Interpretación geométrica de diferentes conceptos

La representación vectorial es adecuada para adquirir imágenes intuitivas del significado de diversas operaciones con vectores, de la dependencia e independencia lineal, de combinación lineal, etc. Demos un repaso a todos estos términos a la luz de la nueva interpretación vectorial de los elementos de $\mathbb{R}^n$.

- **Suma de un punto y un vector. Translaciones:** Dado un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$, la suma del punto p y del vector v produce un nuevo punto que se obtiene al trasladar el punto inicial, p, según la dirección, sentido y longitud del vector v.



De hecho, se denomina a $p+v$ traslación de p con vector de traslación v.

Podemos realizar no solamente la traslación de un solo punto sino también de un conjunto de puntos. Así definimos:

Definición 2. *Dado un subconjunto de puntos $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y el vector $v \in \mathbb{R}^n$, llamamos traslación de C con vector de traslación v al conjunto $p+C$ definido en la forma*

$$p + C = \{p + c : c \in C\}.$$

Veamos un ejemplo de traslación.

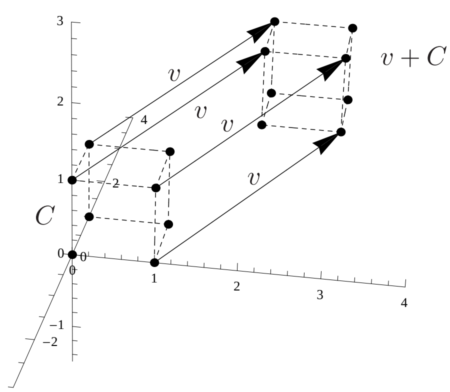
Ejemplo 3. Consideremos el conjunto de puntos del espacio formado por las esquinas de un cubo de lado 1 situado en el origen. Es decir,

$$C = \{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}.$$

La traslación de C con vector de traslación $v = (2,2,1)$ será

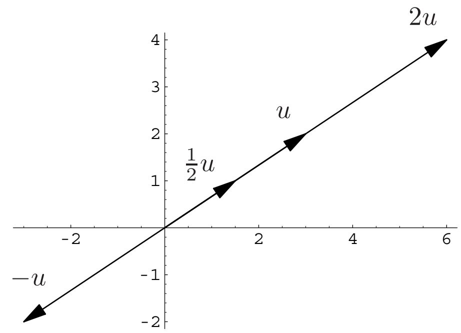
$$\begin{aligned} v + C = (2,2,1) + C = & \\ = & \ \{(2,2,1)+(0,0,0),(2,2,1)+(1,0,0),(2,2,1)+(1,1,0),(2,2,1)+(0,1,0), \\ & \ (2,2,1)+(0,0,1),(2,2,1)+(1,0,1),(2,2,1)+(1,1,1),(2,2,1)+(0,1,1)\} \\ = & \ \{(2,2,1),(3,2,1),(3,3,1),(2,3,1),(2,2,2),(3,2,2),(3,3,2),(2,3,2)\}. \end{aligned}$$

Gráficamente, se observa con claridad el significado de la traslación.



Véase que aplicamos el vector de traslación en cada esquina del cubo aunque en el gráfico trazamos el vector únicamente en algunos puntos para hacer menos confusa la imagen.

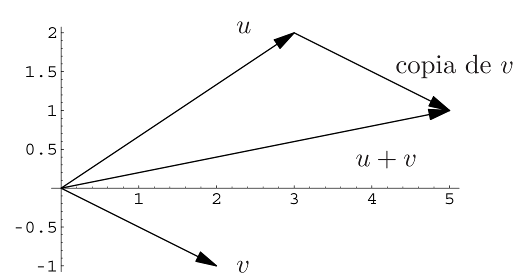
- **Producto de un número por un vector:** El producto del número $\lambda \in \mathbb{R}$ por el vector $u \in \mathbb{R}^n$, λu, es otro vector de $\mathbb{R}^n$ con la misma dirección de u, cuya longitud es λ veces la de u y cuyo sentido es el mismo que el de u si $\lambda > 0$ y el contrario si $\lambda < 0$.



Cuando multiplicamos un vector por un número real lo único que hacemos es cambiar su tamaño y sentido, cambiar su escala. Es por ello que los números reales, que utilizamos para cambiar la longitud o escala de un vector, reciben, en ocasiones, el nombre de escalares.

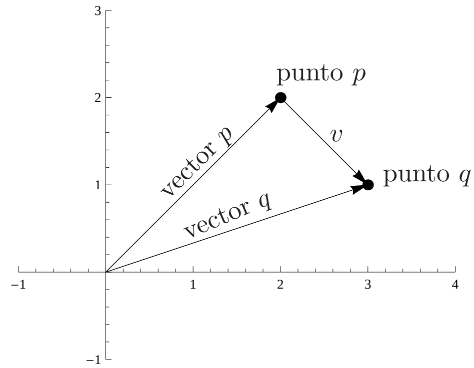
- **Suma de vectores:** La suma de los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ es otro vector de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene situando el vector v a continuación del vector u.

Ejemplo 4. La suma de los vectores $u = (3, 2)$ y $v = (2, -1)$ es $u + v = (5, 1)$. La representación gráfica de todos estos vectores es



Véase cómo situamos una copia del vector v a continuación del vector u. El vector que recorre el camino trazado por ambos directamente es $u + v$. Por otro lado puede comprobarse que los cálculos algebraicos se corresponden con las conclusiones obtenidas geométricamente.

- **Vector que une dos puntos:** Es evidente que dadas dos uplas $p, q \in \mathbb{R}^n$, en ese orden, sus representaciones como punto determinan un segmento orientado, el que va desde el punto p hasta el q. Dicho segmento orientado es un vector que corresponderá a un elemento de $\mathbb{R}^n$. Si llamamos v a dicho vector que va desde p hasta q y lo representamos junto con las gráficas de las uplas p y q como punto y como vector tenemos



Por tanto, vemos en el gráfico que si ponemos el vector v a continuación del vector p obtenemos el vector q y teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la suma de vectores tenemos que

$$\text{vector } p + v = \text{vector } q \Rightarrow p + v = q \Rightarrow v = q - p.$$

Por tanto, es evidente que

el vector que une p y q corresponde al elemento de $\mathbb{R}^n$, $q - p$.

Dicho de otro modo, podemos calcular el vector que une p y q restando al punto final q, el punto inicial, p. En algunos textos se denota el vector que una p y q como $\vec{pq}$ y por tanto lo que decimos es que

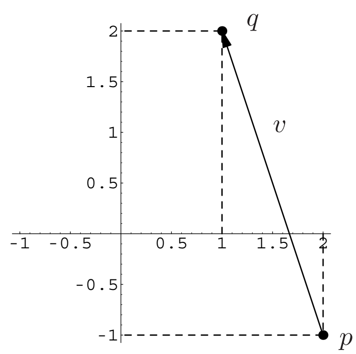
$$\vec{pq} = q - p.$$

Ejemplos 5.

1) Dados $p = (2, -1)$ y $q = (1, 2)$, el vector que une p y q corresponderá al elemento $v \in \mathbb{R}^2$ que se calcula como

$$v = q - p = (1, 2) - (2, -1) = (-1, 3).$$

Gráficamente tenemos



- **Combinaciones lineales:** Una vez que conocemos la interpretación de la suma de vectores y del producto por un número, es fácil calcular gráficamente la combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. Dados varios vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de $\mathbb{R}^n$ si tomamos una combinación lineal de ellos,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

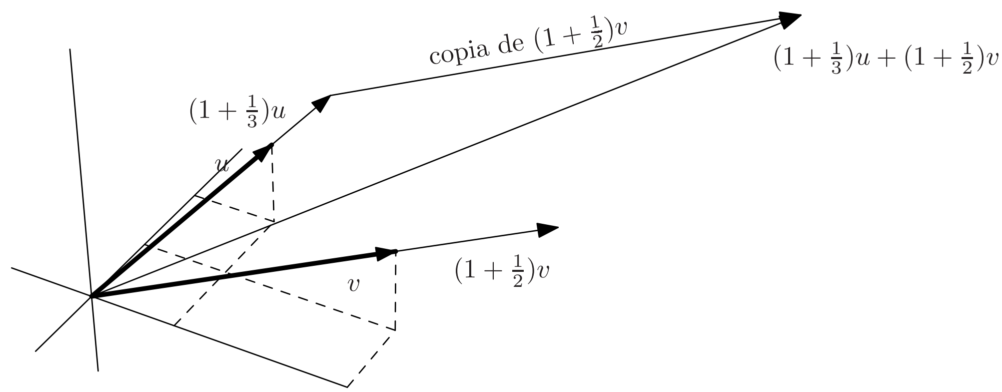
sabemos que cada producto $\alpha_i v_i$ consistirá en cambiar la longitud y sentido de cada vector v_i y que la suma consiste en poner unos vectores a continuación de otros. Gráficamente, una combinación de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ será cualquier vector que pueda ser obtenido poniendo una tras otra distintas prolongaciones de esos vectores.

Ejemplos 6.

1) Consideremos los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (3, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. El vector

$$(1 + \frac{1}{3})u + (1 + \frac{1}{2})v = \frac{4}{3}(1, 2, 1) + \frac{3}{2}(3, 1, 1) = (\frac{35}{6}, \frac{25}{6}, \frac{17}{6})$$

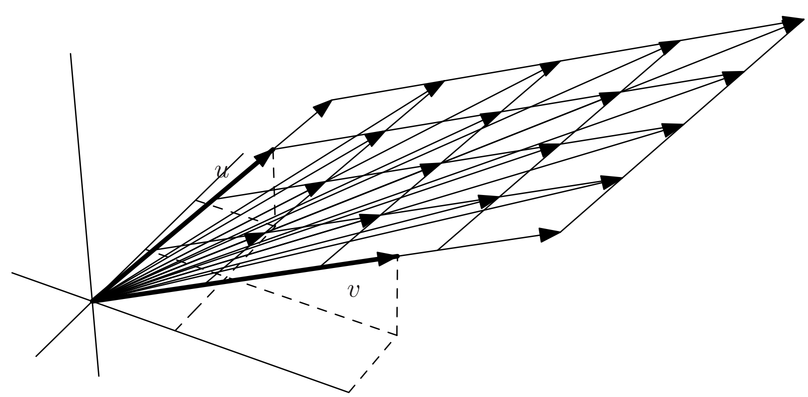
es una combinación lineal de u y v. Multiplicar u por $1 + \frac{1}{3}$ equivale a prolongar la longitud de u según ese factor (es decir, alargarlo un tercio). Igualmente el producto de $1+\frac{1}{2}$ por v supone la correspondiente prolongación de v (un medio más largo). La suma de ambos productos podemos obtenerla situando uno a continuación de otro. Gráficamente tenemos:



Podríamos tomar otras combinaciones lineales de u y v,

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v,$$

con coeficientes α_1 y α_2 diferentes de los que hemos tomados antes, $1 + \frac{1}{3}$ y $1 + \frac{1}{2}$. En cualquier caso, para todas esas nuevas combinaciones, la representación gráfica también se obtendrá a base de prolongar o acortar u y v y ponerlos uno a continuación del otro. Si representamos varias de estas otras combinaciones obtenemos la gráfica

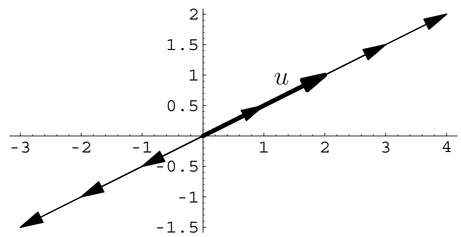


Todos los vectores representados son elementos del conjunto $\langle u, v\rangle$ de todas las combinaciones de u y v. La forma en que se obtiene la representación de estas combinaciones así como las gráficas que hemos obtenido mediante ellas nos indican que la representación gráfica del conjunto $\langle u, v\rangle$ es un plano que pasa por el origen y que sigue las direcciones marcadas por los vectores u y v.

