

Capítulo 4

Matrices

4.1 Introducción

En el análisis de los fenómenos naturales se presenta la necesidad de estudiar los datos que describen su comportamiento. La toma y posterior análisis de esos datos representa una parte esencial del trabajo que debe realizar el ambientólogo. En ocasiones será posible obtener ciertas conclusiones mediante el examen a simple vista pero en general las cifras y valores tomados en el trabajo de campo esconderán la información esencial que será la base de nuestro análisis. Extraer esa información no siempre es tarea sencilla y precisamos entonces la ayuda de métodos complejos. Las matemáticas y la estadística aportan las herramientas clave que permiten revelar las estructuras internas de los datos que no son accesibles mediante la observación directa. Para sacar a la luz esa información oculta es preciso aplicar técnicas matemáticas sofisticadas y en este capítulo introducimos las estructuras matemáticas básicas para la representación y manipulación de la información: las uplas y las matrices.

En capítulos siguientes presentaremos otras facetas de los conceptos de matriz y upla que abordamos aquí por primera vez. Veremos más adelante que el aspecto geométrico supone una segunda cara de estos elementos que completa y complementa la teoría contenida en este capítulo.

Veamos un ejemplo inicial en el que se introducen los conceptos de upla y matriz como herramientas para manipular la información de cierto problema.

Ejemplo 1. Supongamos que estamos analizando la concentración de ciertos metales en el caudal de un río. A partir de cierto punto en que se han detectado la presencia de estas sustancias contaminantes, tomamos muestras cada 5 kilómetros para determinar la cantidad de Mn, Zn y Pb. Los análisis ofrecen los siguientes resultados, en mg/l, en los diez puntos del río estudiados:

	Mn		Zn		Pb
km 0	11.21	km 0	72.77	km 0	2.26
km 1	10.6993	km 1	69.3835	km 1	2.15483
km 2	10.2333	km 2	66.4296	km 2	2.06309
km 3	9.83182	km 3	63.8235	km 3	1.98215
km 4	9.47418	km 4	61.5019	km 4	1.91005
km 5	14.1529	km 5	64.4165	km 5	21.8453
km 6	13.5763	km 6	62.2438	km 6	20.6429
km 7	13.0698	km 7	60.2842	km 7	19.6219
km 8	12.6195	km 8	58.5036	km 8	18.7406
km 9	12.2151	km 9	56.8754	km 9	17.9695

Para cada uno de los tres metales disponemos de una lista de nueve números dispuestos en orden. Una lista de este tipo se denomina en matemáticas upla. Las uplas se denotan mediante paréntesis en forma de

columna o en forma de fila en cuyo caso sus elementos pueden serarse por comas. Por ejemplo, la upla correspondiente a las concentraciones de Mn es

$$(11.21, 10.6993, 10.2333, 9.83182, 9.47418, 14.1529, 13.5763, 13.0698, 12.6195, 12.2151) \text{ o bien } \begin{pmatrix} 11.21 \\ 10.6993 \\ 10.2333 \\ 9.83182 \\ 9.47418 \\ 14.1529 \\ 13.5763 \\ 13.0698 \\ 12.6195 \\ 12.2151 \end{pmatrix} .$$

Es fácil calcular cuáles será las uplas para Zn y Pb. Las uplas se pueden designar también indicando el número de datos que contienen. De este modo diremos que las uplas correspondientes a Mn, Zn y Pb son 10-uplas puesto que cada una de ellas contiene diez datos.

Por otro lado, lo habitual es realizar un análisis conjunto de los datos que nos permita comparar de forma simultánea toda la información. Para ello lo habitual es considerar una tabla del tipo,

km	Mn	Zn	Pb
0	11.21	72.77	2.26
1	10.6883	69.3835	2.15483
2	10.2333	66.4296	2.06309
3	9.83182	63.8235	1.98215
4	9.47418	61.5019	1.91005
5	14.1529	64.4165	21.8453
6	13.5763	62.2438	20.6429
7	13.0698	60.2842	19.6219
8	12.6195	58.5036	18.7406
9	12.2151	56.8754	17.9695

Una tabla como esta es lo que, en el lenguaje matemático, se denomina una matriz, en este caso de 10 filas y tres columnas. En la notación usual para matrices se utilizan paréntesis para englobar los datos. De este modo la matriz correspondiente a la tabla anterior es

$$\begin{pmatrix} 11.21 & 72.77 & 2.26 \\ 10.6883 & 69.3835 & 2.15483 \\ 10.2333 & 66.4296 & 2.06309 \\ 9.83182 & 63.8235 & 1.98215 \\ 9.47418 & 61.5019 & 1.91005 \\ 14.1529 & 64.4165 & 21.8453 \\ 13.5763 & 62.2438 & 20.6429 \\ 13.0698 & 60.2842 & 19.6219 \\ 12.6195 & 58.5036 & 18.7406 \\ 12.2151 & 56.8754 & 17.9695 \end{pmatrix} .$$

Una vez dispuestos los datos en forma de upla o de matriz podremos aplicarles distintos tratamientos matemáticos para extraer de ellos información que no es observable a simple vista. El propósito de este y los siguientes temas es la descripción de estas técnicas.