2) Dado el vector $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$, sabemos que el producto por un número λu es una prolongación o contracción del vector inicial. El conjunto de las combinaciones lineales de u es

$$\langle u\rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(2, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si representamos varias de estas combinaciones obtenemos la gráfica,



Si consiguiéramos trazar todas las combinaciones de u podríamos comprobar que la representación del conjunto de combinaciones de u, $\langle u\rangle$, es la recta que pasa por el origen en la dirección de u. La gráfica anterior corrobora de forma intuitiva esta última afirmación.

En general tenemos que:

- Dado un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$, la representación gráfica del conjunto de sus combinaciones lineales, $\langle u\rangle$, es la recta que pasa por el origen en la dirección del vector u.
- Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ independientes, la representación gráfica de $\langle u, v\rangle$ es el plano que pasa por el origen en la dirección de los vectores u y v.
- Es posible generalizar diciendo que, dados $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ independientes, la representación gráfica de $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$ es un espacio m-dimensional que pasa por el origen en la dirección de esos vectores.

Hemos de entender de forma intuitiva las afirmaciones anteriores ya que si bien desde el punto de vista teórico no hay ningún problema en considerar espacios de dimensión superior a tres (más adelante, en este tema, estudiaremos lo que se entiende por espacio m dimensional) es claro que no es posible obtener representaciones gráficas para ellos. Por tanto, los tres puntos anteriores tienen sentido pleno en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y nos proporcionan una idea intuitiva para $\mathbb{R}^n$ en general.

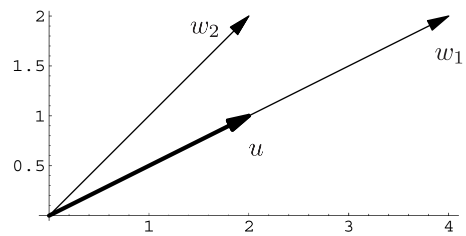
- **Dependencia e independencia:** Una vez que conocemos la representación gráfica del conjunto de combinaciones lineales de uno, dos o más vectores, es posible realizar razonamientos gráficos acerca de la dependencia e independencia de vectores. En concreto tenemos que:
  - Tres vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ son dependientes si y solamente si se encuentran dentro de un mismo plano que pasa por el origen.
  - Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son dependientes si y solamente si se encuentran dentro de la misma recta que pasa por el origen. Se dice entonces que son colineales.
  - En general $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1} \in \mathbb{R}^n$ son dependientes si se encuentran dentro de un mismo espacio m-dimensional que pasa por el origen.

Ejemplos 7.

1) Si tomamos el vector $u = (2, 1)$ del apartado **2)** de **Ejemplos 6** junto con los vectores

$$w_1 = (4, 2) \qquad \text{y} \qquad w_2 = (2, 2)$$

y los representamos gráficamente obtenemos

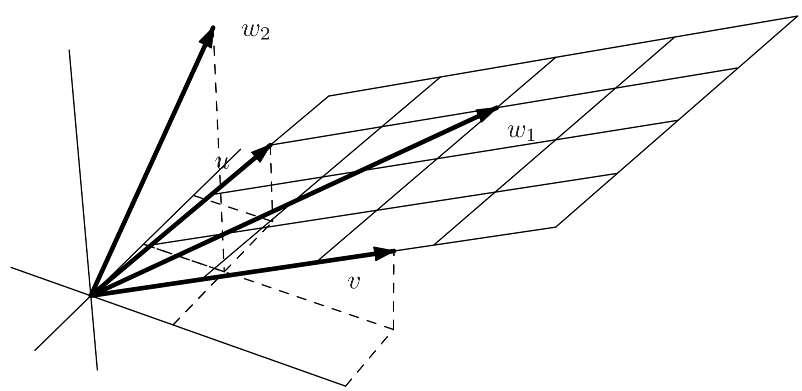


Es claro que w_1 pertenece a la recta que pasa por el origen en la dirección de u y por tanto $w_1 \in \langle u \rangle$ con lo que u y w_1 son linealmente dependientes entre sí. Por su parte, es evidente que w_2 no pertenece a dicha recta y entonces $w_2 \notin \langle u \rangle$ lo cual implica que u y w_2 son independientes.

2) Consideremos los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (3, 1, 1)$ del apartado **1)** de **Ejemplos 6**. Ambos son independientes ya que no se encuentran dentro de ninguna recta que pase por el origen. Tomemos ahora los vectores

$$w_1 = (\frac{13}{4}, \frac{11}{4}, \frac{7}{4}) \qquad \text{y} \qquad w_2 = (1, 1, 3).$$

Representémoslos gráficamente

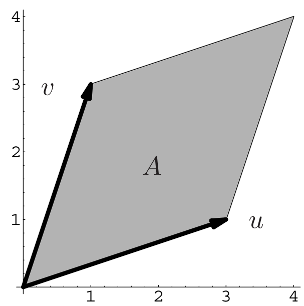


Vemos que el vector w_1 pertenece al plano que pasa por el origen en la dirección de u y v y por lo tanto $w_1 \in \langle u, v \rangle$. Por ello, u, v y w_1 son linealmente dependientes entre sí. Por contra, podemos constatar en la gráfica que w_2 no está en el plano que generan u y v ó, dicho de otro modo, $w_2 \notin \langle u, v \rangle$ con lo que u, v y w_2 son linealmente independientes entre sí.

- **Determinante de matrices de orden 2 y 3:** Cuando definimos el determinante en el Capítulo 4 dijimos que en cierto sentido medía el grado en que varios vectores son independientes. Esta idea queda apoyada tras examinar las propiedades del determinante respecto a la representación gráfica de vectores. En concreto tenemos que:
  - El determinante de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ es, salvo el signo, el área del paralelogramo que tiene por lados a esos dos vectores.

– El determinante de tres vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ es, salvo el signo, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a esos tres vectores.

Ejemplos 8. 1) Tomemos los vectores $u = (3, 1)$ y $v = (1, 3)$. La representación del paralelogramo que tiene por lados a u y v es



La figura sombreada es el mencionado paralelogramo y su área, A, se puede calcular realizando el determinante de la matriz formada por u y v:

$$A = \det(u|v) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 1 = 8.$$

Si los vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ fueran dependientes, se encontrarían sobre una misma recta que parte del origen y entonces es claro que el área del paralelogramo determinado por ellos sería nula. Si los vectores son independientes, ese área será distinta de cero pero a medida que tomemos vectores que se aproximen más a estar en la misma recta el área, y por tanto el determinante, será cada vez menor. En el caso tridimensional podemos razonar de forma similar ya que si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ están en el mismo plano que pasa por el origen, el paralelepípedo que determinan tendrá volumen nulo.

- **Longitud de un vector y distancia entre dos puntos:** Al inicio de esta sección hemos definido un vector como un segmento orientado con una longitud, dirección y sentido dados. En la siguiente propiedad veremos que es fácil calcular la longitud de un vector. Una vez que sepamos hacer esto también será posible calcular la distancia entre dos puntos p y q cualesquiera ya que es evidente que dicha distancia será igual que la longitud del vector que los une que sabemos que es $q - p$.

Propiedad 9.

i) Dado el vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, la longitud de dicho vector se denota como $\|u\|$ y se calcula mediante

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

ii) Dados los puntos $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, la distancia entre ambos se denota como $\mathbf{d}(p, q)$ y se calcula mediante

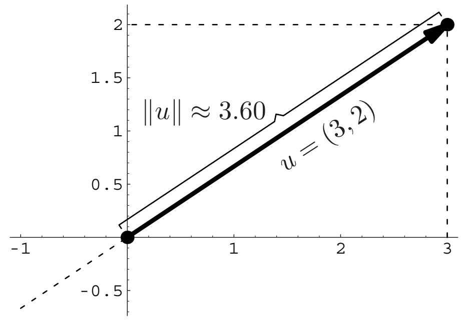
$$\mathbf{d}(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Ejemplos 10.

1) La longitud del vector $u = (3, 2)$ es

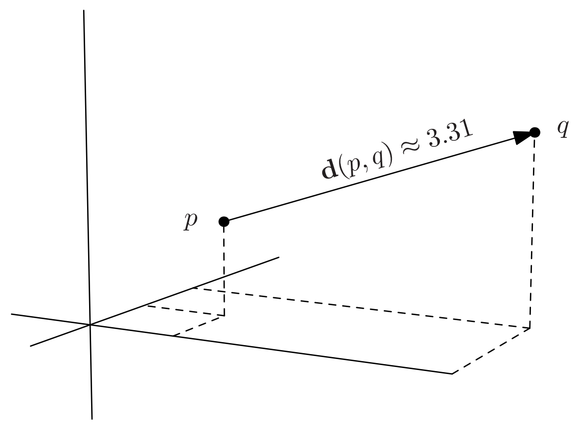
$$\|u\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3.60$$

$(3, 2)$



2) Dados los puntos $p = (1, 1, 1), q = (4, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ la distancia entre ellos es igual a

$$\mathbf{d}(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11} \approx 3.31$$



5.2 Lugares geométricos

Hasta ahora hemos considerado puntos aislados de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ó $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas los puntos y vectores aparecen asociados formando conjuntos destacados dentro de $\mathbb{R}^n$. Dichos conjuntos de puntos se denominan figuras o lugares geométricos.

Hay muchas técnicas para describir cómo es una figura geométrica concreta. Tres de las mas importantes son mediante:

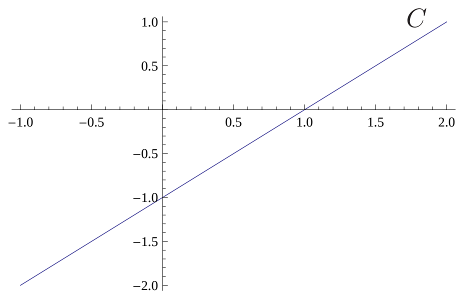
- **Propiedades geométricas:** Utilizamos una o varias propiedades geométricas para determinar qué puntos forman parte de la figura.
- **Ecuaciones paramétricas:** Los puntos $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que forman parte de la figura se obtienen dando valores a uno o varios parámetros.

- **Ecuaciones implícitas:** Un punto $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenecerá a la figura si satisface ciertas ecuaciones denominadas ecuaciones implícitas.

Todas ellas ofrecen mecanismos que permiten determinar cuáles son los puntos que forman parte de la figura en cuestión. Veamos algunos ejemplos para ilustrar estas técnicas.

Ejemplos 11.

1) Consideremos la figura geométrica, C de $\mathbb{R}^2$, que aparece en el siguiente gráfico,



Se trata evidentemente de una recta. Veamos cómo la describiríamos mediante las tres técnicas que hemos explicado.

$\star$ Mediante propiedades geométricas: Para describir la figura C basta indicar que

C es la recta que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

Es evidente que solamente hay una recta pasando por esos puntos y que esta recta debe ser C.

$\star$ Mediante ecuaciones paramétricas: La recta C viene dada por la siguientes ecuaciones paramétricas

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 1 - \alpha. \end{array} \right.$$

Dando valores al parámetro α podemos obtener los infinitos puntos que forman parte de la recta C. Así por ejemplo,

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 1 - 0. \end{array} \right. & \Rightarrow & \text{obtenemos el punto } (0,1) \\ \alpha = 1 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ y = 1 - 1. \end{array} \right. & \Rightarrow & \text{obtenemos el punto } (1,0) \\ \alpha = 2 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 1 - 2. \end{array} \right. & \Rightarrow & \text{obtenemos el punto } (2,-1) \end{array}$$

Y sucesivamente, dando valores a α podemos obtener cualquier punto de la figura.

$\star$ Mediante ecuaciones implícitas: Las ecuaciones implícitas para la recta C son:

$$C \equiv \{x + y = 1 \; .$$

Para comprobar si un punto está o no en la figura C será suficiente con sustituir x e y por los valores correspondientes a sus coordenadas y observar si se cumple o no la ecuación implícita. Por ejemplo:

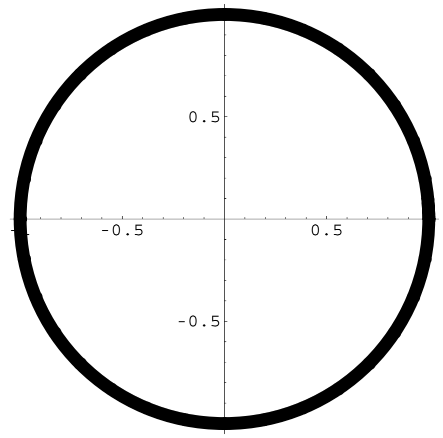
- $(3,2) \notin C$ ya que para $x = 3$ y $y = 2$ tenemos, $x + y = 3 + 2 \neq 1$ y no se cumple la ecuación,
- $(1,0) \in C$ ya que para $x = 1$ y $y = 0$ tenemos, $x + y = 1 + 0 = 1$ y se cumple la ecuación,
- $(0,1) \in C$ ya que para $x = 0$ y $y = 1$ tenemos, $x + y = 0 + 1 = 1$ y se cumple la ecuación.

2) En general, es siempre posible pasar de un tipo expresión a otra. Es decir, si tenemos una figura dada mediante una propiedad geométrica, podremos calcular también sus ecuaciones paramétricas e implícitas o, al revés, si disponemos de las ecuaciones implícitas podremos obtener entonces las paramétricas. Ilustremos esto último con el siguiente ejemplo. Veamos a continuación una figura geométrica definida mediante una propiedad geométrica y comprobemos cómo es posible deducir sus ecuaciones implícitas.

$\star$ Propiedad geométrica: Consideremos la figura geométrica, C, del plano determinada por la siguiente propiedad geométrica:

C está formada por los puntos del plano cuya distancia al origen es 1.

Dicho de otro modo, C es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Esta propiedad geométrica determina completamente los puntos que están en C cuya gráfica es



$\star$ Cálculo de unas ecuaciones implícitas: Pretendemos ahora obtener unas ecuaciones implícitas para C y para ellos debemos sacar partido a la información que proporciona la propiedad geométrica que define a C.

El origen en $\mathbb{R}^2$ es el punto $(0,0)$ y la distancia de un punto $p=(x,y)$ al punto $(0,0)$ se calcula en la forma

$$\mathbf{d}(p,(0,0)) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

De este modo, C está formada por los puntos $p=(x,y)$ tales que

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1.$$

Si elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado tendremos

$$x^2+y^2=1.$$

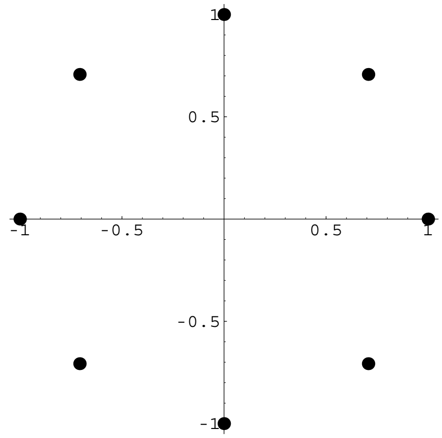
Es decir, aquellos puntos que cumplen esta ecuación están en C mientras que los que no la cumplen no forman parte de la figura. Por tanto dicha ecuación es una ecuación implícita para C, esto es,

$$C \equiv \{x^2+y^2=1.$$

Podemos ahora utilizar estas ecuaciones implícitas para determinar qué puntos pertenecen o no a C. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rlrl}
(1,0) \text{ cumple} & 1^2+0^2=1 & (0,1) \text{ cumple} & 0^2+1^2=1 \\
(-1,0) \text{ cumple} & (-1)^2+0^2=1 & (0,-1) \text{ cumple} & (-1)^2+0^2=1 \\
(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ cumple} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 & (-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ cumple} & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \\
(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ cumple} & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 & (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ cumple} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1
\end{array}$$

Por tanto, $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \in C$. Representemos estos puntos



En realidad sabemos que en C no solamente están esos puntos sino que podemos encontrar una infinidad más que forman la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

Aunque no nos detendremos a ver cómo se obtienen, unas ecuaciones implícitas para C son

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha), \\ y = \operatorname{sen}(\alpha). \end{cases}$$

Es fácil ver cómo tomando $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ o $\alpha = \frac{\pi}{2}$ podemos obtener algunos de los puntos que hemos comprobado antes utilizando las ecuaciones implícitas. Por supuesto, tomando valores adecuados para el parámetro α podemos obtener todos los puntos de C.

3) Podríamos haber considerados las figuras geométricas dadas por otras propiedades geométricas. Por ejemplo,

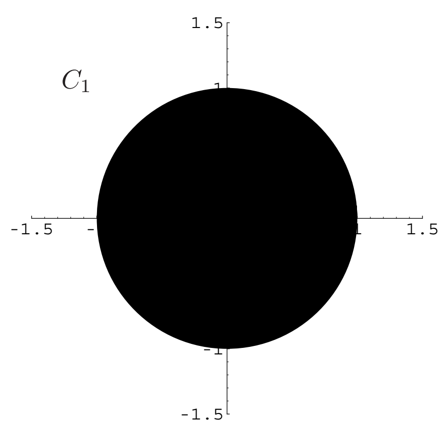
C_1: *formada por los puntos $q \in \mathbb{R}^2$ cuya su distancia al origen es menor que 1,*

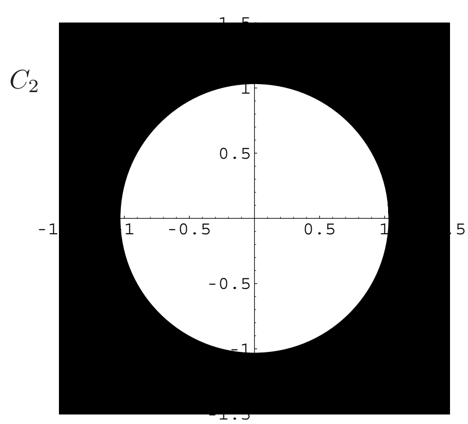
C_2: *formada por los puntos $q \in \mathbb{R}^2$ cuya distancia al origen es mayor que 1.*

Razonando como antes, es fácil obtener las ecuaciones implícitas para C_1 y C_2:

$$C_1 \equiv \{x^2 + y^2 < 1, \quad (5.1)$$
$$C_2 \equiv \{x^2 + y^2 > 1. \quad (5.2)$$

y las gráficas correspondientes son





Evidentemente C_1 son los puntos que están dentro de la circunferencia C, es decir, el disco de centro $(0,0)$ y radio 1, mientras que C_2 son los puntos que están fuera de dicha circunferencia.

4) Consideremos el lugar geométrico

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. . \tag{5.3}$$

Las ecuaciones implícitas de H son $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{array} \right.$ y en ellas aparecen tres variables así que debemos suponer que $H \subseteq \mathbb{R}^3$. Dicho de otro modo, el número de variables que aparecen en las ecuaciones implícitas determina si la figura en cuestión es del plano, $\mathbb{R}^2$, del espacio, $\mathbb{R}^3$, o en general de $\mathbb{R}^n$.

Vemos en estos ejemplos cómo una figura geométrica puede representarse utilizando diferentes técnicas. Observamos también cuál es la notación que se emplea para indicar las ecuaciones implícitas o paramétricas.

Cuando el lugar geométrico está definido por un conjunto de ecuaciones o desigualdades, de forma abreviada lo denotaremos escribiendo simplemente dichas ecuaciones o desigualdades. En el caso de las ecuaciones implícitas, utilizaremos el signo '$\equiv$' para evitar confusiones con el signo '$=$' de las ecuaciones.

En general, cuando trabajamos con ecuaciones paramétricas o implícitas, el espacio ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.) en el que se halla la figura geométrica, esta determinado por el número de variables que aparecen en las ecuaciones implícitas. Si en ellas aparecen n variables entenderemos que se trata de un lugar geométrico en $\mathbb{R}^n$.

Como vemos, una figura o lugar geométrico es un conjunto de puntos y para definirlo utilizamos una propiedad geométrica o unas ecuaciones implícitas. Si un punto p pertenece al lugar geométrico C (es decir, si $p \in C$), diremos que la figura C pasa por el punto p.

En secciones anteriores hemos visto cómo podemos trasladar un subconjunto de puntos o figura geométrica sumando un vector. Veremos en los siguientes ejemplos que esto mismo podemos hacerlo para lugares geométricos y que es posible calcular las ecuaciones implícitas de la nueva figura que obtenemos tras la traslación.

Ejemplos 12.