4.2 Definiciones básicas

En la siguiente definición presentamos de forma más precisa el concepto matriz a los que ya nos hemos referido en el ejemplo inicial.

Definición 2.

Llamamos matriz de números reales con m filas y n columnas o de tipo $m \times n$ (o de orden $m \times n$) a un conjunto de números reales ordenados en la forma,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde para cada $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ es el número situado en la fila i y la columna j . Una matriz $m \times n$ es, por tanto, una tabla o cuadro de números con m filas y n columnas.

- Los números que componen la matriz se llaman elementos o coeficientes de la matriz.
- El elemento (i, j) de la matriz es aquel que se encuentra en la fila i y la columna j .
- Las matrices se nombran mediante letras mayúsculas (A, B, C , etc.). Dada una matriz, A , sus elementos se designan de forma genérica mediante la correspondiente letra minúscula y los subíndices que indican la fila y columna. Así el elemento (i, j) de la matriz A será a_{ij} .
- El conjunto de todas las matrices de tipo $m \times n$ se denota como $\mathcal{M}_{m \times n}$:

$$\mathcal{M}_{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j \right\}.$$

Dada una matriz, A , en ocasiones denotaremos que es de tipo $m \times n$ escribiendo $A_{m \times n}$.

- La matriz genérica $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nota abreviadamente mediante $(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ ó $(a_{ij})_{m \times n}$.
- Dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{\bar{m} \times \bar{n}} \in \mathcal{M}_{\bar{m} \times \bar{n}}$ son iguales si se verifica que:

$$\begin{cases} m = \bar{m} \\ n = \bar{n} \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \end{cases}.$$

Es decir, si son del mismo tipo y tienen los mismos elementos situados en el mismo sitio.

- La n -upla $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ puede escribirse en forma de matriz fila o matriz columna en la forma

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad v = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n).$$

Ejemplos 3.

- 1) Tomemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz de orden 2×3 ya que tiene dos filas y tres columnas. Además,

- el elemento $(2, 1)$ de A es 0,
- el elemento $(2, 3)$ de A es 4,
- el elemento $(3, 1)$ de A no existe,
- etc.

Así mismo, tenemos que A es un elemento del conjunto de todas las matrices de tipo 2×3 , es decir, $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$.

2) Consideremos una matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$. Dado que B es un elemento de $\mathcal{M}_{3 \times 2}$ será una matriz con 3 filas y 2 columnas. Si no tenemos más información sobre B no podemos saber cuáles son los valores de sus elementos. En tal caso, debemos denotarlos de forma genérica tal y como se indica en la Definición 2 mediante la minúscula correspondiente a B (esto es, b) y subíndices. Así pues,

- el elemento $(1, 1)$ de B será $b_{1,1}$, - el elemento $(1, 2)$ de B será $b_{1,2}$,
- el elemento $(2, 1)$ de B será $b_{2,1}$, - el elemento $(2, 2)$ de B será $b_{2,2}$,
- el elemento $(3, 1)$ de B será $b_{3,1}$, - el elemento $(3, 2)$ de B será $b_{3,2}$.

De esta forma, colocando cada elemento en su lugar, la matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

En el ejemplo **1)**, puesto que conocemos con exactitud quién es la matriz A , podíamos indicar exactamente el valor de cada uno de sus elementos. Sin embargo en este ejemplo desconocemos qué número real aparece en cada posición de B y por ello nos vemos obligados a asignarle un nombre genérico ($b_{2,1}$, $b_{3,1}$, etc.) que represente su valor el cual ignoramos.

Puesto que escribir repetidamente la expresión para B que aparecen en (4.1) es tedioso, en lugar de ello podemos abreviar poniendo $(b_{i,j})_{i=1,\dots,3}$ o aún más brevemente $(b_{i,j})_{3 \times 2}$.

3) Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$. La matriz A tendrá 3 filas y 4 columnas y si desconocemos cuáles son los elementos de A debemos escribirlos de forma genérica en la forma,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}.$$

Para abreviar en la escritura tenemos que,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \underbrace{(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,3 \\ j=1,\dots,4}}}_{\text{lo mismo más brevemente}} = \underbrace{(a_{i,j})_{3 \times 4}}_{\text{aún más breve}}.$$

También podemos indicar que A es una matriz con tres filas y cuatro columnas escribiendo $A_{3 \times 4}$.