1) Consideremos el lugar geométrico determinado por

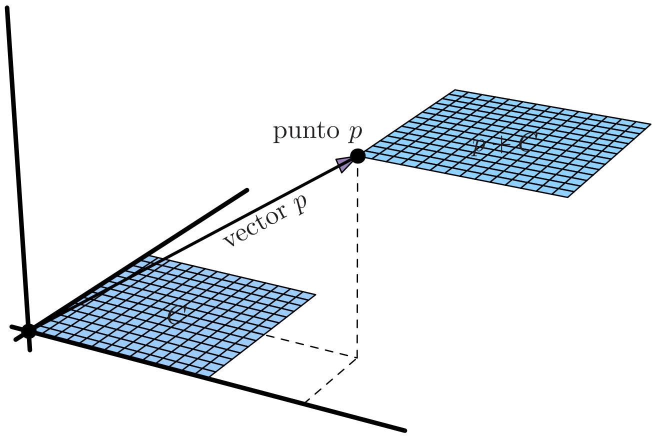
$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ z=0 \end{array} \right. .$$

La representación gráfica de C es un cuadrado situado a altura cero y cuyos lados tienen longitud 1 y se sitúan sobre los ejes x e y. Consideremos $p=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$. La traslación de C con vector de traslación p será

$$p+C=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)+C=\{\underbrace{(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)}_{=p}+(x,y,z):(x,y,z)\in C\}=\{\underbrace{(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)}_{=p}+(x,y,z):\left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ z=0 \end{array} \right. \}$$

$$\Rightarrow p+C=\{(x,y,z):\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \le x \le 1+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \le y \le 1+\frac{1}{2} \\ z=1 \end{array} \right. \}\equiv\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \le x \le 1+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \le y \le 1+\frac{1}{2} \\ z=1 \end{array} \right.$$

La representación gráfica de $p+C$ será un cuadrado idéntico a C pero trasladado según el vector de traslación p. También podemos ver $p+C$ como el mismo cuadrado C pero pasando por el punto p en lugar de por el origen:



2) Consideremos el lugar geométrico de $\mathbb{R}^2$ dado por las ecuaciones implícitas

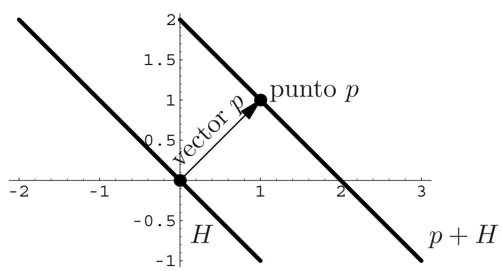
$$H \equiv \left\{ x+y=0 \right.$$

H es un lugar geométrico de $\mathbb{R}^2$. Más adelante veremos que su representación gráfica es la recta que pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(-1,1)$. Tomemos $p=(1,1)$ y calculemos la traslación de H con vector de traslación p,

$$p+H=\{p+(x,y):(x,y)\in H\}=\{(1,1)+(x,y):x+y=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y=2\}$$

$$\Rightarrow p+H \equiv \left\{ x+y=2. \right.$$

Entonces, $p+H$ es la recta que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(0,2)$ que se obtiene trasladando la recta H según el vector p o del mismo modo situando la recta H sobre el punto p:



5.3 Subespacios vectoriales y subespacios afines

En la sección anterior hemos estudiado lugares geométricos determinados por un conjunto de ecuaciones. Probablemente el caso más importante de este tipo de lugares geométricos está representado por los subespacios vectoriales y afines.

Dado un sistema lineal de ecuaciones con variables $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, podemos considerar el lugar geométrico que determinan sus ecuaciones,

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \right. .$$

Es evidente que H es el conjunto de todas las soluciones del sistema en cuestión y todas esas soluciones son elementos de $\mathbb{R}^n$ ya que el sistema tiene n variables. De este modo, H será un lugar geométrico de $\mathbb{R}^n$. El sistema anterior se puede escribir de manera equivalente en forma matricial,

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Así pues, tenemos también la siguiente representación matricial para H:

$$H \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Los lugares geométricos, H, obtenidos de esta forma como el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones constituyen lo que se denomina subespacios vectoriales o afines. Veámoslo con más precisión en la siguiente definición.

Definición 13. *Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

i) Llamamos subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ a cualquier lugar geométrico, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, determinado en la forma

$$S \equiv \left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

donde $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$ *es un sistema lineal compatible con variables $(x_1, \dots, x_n)$. Diremos entonces que dicho sistema constituye un conjunto de ecuaciones implícitas para el subespacio afín S.*

ii) Un subespacio afín, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, que admita como conjunto de ecuaciones implícitas a un sistema homogéneo se dice que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 14.

El subespacio afín

$$S \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 2x - 6y + z = 4 \end{array}\right.,$$

es el lugar geométrico de $\mathbb{R}^3$ (tenemos tres variables) formado por todas las soluciones del sistema que aparece en su definición. Ese mismo sistema constituye unas ecuaciones implícitas para S. Empleando la notación matricial, el mismo subespacio se escribe como

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ya vimos en el tema anterior que podemos modificar un sistema lineal de manera que las ecuaciones que lo integren sean diferentes pero manteniendo el mismo conjunto de soluciones. Una consecuencia directa de ello es el hecho de que un mismo subespacio afín puede tener diferentes conjuntos de ecuaciones implícitas.

Ejemplo 15. Es fácil comprobar que los sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z=1 \\ 3x-5y+6z=4 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z=2 \\ 6x-10y+12z=8 \end{array}\right.$$

tienen las mismas soluciones ya que el segundo de ellos se obtiene multiplicando por 2 las ecuaciones del primero. En tal caso el conjunto de soluciones de uno y otro sistema coinciden. Entonces, si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es el subespacio afín formado por las soluciones de esos sistemas, tenemos que

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} x+y-3z=1 \\ 3x-5y+6z=4 \end{array}\right. \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z=2 \\ 6x-10y+12z=8 \end{array}\right. \right\}$$

y por tanto

$$S \equiv \left\{\begin{array}{l} x+y-3z=1 \\ 3x-5y+6z=4 \end{array}\right. \quad \text{ó} \quad S \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z=2 \\ 6x-10y+12z=8 \end{array}\right.$$

y S tiene dos conjuntos diferentes de ecuaciones implícitas.

Veamos algunas propiedades inmediatas de los subespacios afines y vectoriales.

Propiedades 16. *Tomemos el conjunto $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *Cualquier conjunto formado por un solo punto de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.*
2. *El conjunto $\{0\} = \{(0,0,\ldots,0)\}$ formado únicamente por el vector 0 de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*
3. *$\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*
4. *Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in S,\ \alpha u + \beta v \in S.$$

5. *El vector 0 es siempre elemento de cualquier subespacio vectorial.*

5.3.1 Expresiones de un subespacio afín o vectorial

Igual que sucede con cualquier otra figura o lugar geométrico (véase la sección anterior), los subespacios afines pueden representarse utilizando tres técnicas básicas:

- **Mediante ecuaciones implícitas.** De hecho, hemos definido un subespacio afín como aquel cuyas ecuaciones implícitas son un sistema lineal de ecuaciones.
- **Mediante ecuaciones paramétricas.** Para obtener las ecuaciones paramétricas simplemente resolveremos el sistema y expresaremos su solución mediante parámetros ya sea en forma clásica o en forma de upla.
- **Mediante combinaciones lineales (propiedad geométrica).** Ya sabemos obtener la expresión mediante combinaciones a partir de la solución mediante parámetros de un sistema. Además sabemos también que un expresión mediante combinaciones corresponde a una figura geométrica u otra dependiendo de la dimensión del sistema, es decir, del número de parámetros o de vectores independientes que combinamos para expresar la solución del sistema. De este modo, la expresión mediante combinaciones nos permite conocer la representación gráfica del subespacio y es, en este sentido, equivalente a la definición mediante propiedades geométricas.

Tenemos el siguiente esquema para las diferentes representaciones de un subespacio afín o vectorial y para las técnicas que necesitamos para pasar de una a otra.

Ecuaciones implícitas
Sistema lineal en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

$\xrightarrow{\text{Resolviendo el sistema}}$

Ecuaciones paramétricas
Variables despejadas y expresadas mediante los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \tilde{a}_{1,1}\alpha_1 + \tilde{a}_{1,2}\alpha_2 + \cdots + \tilde{a}_{1,n}\alpha_d, \\ x_2 = \tilde{a}_{2,1}\alpha_1 + \tilde{a}_{2,2}\alpha_2 + \cdots + \tilde{a}_{2,n}\alpha_d, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \tilde{a}_{m,1}\alpha_1 + \tilde{a}_{m,2}\alpha_2 + \cdots + \tilde{a}_{m,n}\alpha_d, \end{array} \right.$$

Expresando mediante combinaciones

¿?
Lo veremos más adelante.

Expresión mediante combinaciones
Traslación del conjunto de combinaciones de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_d$

$$S = p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle$$

Una diferencia esencial entre el resto de las figuras geométricas y los subespacios vectoriales y afines reside en el hecho crucial de que estos últimos pueden expresarse mediante combinaciones además de mediante ecuaciones implícitas y ecuaciones paramétricas. La técnica para la obtención de la representación mediante combinaciones ya la conocemos del capítulo dedicado a sistemas lineales de ecuaciones. Entonces vimos que las soluciones de cualquier sistema linea pueden escribirse en la forma

$$p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Puesto que las ecuaciones implícitas de un subespacio afín son un sistema lineal y de un subespacio vectorial son un sistema lineal homogéneo tenemos que:

- Cualquier subespacio afín, S, puede escribirse mediante combinaciones en la forma
$$S = p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$
- Cualquier subespacio vectorial, H, puede escribirse mediante combinaciones en la forma
$$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d \rangle.$$

Aquí introduciremos una nueva manera de referirnos a las expresiones mediante combinaciones que es habitual cuando se trabaja con subespacios vectoriales y afines. Veámosla en la siguiente definición.

Definición 17.

i) Llamamos base del subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^n$ a cualquier conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:

- *$H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$. Es decir, son un sistema de generadores de H.*
- *$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es independiente.*

ii) Llamamos sistema de referencia de un subespacio afín $S \subseteq \mathbb{R}^n$ al par formado por un punto y un conjunto de vectores, $\{p, \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que:

- *$p \in S$.*
- *$S = p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$.*
- *$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es independiente.*

Entonces decimos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es la base de dicho sistema de referencia.

Ejemplos 18.

1) Consideremos el subespacio afín de $\mathbb{R}^4$,

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+w=2 \\ x-y+z-2w=1 \end{array} \right. ,$$

e intentemos representarlo mediante el conjunto de combinaciones lineales de ciertas uplas. Para ello, en primer lugar resolvemos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de S. Esto ya lo hicimos en el apartado **3)** de **Ejemplos 99** (pag. 211). Vimos entonces que se trataba de un sistema de solución 2-dimensional. Empleando los parámetros α y β la solución se escribe en la forma

$$(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta).$$

Empleando las propiedades de la suma y producto de matrices, tenemos que

$$(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0) + \alpha(-1,0,1,0) + \beta(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$$

y por tanto

$$S = (\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0) + \langle(-1,0,1,0) + (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)\rangle.$$

Para afirmar que esta expresión es un sistema de referencia deberíamos comprobar que los dos vectores $(-1,0,1,0)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$ que aparecen combinando son independientes. Esto es fácil y, por otro lado, si hemos resuelto correctamente el sistema siempre obtendremos vectores independientes en la expresión mediante combinaciones. Por tanto, esta última expresión mediante combinaciones constituye un sistema de referencia para S.

2) Calculemos ahora un sistema de generadores para el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3+2x_4+x_5=0 \\ 5x_1+3x_2-3x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+4x_2-2x_3+x_4=0 \end{array} \right. .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Ello podemos hacerlo mediante cualquiera de las técnicas del Capítulo **??** obteniéndose como resultado que el sistema es de solución 1-dimensional. En función del parámetro α, todas las soluciones del sistema es escriben como

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha).$$

Además,

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha) = \alpha(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Por tanto,

$$H = \langle(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1)\rangle.$$

Esto último es una base para H.

Obtención de las ecuaciones implícitas de un subespacio afín

En el esquema de la página 246 vemos como pasar de un tipo de expresión a otra para un subespacio afín. Pasamos de las ecuaciones implícitas a las paramétricas resolviendo el sistema correspondiente y expresando la solución paramétrica mediante combinaciones podemos obtener un sistema de referencia o base. Queda pendiente la última flecha del esquema, es decir, la obtención de las ecuaciones implícitas a partir de un sistema de referencia. Veremos aquí como ello es posible.

Supongamos que tenemos un subespacio afín, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, con sistema de referencia

$$S = p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Un punto $q = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ estará en ese subespacio afín cuando podemos encontrar los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ que permiten escribir q como combinación lineal en la forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d.$$

Si efectuamos las operaciones e igualamos obtenemos un sistema del cual podremos despejar esos coeficientes. Los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que estén en el subespacio afín serán aquellos para los que este sistema tenga solución. Por tanto, planteado el sistema, lo reduciremos aplicando el método de Gauss y estudiaremos qué condiciones han de cumplir $x_1, x_2, \ldots, x_n$; esas condiciones nos proporcionarán las ecuaciones implícitas.

Ejemplos 19.

1) Consideremos el subespacio afín dado mediante la expresión en combinaciones

$$S = (1,2,1) + \langle (1,0,1), (1,-1,0) \rangle.$$

S es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$, no es subespacio vectorial ya que el punto fijo de traslación no es nulo. Pretendemos determinar unas ecuaciones implícitas para S. Para ello daremos los siguientes pasos:

Paso 1: comprobar si la expresión en combinaciones es un sistema de referencia. Es decir, si los vectores que aparecen combinando son linealmente independientes. Tenemos que

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto son independientes y tenemos un sistema de referencia.

Paso 2: plantear el sistema y reducir por Gauss. Un punto (x,y,z) pertenecerá a S si podemos encontrar los coeficientes α y β tales que

$$(x,y,z) = (1,2,1) + \alpha(1,0,1) + \beta(1,-1,0).$$

Si efectuamos las operaciones e igualamos obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + 1 = x, \\ -\beta + 2 = y, \\ \alpha + 1 = z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = x - 1, \\ -\beta = y - 2, \\ \alpha = z - 1 \end{array} \right.$$

Planteamos la matriz correspondiente y aplicamos Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 0 & -1 & y-2 \\ 1 & 0 & z-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Seleccionando 2 columna,} \\ \text{2 elemento}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y-3 \\ 0 & -1 & y-2 \\ 1 & 0 & z-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Seleccionando 1 columna,} \\ 1^{\text{er}} \text{ elemento}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y-3 \\ 0 & -1 & y-2 \\ 0 & 0 & -x-y+z+2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: imponemos que el sistema sea compatible. Los puntos, (x,y,z) que están en S serán aquellos para los que el sistema anterior tiene solución, es compatible. Una vez que hemos reducido mediante el método de Gauss es fácil ver si el sistema es compatible o incompatible observando si existen en la matriz filas nulas acompañadas de términos independientes distintos de cero. Comprobamos que aquí la última fila es nula y su término independiente es $-x-y+z+2$ así que para que el sistema sea compatible este término independiente deberá ser igual a cero. Por tanto la condición para que el sistema sea compatible y para que, por tanto, (x,y,z) esté en S es

$$-x-y+z+2=0.$$

Estás son la ecuaciones implícitas de S y un punto pertenecerá a S solamente si las cumple. En consecuencia, podemos terminar escribiendo

$$S \equiv -x-y+z+2=0.$$

2) Determinemos ahora unas ecuaciones implícitas para el subespacio vectorial

$$H = \langle (1,1,0,1,1), (-1,1,1,0,1), (3,1,-1,2,1) \rangle.$$

Aplicaremos los mismos tres pasos que en el ejemplo anterior.

Paso 1: comprobar si la expresión en combinaciones es un sistema de referencia. Para ello, como siempre, aplicaremos operaciones elementales para calcular el rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Seleccionando, columna 1-elemento 1,} \\ \text{columna 2-elemento 3}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango de la matriz es 2 y además observamos (hemos hecho las columnas 1 y 2 y la tercera se anuló) que las uplas independientes son las dos primeras y podemos eliminar la tercera. Por ello, podemos simplificar la expresión en combinaciones inicial en la forma

$$H = \langle (1,1,0,1,1), (-1,1,1,0,1) \rangle.$$

Puesto que estas dos uplas son independientes, esta expresión proporciona una base de H.

Paso 2: plantear el sistema y reducir por Gauss. Un punto (x,y,z,w,t) pertenecerá a H si podemos encontrar los coeficientes α y β tales que

$$(x,y,z,w,t) = \alpha(1,1,0,1,1) + \beta(-1,1,1,0,1).$$

Realizando las operaciones obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x, \\ \alpha + \beta = y, \\ \beta = z, \\ \alpha = w, \\ \alpha + \beta = t \end{cases}$$

y aplicamos el método de Gauss a su matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & w \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Seleccionando 1 columna,} \\ 1^{\text{er}} \text{ elemento}}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & -x+y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & w-x \\ 0 & 2 & t-x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Seleccionando 2 columna,} \\ 3^{\text{er}} \text{ elemento}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+z \\ 0 & 0 & -x+y-2z \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & w-x-z \\ 0 & 0 & t-x-2z \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema tenga solución, los términos independientes correspondientes a las filas que se han anulado deben valer cero. Por tanto, igualando a cero dichos términos obtenemos las ecuaciones implícitas de H,

$$H \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 0, \\ w - x - z = 0, \\ t - x - 2z = 0. \end{array} \right.$$

5.3.2 Dimensión de un subespacio afín

Cuando un sistema tiene infinitas soluciones necesitamos parámetros para representarlas. El número de parámetros necesario determinaba lo que llamábamos solución del sistema. De este modo un sistema que precisa de k parámetros para ser resuelto lo denominábamos sistema de solución k-dimensional.

Un subespacio vectorial o afín es el conjunto de soluciones de un sistema y su dimensión será la que corresponda a ese sistema tal y como vemos en la siguiente definición.

Definición 20. *Dado un subespacio afín o vectorial*

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

diremos que S tiene dimensión d y lo escribiremos $dim(S) = d$ si el sistema que forman sus ecuaciones implícitas es de solución d-dimensional.

Véase que si un subespacio afín tiene dimensión d, entonces sus ecuaciones implícitas serán un sistema de solución d-dimensional y necesitaremos d parámetros para escribir la solución paramétrica y cuando obtengamos la expresión mediante combinaciones aparecerán d vectores de modo que en el sistema de referencia del subespacio tendremos d vectores combinando. Por tanto, la dimensión de un sistema, el número de parámetros necesarios en la expresión paramétrica y el número de vectores combinando en un sistema de referencia son, todos ellos, el mismo número.

Todas estas ideas aparecen reflejadas en la siguiente propiedad.

Propiedad 21. *Consideremos el subespacio afín $S \subseteq \mathbb{R}^n$:*

- *Si $S = p + \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ con $p, v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ no necesariamente independientes (y por tanto, dicha expresión en combinaciones lineales no es, en principio, un sistema de referencia). Entonces:*

$$\dim(S) = \operatorname{rango}(v_1|v_2|\dots|v_k).$$

- *Si $S = p + \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$ es un sistema de referencia de S entonces*

$$dim(S) = d,$$

es decir la dimensión es el número de vectores que aparecen combinando en el sistema de referencia.

- *Si* $S \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$ *entonces:*

$$\dim(S) = n - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hagamos algunas anotaciones sobre el concepto de dimensión:

- Si tenemos en cuenta la interpretación geométrica del conjunto de combinaciones lineales dada en la página 236, es claro que la dimensión determina la representación gráfica del subespacio ya que indica el número de vectores independientes que necesitamos combinar para obtenerlo. Así tenemos que:

  – Si $\dim(S) = 1$, entonces S es una recta.

  – Si $\dim(S) = 2$, entonces S es un plano.

  – Si $\dim(S) = 3$, entonces S es un espacio tridimensional

  Recuérdese que, en cualquier caso, un subespacio vectorial siempre contiene al vector 0 y por lo tanto la figura geométrica que representa pasa por el origen.

- El espacio vectorial nulo, $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, no tiene base ninguna ya que no puede ser generado por ningún conjunto de vectores. Sin embargo, se acepta que su dimensión es cero, es decir,

$$\dim(\{0\}) = 0.$$

  Lo mismo sucede en el caso de un subespacio afín $S = \{p\}$ formado por un solo punto. Admitiremos que

$$\dim(S) = 0.$$

- En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar, para $i = 1, \ldots, n$, los vectores coordenados (las n-uplas coordenadas)

$$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

  Es fácil comprobar que $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ ya que son independientes y $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$. A la base B_c la llamaremos base canónica de $\mathbb{R}^n$ y puesto que tiene n elementos concluimos que

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Algunas propiedades que son de utilidad son las siguientes:

Propiedad 22. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial con dimensión k. Entonces:*

1. *Cualquier conjunto de vectores de H con más de k elementos es siempre dependiente.*
2. *Ningún conjunto de vectores de H con menos de k elementos puede generar todo H.*
3. *Un conjunto de vectores con k elementos que sea independiente genera a todo H (y es por tanto una base de H).*
4. *Un sistema de generadores de H con k elementos es independiente (y por tanto una base de H).*

Ejemplos 23. **1)** Consideremos el subespacio afín dado por

$$S = (1, 2, 0, -1) + \langle (2, 4, 1, 0), (1, 2, 2, 1) \rangle.$$

Es evidente que $(1, 2, 0, -1) \in S$ y además $(2, 4, 1, 0)$ y $(1, 2, 2, 1)$ son independientes por lo tanto dicha expresión en combinaciones es un sistema de referencia de S. Puesto que en el sistema de referencia aparecen dos vectores combinando, tenemos que $\dim(S) = 2$.

2) En el problema anterior sobre las mezclas de piensos, aparece el subespacio vectorial

$$H = \langle (0.1, 0.6, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3), (0.3, 0.4, 0.3) \rangle.$$

Vimos que los tres vectores $\{(0.1, 0.6, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3), (0.3, 0.4, 0.3)\}$ son dependientes y por tanto no forman base. Sin embargo podemos eliminar el tercero de ellos sin que se modifique el conjunto de combinaciones lineales por lo que también tenemos

$$H = \langle (0.1, 0.6, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3) \rangle.$$

Estos dos vectores sí son independientes y además generan H por lo que son base. Como consecuencia de ello tenemos que $\dim(H) = 2$.