4) El conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ contiene a todas las matrices con dos filas y dos columnas. Todas las matrices de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

mientras que los coeficientes $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ pueden tomar cualquier valor de \mathbb{R} . Es decir,

$$\mathcal{M}_{2 \times 2} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}}_{\text{Matrices con dos filas y dos columnas}} : \underbrace{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}}_{\text{los coeficientes toman cualquier valor de } \mathbb{R}} \right\}.$$

Todas estas matrices reunidas forman $\mathcal{M}_{2 \times 2}$

5) Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

tienen los mismos elementos (en ellas aparecen los mismos números reales 3, 2, -1, 0, 6 y 2) pero vemos que no están situados en las mismas posiciones (en el sitio (1, 1), A tiene un 3 mientras que en el mismo sitio B tiene un 2). Por ello ambas matrices son diferentes, así que $A \neq B$. Si consideramos ahora la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nuevamente A y C tienen los mismos elementos y en esta ocasión incluso aparecen situados en los mismos sitios. Sin embargo, ambas matrices son de tipos diferentes ya que A es de tipo 2×3 y C es 3×4 . En tal caso tampoco podemos decir que A y C sean la misma matriz y en consecuencia $A \neq C$.

Nota. Es frecuente utilizar la notación matemática para abreviar en la escritura. Así, en lugar de escribir

'tomemos una matriz, A , con tres fila y cuatro columnas'

podemos poner

'tomemos $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$ '

o bien

'tomemos $A_{3 \times 4}$ '.

Veamos ahora, en la siguiente definición, una lista de conceptos básicos dentro de la teoría de matrices.

Definición 4 (Concepto básicos sobre matrices).

- Dada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ llamamos submatriz de A a cualquier matriz obtenida suprimiendo en A filas y/o columnas.

Ejemplos 5.

1) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ tenemos que:

- $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es submatriz de A ya que se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 1 de A :

$$\begin{array}{c} \text{columna 1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{fila 3} \end{array}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ es submatriz de A ya que se obtiene eliminando la fila 2 y las columnas 2 y 3 de A :

$$\begin{array}{c} \text{fila 2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{columna 2} \\ \text{columna 3} \end{array}$$

- $\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ es submatriz de A ya que se obtiene eliminando las filas 2 y 3 y las columnas 1, 2 y 4 de A :

$$\begin{array}{c} \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{columna 1} \\ \text{columna 2} \\ \text{columna 4} \end{array}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ no es submatriz de A ya que no puede obtenerse eliminando filas y columnas completas en A tal y como se aprecia al observar la disposición de sus elementos dentro de A :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{0} & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{8} & 9 \end{pmatrix}$$

2) Consideremos la matriz que obtuvimos en la página ?? al recopilar los datos de talla y peso de varios niños:

$$\begin{array}{c} \text{1}^{\text{er}} \text{ niño} \\ \text{2}^{\text{o}} \text{ niño} \\ \text{3}^{\text{er}} \text{ niño} \end{array} \begin{array}{c} \text{altura} \\ \text{peso} \\ \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 42 & 4000 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supongamos que por algún motivo deseamos eliminar al segundo niño del estudio. La matriz correspondiente a la nueva situación será,

$$\begin{array}{c} \text{1}^{\text{er}} \text{ niño} \\ \text{3}^{\text{er}} \text{ niño} \end{array} \begin{array}{c} \text{altura} \\ \text{peso} \\ \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es evidente que la nueva matriz es submatriz de la matriz inicial ya que se obtiene eliminando su segunda fila. Supongamos que además decidimos restringir aún más nuestro estudio y tener en cuenta solamente el peso de los niños. En ese caso la matriz de datos será,

$$\begin{array}{c} \text{1}^{\text{er}} \text{ niño} \\ \text{3}^{\text{er}} \text{ niño} \end{array} \begin{array}{c} \text{peso} \\ \begin{pmatrix} 4200 \\ 4050 \end{pmatrix} \end{array}$$

Otra vez hemos obtenido una submatriz de la matriz inicial ya que hemos eliminado filas y columnas completas:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 42 & 4000 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{eliminamos fila 2}} & \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 42 & 4000 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{eliminamos fila 2 y columna 1}} & \begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 42 & 4000 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4200 \\ 4050 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Una matriz de la forma $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)_{1 \times n}$ de tipo $1 \times n$ que tienen una única fila se denomina matriz fila.