5.3.3 Coordenadas respecto a una base

Consideremos un subespacio afín $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\{p, \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\}$ un sistema de referencia de S. En tal caso sabemos que

$$S = p + \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Entonces, dado cualquier elemento de $q \in S$ tendremos que

$$q = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

para ciertos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Podemos preguntarnos si q puede admitir dos representaciones diferentes de este tipo. Es decir, si será posible que

$$q = p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$$

para $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ diferentes de los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ anteriores. La cuestión es que de ser esto cierto llegamos a que

$$p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = q = p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = q = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$$
$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k) v_k = 0$$

y, puesto que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son independientes, finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_k = \beta_k \end{array} \right.$$

Forzosamente las dos representaciones de q deben coincidir. En otras palabras, la representación de cualquier elemento de un subespacio afín respecto un sistema de referencia dado es única. A los coeficientes que aparecen en esa representación (y que hemos visto que son únicos ya que una vez fijado el sistema de referencia solo dependen de q) son a lo que llamamos coordenadas de q respecto al sistema.

Definición 24.

i) Dado el subespacio vectorial H y la base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de H, llamamos coordenadas de $v \in H$ respecto a la base B a los coeficientes ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

ii) Dado el subespacio afín S y el sistema de referencia $R = \{p, \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\}$ de S, llamamos coordenadas de $p \in H$ respecto a R a los coeficientes ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ tales que

$$q = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Ejemplos 25.

1) Tomemos la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B_c = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Dado cualquier vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

y por tanto las coordenadas de v respecto a B_c son $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Es decir, las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica son él mismo.

2) Consideremos el subespacio afín S que tiene como sistema de referencia a

$$R = \{(-1, 2, 1, 1) + \{(2, 0, 1, 0), (-1, 1, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}\}.$$

Supongamos que sabemos que $(4, 4, -1, 3) \in S$ y que necesitamos calcular sus coordenadas respecto a R. Tenemos que las coordenadas serán los coeficientes (α, β, γ) tales que

$$(4, 4, -1, 3) = (-1, 2, 1, 1) + \alpha(2, 0, 1, 0) + \beta(-1, 1, 1, 1) + \gamma(0, 1, -1, 1).$$

Realizando las operaciones indicada en esta igualdad,

$$(4, 4, -1, 3) = (-1 + 2\alpha - \beta, 2 + \beta + \gamma, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 + \beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 + 2\alpha - \beta = 4 \\ 2 + \beta + \gamma = 4 \\ 1 + \alpha + \beta - \gamma = -1 \\ 1 + \beta + \gamma = 3 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $\gamma = 3$. Por tanto las coordenadas de $(4, 4, -1, 3)$ son $(2, -1, 3)$.

En realidad, tal y como vemos en el ejemplo anterior, el cálculo de las coordenadas respecto a una base o un sistema de referencia se reduce siempre a resolver un sistema lineal de ecuaciones.

5.3.4 Representación de rectas y semiplanos en $\mathbb{R}^2$

Consideremos el subespacio afín

$$r \equiv \{ax + by = c,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, siendo alguno de ellos distinto de cero. Entonces tenemos que:

- Puesto que en las ecuaciones implícitas de r aparecen dos variables, $r \subseteq \mathbb{R}^2$ y es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ (es decir, del plano real).
- Puesto que hemos exigimos que a y b no sean ambos nulos es fácil comprobar que la matriz de coeficientes del sistema, $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, tiene rango igual a 1 y entonces el número de parámetros necesarios para resolver el sistema será

  $$2 - \text{rango} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

  Es decir, el sistema es de solución 1-dimensional y tenemos que $\dim(r) = 1$. Por ello, la representación de r es una recta.

Toda recta del plano es siempre un subespacio afín del tipo $r \equiv \{ax + by = c$ que acabamos de ver.

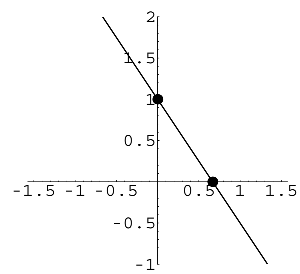
Puesto que por dos puntos fijados solamente puede pasar una recta, será suficiente con calcular dos de las soluciones del sistema, representar los puntos correspondientes en el plano y trazar la recta que pasa por estos dos puntos para obtener una representación de la recta r.

Ejemplos 26. 1) El espacio afín $r \equiv \{3x + 2y = 2$ se representa mediante una recta del plano real $\mathbb{R}^2$. Calculamos dos puntos de la recta r encontrando dos soluciones cualesquiera de las ecuaciones implícitas. Una forma sencilla para hacer esto consiste en tomar sucesivamente $x = 0$ e $y = 0$ y calcular las soluciones correspondientes. Así:

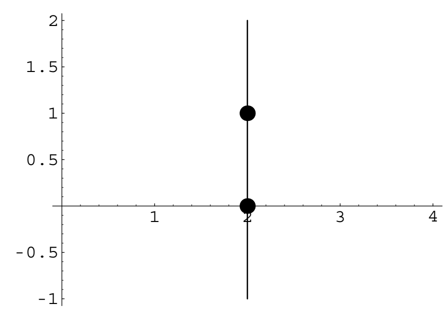
- Si $x = 0$ entonces $2y = 2 \Rightarrow y = 1$. Tenemos la solución $(0, 1)$.

- Si $y = 0$ entonces $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Tenemos una segunda solución $(\frac{2}{3}, 0)$.

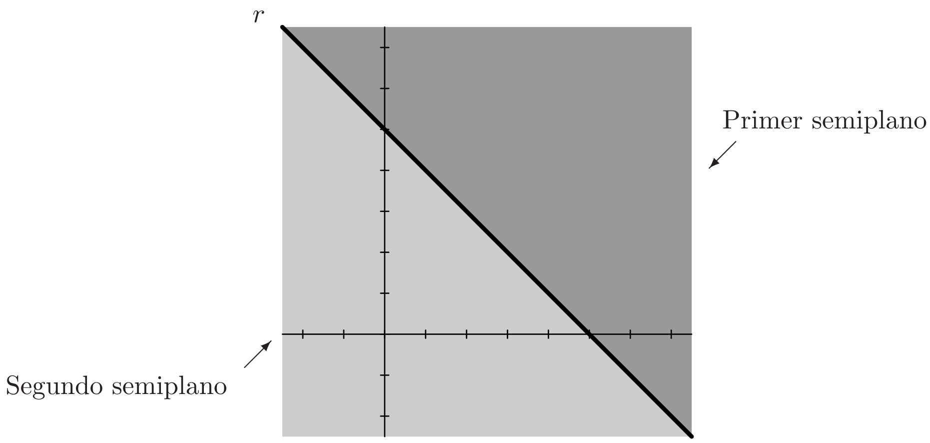
Hemos calculado dos puntos de la recta r. Representando estos puntos y trazando la recta que pasa por ellos obtenemos la representación completa del subespacio afín r.



2) Representar la recta $s \equiv \{x = 2$. En este caso es muy sencillo calcular dos soluciones del sistema ya que es suficiente con imponer que el valor de x sea igual a 2. De este modo, por ejemplo, $(2, 0)$ y $(2, 1)$ son soluciones. Representamos s trazando la recta que pasa por estos dos puntos:



Cualquier recta, $r \equiv \{ax + by = c$, divide al plano (a $\mathbb{R}^2$) en dos regiones, la primera formada por todos los puntos del plano que se encuentran a un lado de la recta y la segunda por los que se encuentran al otro. Cada una de estas regiones se denomina semiplano. Por tanto, toda recta divide al plano en dos semiplanos.

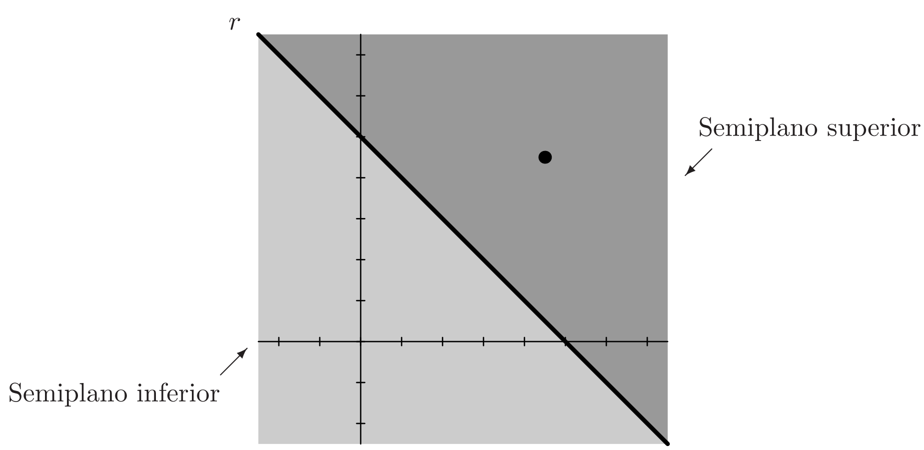


Ahora bien, es evidente que si tomamos cualquier punto del plano (x, y) cuando efectuamos la operación $ax + by$ tenemos tres posibilidades:

1. $ax + by = c$ y en tal caso el punto (x, y) estará justo sobre la recta r.
2. $ax + by > c$ y entonces el punto estará en uno de los semiplanos.
3. $ax + by < c$ en cuyo caso el punto estará en el semiplano contrario al mencionado en el punto 2.

Por tanto, uno de los semiplanos responderá a la ecuación $\{ax + by > c$ y el otro a $\{ax + by < 0$.

Ejemplo 27. Para representar los semiplanos $H_1 \equiv \{x+y < 5$ y $H_2 \equiv \{x+y > 5$ comenzamos representando la recta $r \equiv \{x + y = 5$. Sabemos que la recta r divide al plano en dos semiplanos. Uno de ellos será H_1 y el otro H_2 la cuestión es saber cuál es cada uno. Para ello trazamos la recta r y tomamos un punto contenido en uno de los semiplanos en los que queda dividido el plano.

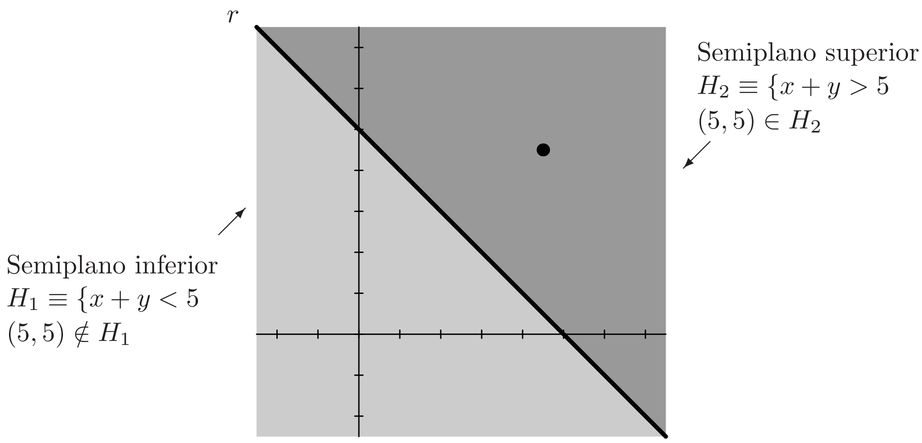


En este caso hemos elegido el punto $(5, 5)$ que está en el semiplano superior. Si el punto $(5, 5)$ verifica la ecuación del semiplano H_1 entonces este coincidirá con el semiplano superior. En caso contrario el punto cumplirá la ecuación de H_2 y en tal caso H_2 será el semiplano superior. Tenemos que

$$5 + 5 = 10 > 5 \Rightarrow (5, 5) \text{ cumple la ecuación de } H_2.$$

Como consecuencia

- H_1 es el semiplano inferiror.
- H_2 es el semiplano superior.



Es posible considerar también los semiplanos $\overline{H}_1 \equiv \{ax + by \leq c$ y $\overline{H}_2 \equiv \{ax + by \geq c$ en los que las desigualdades no son estrictas (es decir, aparece $\leq$ y $\geq$ en lugar de $<$ y $>$). Estos semiplanos se llaman 'semiplanos cerrados'. Si consideramos los semiplanos $H_1 \equiv \{ax + by < c$, $H_2 \equiv \{ax + by > c$ (de nuevo con las desigualdades estrictas $<$ y $>$) y la recta $r \equiv \{ax + by = c$, en los ejemplos anteriores hemos visto como se pueden representar H_1, H_2 y r. Para representar los semiplanos cerrados $\overline{H}_1$ y $\overline{H}_2$ es suficiente tener en cuenta que:

- La representación gráfica de $\overline{H}_1$ contendrá todos los puntos del semiplano H_1 junto con todos los puntos de la recta r.
- La representación gráfica de $\overline{H}_2$ contendrá todos los puntos del semiplano H_2 junto con los puntos de r.

En realidad $\overline{H}_1$ se obtiene añadiendo a H_1 la recta r y $\overline{H}_2$ añadiendo r a H_2.

5.3.5 Programación lineal en dos variables

En numerosas situaciones se presenta la necesidad de encontrar los valores de x e y para los que cierta función $f(x,y)$ alcanza su valor máximo o mínimo. Además, muchas veces los posibles valores de x e y no son cualesquiera sino que están sometidos a ciertas restricciones. En concreto, intentaremos resolver el siguiente problema:

Problema: Encontrar los valores de x e y para los que la función

$$f(x,y) = Ax + By, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

alcanza sus valores máximo y mínimo (maximizar y minimizar la funcion f) bajo el supuesto de que las variables x e y están sometidas a las restricciones:

$$\begin{array}{c} A_1x + B_1y \substack{\leq \\ \geq} C_1 \\ A_2x + B_2y \substack{\leq \\ \geq} C_2 \\ \vdots \\ A_mx + B_my \substack{\leq \\ \geq} C_m \end{array}.$$

Solución: Cada una de las restricciones $\{A_ix + B_iy \substack{\leq \\ \geq} C_i$ puede ser considerada como un semiplano de $\mathbb{R}^2$. Si representamos los semiplanos correspondientes a todas y cada una de las restricciones, podremos calcular fácilmente la intersección de todos ellos de forma gráfica. A esta intersección la llamaremos región factible y en realidad estará formada por los puntos (x, y) que verifican todas las restricciones. Entonces, siempre se cumplirá que:

- La región factible es un polígono.
- La función f alcanza sus valores máximo y mínimo en alguno de los vértices de la región factible.

Puesto que el número de vértices de la región factible es finito será suficiente comprobar el valor de f en estos vértices hasta dar con aquellos en los que se alcanza el máximo y el mínimo.

Ejemplo 28. En cierta ganadería se explotan dos especies de ovejas, A y B. Ambas especies producen lana y leche. En media y según la especie, cada espécimen produce a la semana las siguientes cantidades

	Especie A	**Especie B**
Lana	10 gr.	100 gr.
Leche	7 litros	2 litros

Al mismo tiempo, las instalaciones de la ganadería tienen una superficie de 10000 metros cuadrados dándose la circunstancia de que cada individuo de la especie A necesita 3 metros cuadrados mientras que cada uno de la especie B necesita 2 metros cuadrados. Gran parte de los ingresos de la ganadería se deben a subvenciones de distintos organismo y para percibirlas es imprescindible que la producción de lana sea de al menos 100 kgr. semanales y la de leche de 8000 litros semanales.

Teniendo en cuenta que la lana y la leche producidas por cada especie tiene distintas calidades, aparte de las subvenciones, los beneficios obtenidos por cada espécimen de la especie A son de 17 euros semanales y para la especie B son 10 euros semanales. Se trata de determinar el número de individuos de cada especie que maximiza el beneficio.

Supongamos que tenemos x individuos de la especie A e y individuos de la especie B. El beneficio obtenido será

$$f(x, y) = 17x + 10y.$$

Sobre los valores de x e y tenemos las siguientes restricciones:

- Puesto que la superficie máxima es de 10000 metros cuadrados, teniendo en cuenta el espacio que necesita cada especie, necesitamos que
$$3x + 2y \leq 10000.$$
- Para que la producción de lana sea superior a los 100 kgr.=100000 gr. semanales es preciso que
$$10x + 100x \geq 100000.$$
- Para que la producción de leche supere los 8000 litros he de cumplirse que
$$7x + 2y \geq 8000.$$

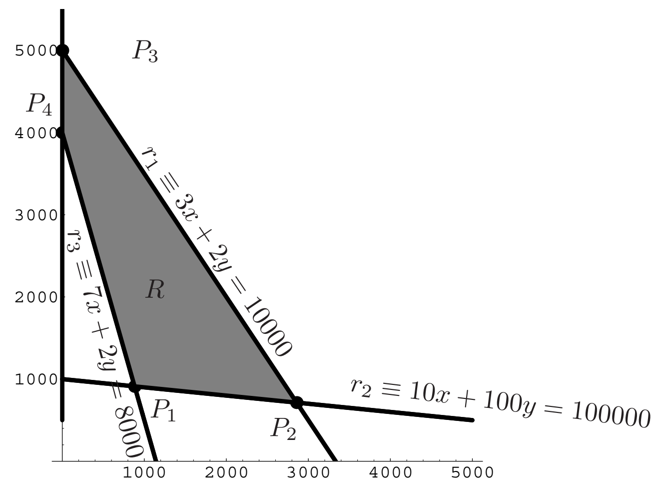
En definitiva, hemos de encontrar el máximo de la función $f(x, y) = 17x + 10y$ estando sometidos x e y al conjunto de restricciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 10000 \\ 10x + 100y \geq 100000 \\ 7x + 2y \geq 8000 \end{array} \right. .$$

Para calcular la región factible debemos representar las rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \equiv 3x + 2y = 10000 \\ r_2 \equiv 10x + 100y = 100000 \\ r_3 \equiv 7x + 2y = 8000 \end{array} \right.$$

y después marcar los hiperplanos correspondientes. Siguiendo los procedimientos descritos en la sección anterior es fácil llegar a la siguiente representación



Al dibujar la región factible hemos tenido en cuenta también que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Observamos que la región factible R tiene cuatro vértices P_1, P_2, P_3, P_4. Calculemos estos vértices.

- El vértice P_1 está en la intersección de las rectas r_2 y r_3. Lo determinaremos resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x + 100y = 100000 \\ 7x + 2y = 8000 \end{array} \right. \Rightarrow P_1 = (\frac{15000}{17}, \frac{15500}{17}).$$

- El vértice P_2 se obtiene como intersección de las rectas r_1 y r_2. Por tanto lo calculamos resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 10000 \\ 10x + 100y = 100000 \end{array} \right. \Rightarrow P_2 = (\frac{20000}{7}, \frac{5000}{7}).$$

- El vértice P_3 está en la recta $r_1 \equiv 3x + 2y = 10000$ y en la recta $x = 0$ por lo que fácilmente

$$P_3 = (0, 5000).$$

- El vértice P_4 está en la recta $r_3 \equiv 7x + 2y = 8000$ y en $x = 0$, así que

$$P_4 = (0, 4000).$$

Sabemos que el máximo de la función $f(x, y)$ se alcanzará en alguno de los vértices. Calcularemos entonces el valor de $f(x, y)$ sobre cada uno de ellos:

$$\begin{array}{rcl} f(P_1) & = & f(\frac{15000}{17}, \frac{15500}{17}) = \frac{410000}{17} = 24117.6 \\ f(P_2) & = & f(\frac{20000}{7}, \frac{5000}{7}) = \frac{390000}{7} = \boxed{55714.3} \\ f(P_3) & = & f(0, 5000) = 50000 \\ f(P_4) & = & f(0, 4000) = 40000 \end{array}$$

El máximo valor se alcanza para el punto P_2 así que los valores óptimos de x e y son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{20000}{7} = 2857.14 \\ y = \frac{5000}{7} = 714.286 \end{array} \right. .$$

En los cálculos matemáticos los valores de las distintas magnitudes pueden en principio adoptar cualquier valor positivo o negativo. Sin embargo, en las aplicaciones es frecuente que solamente tengan sentido valores positivos.

Veamos un ejemplo en el que esto queda de manifiesto.

En cierta explotación ganadera se compran tres marcas diferentes de piensos todos ellos elaborados a partir de harinas animales, harinas de pescado y harinas vegetales. Cada una de esta tres marcas combina estos compuestos según las siguientes proporciones:

	Harinas animales	**Harinas de pescado**	**Harinas vegetales**
Marca 1	10%	60%	30%
Marca 2	50%	20%	30%
Marca 3	30%	40%	30%

En la granja en cuestión se crían distintas especies animales y cada una de ellas necesita un pienso con unos porcentajes adecuados de cada tipo de harina. La cuestión es que ninguno de los tres piensos que producen las marcas se ajusta exactamente a las proporciones que se requieren en la explotación. Sin embargo, es posible mezclarlos para intentar conseguir un pienso con proporciones idóneas. Es fácil comprobar que mezclar los piensos equivale a combinar sus uplas y así, los nuevos piensos que pueden lograrse combinando los tres de que disponemos inicialmente son aquellas cuyas uplas de tantos por uno pueden obtenerse combinando las uplas de esos tres piensos. De este modo si queremos obtener una mezcla compuesta por 10 kgr. del pienso de la marca 1, 20 kgr. del de la marca 2 y 30 del de la 3, los kilogramos de cada tipo de harina que integran esa mezcla vendrán dados por la upla,

$$10(0.1, 0.6, 0.3) + 20(0.5, 0.2, 0.3) + 30(0.3, 0.4, 0.3) = (20, 22, 18)$$

De otra forma, dada una combinación cualquiera,

$$1(0.1, 0.6, 0.3) + 5(0.5, 0.2, 0.3) + 2(0.3, 0.4, 0.3)$$

sabemos que corresponde a una mezcla que contiene 1 kgr. de pienso de la marca 1, 5 kgr. de la marca 2 y de 2 kgr. de la tercera. De esta manera, el conjunto de combinaciones lineales de las uplas de los tres piensos,

$$H = \langle (0.1, 0.6, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3), (0.3, 0.4, 0.3) \rangle,$$

proporcionaría todas las posibles mezclas que pueden lograrse con ellos. Sin embargo, en el conjunto H también aparecerán combinaciones en las que los coeficientes son negativos como

$$-1(0.1, 0.6, 0.3) + 2(0.5, 0.2, 0.3) - 4(0.3, 0.4, 0.3).$$

En este caso no puede hacerse una interpretación tan sencilla de esta combinación en términos de mezclas de los tres piensos ya que no es posible mezclar -1 kgr. en del primer pienso ni -4 del tercero. Vemos pues, que de todas las posibles combinaciones lineales que aparecen en el subespacio vectorial H debemos restringirnos únicamente a aquellas que tienen todos sus coeficientes positivos, es decir a las que son de la forma:

$$\alpha(0.1, 0.6, 0.3) + \beta(0.5, 0.2, 0.3) + \gamma(0.3, 0.4, 0.3), \qquad \text{con } 0 \leq \alpha, 0 \leq \beta, 0 \leq \gamma.$$

Por otro lado, si en lugar de trabajar con cantidades totales estamos utilizando tantos por uno, el coeficiente por el que multiplicamos la upla de cada pienso corresponde al tanto por uno que añadiremos de él. Así por ejemplo la combinación

$$0.3(0.1, 0.6, 0.3) + 0.5(0.5, 0.2, 0.3) + 0.2(0.3, 0.4, 0.3)$$

equivale a una mezcla con un 0.3 por uno del primer pienso, de un 0.5 por uno del segundo y de un 0.2 por uno del tercero. En este caso, dado que son tantos por uno, los coeficientes además de ser positivos deben ser también inferiores a uno y deben sumar uno. Dicho de otra modo, las combinaciones válidas son ahora,

$$\alpha(0.1, 0.6, 0.3) + \beta(0.5, 0.2, 0.3) + \gamma(0.3, 0.4, 0.3), \qquad \text{con } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{array} \right.$$

Si admitimos que en la mezcla puedan intervenir sustancias diferentes de los tres piensos (por ejemplo si añadimos además cierto porcentaje de un compuesto vitamínico) entonces la suma de los tantos por uno que intervienen en la mezcla podría ser inferior a uno (o inferior a 100 si nos referimos a tantos por ciento). En tal caso, la restricción $\alpha + \beta + \gamma = 1$ debe ser sustituida por $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$.

Si calculamos el rango de las uplas correspondientes obtenemos

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} = 2$$

y deducimos que bastaría con dos de los piensos para obtener todas las mezclas posibles de modo que uno de los tres iniciales es superfluo. Es fácil comprobar que podemos eliminar el tercero así que sería suficiente con trabajar con mezclas de los dos primeros de la forma

$$\alpha(0.1, 0.6, 0.3) + \beta(0.5, 0.2, 0.3), \qquad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, \\ \alpha + \beta \leq 1. \end{array} \right.$$

Observamos cómo en la práctica es preciso introducir restricciones sobre los coeficientes de las combinaciones lineales que utilizamos. Estas restricciones conducen en numerosas situaciones a problemas de programación lineal. Veamos a continuación un ejemplo de ello.

Ejemplo 29. Supongamos que los piensos de los ejemplos anteriores están destinados al engorde de ganado y que disponemos de estudios que demuestran que cada uno de los tres tipos de harina que los integran son asimilados de forma diferente por los animales. Así, el estudio indica que por cada kilogramo consumido se asimila solamente un porcentaje que pasa a incrementar el peso del animal. Para nuestros tres tipos de harina estos porcentajes son:

Tipo de harina	**Porcentaje de peso asimilado %**
Harinas animales	5%
Harinas de pescado	2%
Harinas vegetales	6%

De acuerdo con esta información, queremos elaborar una mezcla de los tres piensos de que disponemos que acelere el proceso de engorde. Es decir, la mezcla debe garantizar el mayor porcentaje de asimilación de peso posible. Supongamos además que un consumo excesivo de harinas animales no sería tolerado por el metabolismo del ganado de manera que en la mezcla que queremos obtener aceptaremos a lo sumo un 40% de este tipo de harinas.

Para plantear el problema, tendremos en cuenta que, de los tres piensos disponibles, ya vimos que el tercero de ellos es superfluo por lo que todas las posibles mezclas pueden lograrse utilizando los dos primeros únicamente. De hecho, las uplas de los dos primeros piensos forma una base del subespacio vectorial correspondiente (véase el apartado **2)** de **Ejemplos 23**). Por tanto las posibles mezclas están representadas por las combinaciones de las uplas de los dos primeros piensos y forman el subespacio vectorial

$$H = \langle (0.1, 0.6, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3) \rangle.$$

Las combinaciones de H son de la forma

$$\alpha(0.1, 0.6, 0.3) + \beta(0.5, 0.2, 0.3), \tag{5.4}$$

donde α y β son los tantos por uno que añadiremos de cada pienso. Por tanto, como ya hemos visto antes, sobre esos coeficientes debemos imponer las siguientes restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, \\ \alpha + \beta \leq 1. \end{array} \right.$$

Ya hemos comentado, el hecho de que incluyamos la restricción $\alpha + \beta \leq 1$ en lugar de $\alpha + \beta = 1$ supone que admitimos que parte de la mezcla se elabore a partir de otros compuestos. Además, si efectuamos las operaciones indicadas en (5.4) obtenemos,

$$\alpha(0.1, 0.6, 0.3) + \beta(0.5, 0.2, 0.3) = (\underbrace{0.1\alpha + 0.5\beta}_{\text{Harinas animales}}, \underbrace{0.6\alpha + 0.2\beta}_{\text{Harinas de pescado}}, \underbrace{0.3\alpha + 0.3\beta}_{\text{Harinas vegetales}}), \tag{5.5}$$

con lo que el tanto por uno de harinas animales presente en la mezcla es $0.1\alpha + 0.5\beta$. Si queremos que no se supere el 0.4 por uno (es decir, el 40%) deberemos imponer además que

$$0.1\alpha + 0.5\beta \leq 0.4.$$

En definitiva, tenemos el siguiente conjunto de restricciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, \\ \alpha + \beta \leq 1, \\ 0.1\alpha + 0.5\beta \leq 0.4. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (5.5), para esta mezcla, el peso asimilado es

$$5\% \text{ de harinas animales} + 2\% \text{ de harinas de pescado} + 6\% \text{ de harinas vegetales}$$

$$= 0.05(0.1\alpha + 0.5\beta) + 0.02(0.6\alpha + 0.2\beta) + 0.06(0.3\alpha + 0.3\beta) = 0.035\alpha + 0.047\beta.$$

Esto último es el tanto por uno de peso asimilado por cada kilogramo de mezcla. Lo que intentamos conseguir es que este tanto por uno de asimilación sea lo mayor posible. Observamos que la fórmula obtenida para el peso asimilado depende de los coeficientes α y β de piensos de cada tipo que empleemos, es decir, tenemos una función de asimilación de peso dada por

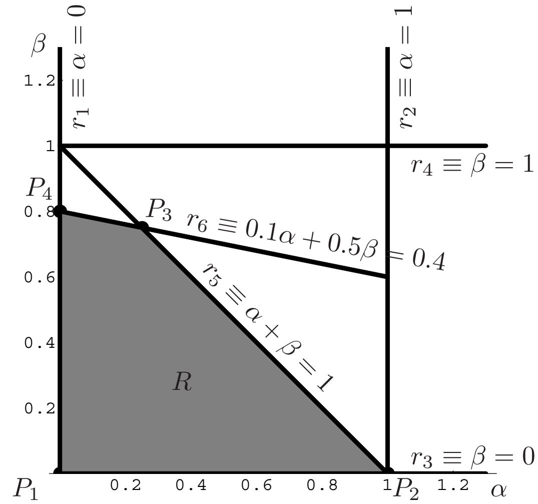
$$f(\alpha, \beta) = 0.035\alpha + 0.047\beta.$$

De esta forma, debemos determinar para qué valores de α y β alcanza la función f el máximo valor teniendo en cuenta además que α y β están sometidos a las restricciones dadas por (5.6).

Abordaremos el problema aplicando nuevamente la técnica para resolución de problemas de programación lineal en dos variables. Comenzamos considerando las rectas determinadas por las restricciones del problema. Tenemos:

Restricción	**Rectas**
$0 \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \\ \alpha \leq 1 \end{array} \right.$	$r_1 \equiv \alpha = 0$ $r_2 \equiv \alpha = 1$
$0 \leq \beta \leq 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \beta \\ \beta \leq 1 \end{array} \right.$	$r_3 \equiv \beta = 0$ $r_4 \equiv \beta = 1$
$\alpha + \beta \leq 1$	$r_5 \equiv \alpha + \beta = 1$
$0.1\alpha + 0.5\beta \leq 0.4$	$r_6 \equiv 0.1\alpha + 0.5\beta = 0.4$

Si representamos gráficamente estas rectas podemos obtener la región factible estudiando la intersección de los hiperplanos que determinan y que corresponden a las restricciones del problema. Nos encontramos ante la siguiente representación:



Se aprecia que la región factible, R, tiene cuatro vértices que hemos denominado P_1, P_2, P_3 y P_4. Es evidente que

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,0), \quad \text{y} \quad P_4 = (0,0.8).$$

Por su parte el vértice P_3 está tanto en la recta r_5 como en la r_6 con lo que deberá satisfacer las ecuaciones implícitas de r_5 y r_6. Así pues, calcularemos P_3 resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ 0.1\alpha + 0.5\beta = 0.4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.25 \\ \beta = 0.75 \end{array} \right. \Rightarrow P_3 = (0.25, 0.75).$$

Sabemos que el máximo valor de la función f se alcanza en alguno de los vértices de R. Por tanto calcularemos el valor de f sobre estos vértices para detectar el máximo:

$$\begin{array}{rcl} f(P_1) & = & f(0,0) = 0 \\ f(P_2) & = & f(1,0) = 0.035 \\ f(P_3) & = & f(0.25, 0.75) = \boxed{0.044} \\ f(P_4) & = & f(0,0.8) = 0.0376 \end{array}$$

El máximo se alcanza en el punto P_3 y por tanto los valores de α y β que producen un mejor nivel de asimilación de peso y que al mismo tiempo cumplen la condición de incluir un porcentaje de harinas animales inferior al 40% son

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.25, \\ \beta = 0.75. \end{array} \right.$$

Dicho de otro modo, debemos mezclar 0.25 por uno del primer pienso (es decir un 25%) y un 0.75 por uno del segundo (un 75%).