Ejemplo 6. Las matrices $(2 \ -1 \ 0 \ 1)_{1 \times 4}$, $(-1 \ 4 \ 12)_{1 \times 3}$ ó $(2 \ 4)_{1 \times 2}$ son matrices fila.

- Una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$ de tipo $n \times 1$ que tiene una única columna se denomina matriz columna.

Ejemplo 7. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$ son matrices columna.

- Dadas las uplas $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$:
 - La matriz obtenida al agrupar por columnas v_1, v_2, \dots, v_n se denota

$$(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n)$$

y tendrá m filas y n columnas. Será por tanto una matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}$.

- La matriz obtenida al agrupar por filas v_1, v_2, \dots, v_n se denota

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

que tendrá n filas y n columnas. Es decir, es de tipo $n \times m$.

Ejemplo 8. Tomemos $v_1 = (2, 3, -1, 0)$, $v_2 = (6, 2, 3, 3)$, $v_3 = (6, 4, -9, -1)$. La matriz por bloques obtenida al agrupar por columnas v_1, v_2 y v_3 es

$$(v_1 \mid v_2 \mid v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 3}.$$

La matriz por bloques que obtenemos agrupando v_1 , v_2 y v_3 es

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}.$$

- Una matriz con n filas y n columnas (de tipo $n \times n$) se dice que es una matriz cuadrada de orden n . El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n se designa mediante \mathcal{M}_n .
-

Ejemplo 9. La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene dos filas y dos columnas. Por tanto es una matriz cuadrada de orden 2. Sabemos que el conjunto de matrices de tipo 2×2 con dos filas y dos columnas se denota $\mathcal{M}_{2 \times 2}$. Sin embargo, para abreviar, escribimos \mathcal{M}_2 en lugar de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$. Por tanto,

$$A \in \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{2 \times 2}.$$

De la misma manera, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene tres filas y tres columnas y es por tanto una matriz cuadrada de orden 3 así que $B \in \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{3 \times 3}$.

- Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ llamamos matriz traspuesta de A y la notamos A^t , a la matriz cuya primera fila es la primera columna de A , cuya segunda fila es la segunda columna de A , ..., cuya n -ésima fila es la n -ésima columna de A . Son evidentes los siguientes hechos:

- $A \in \mathcal{M}_{m \times n} \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}$.
 - $(A^t)^t = A$.
 - $A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{n \times m}$. Es decir el elemento situado en A en la posición (i, j) al hacer la traspuesta pasa a la posición (j, i) .
-

Ejemplos 10.

1) Es fácil calcular la traspuesta de cualquier matriz. Por ejemplo, la traspuesta de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ se denota $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t$ y se calcula cambiando filas por columnas según el esquema,

$$\begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t & = & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array} \end{array}$$

Véase que la matriz inicial es de tipo 2×3 y al hacer la traspuesta obtenemos una de tipo 3×2 . Es evidente además que si volvemos a hacer la traspuesta a la última matriz obtendremos nuevamente la primera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{tt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir, hacer dos veces la traspuesta es equivalente a no hacer nada.

2) En la página ?? vimos como podíamos organizar en una matriz los datos correspondientes al crecimiento de distintos niños. A la hora de organizar los datos de cada niño podíamos disponerlos por filas o por columnas. Es evidente que la matriz obtenida al disponer los datos por columnas es la traspuesta de la que aparece al hacerlo por filas:

$$\begin{pmatrix} 48 & 4200 \\ 42 & 4000 \\ 46 & 4050 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 48 & 42 & 46 \\ 4200 & 4000 & 4050 \end{pmatrix}.$$

En realidad, una matriz y su traspuesta contienen la misma información pero organizada por columnas en lugar de por filas o viceversa.

- Llamamos *matriz cero* de tipo $m \times n$ y la notamos $0_{m \times n}$ o simplemente 0 , a la matriz:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

Es decir, la matriz $0_{m \times n}$ es la matriz de tipo $m \times n$ que tienen todos sus elementos iguales a cero.

Ejemplo 11. La matriz cero de tipo 2×4 se denota $0_{2 \times 4}$ y su valor es

$$0_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $0_{2 \times 4} \in \mathcal{M}_{2 \times 4}$.

La matriz cero de tipo 3×3 se denota $0_{3 \times 3}$ y su valor es

$$0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz con tres filas y tres columnas y por lo tanto es una matriz cuadrada que pertenece a $\mathcal{M}_{3 \times 3} = \mathcal{M}_3$.

En general podemos considerar la matriz cero de cualquier tipo. Por ejemplo,

$$0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Debe tenerse en cuenta que en ocasiones, para abreviar en la escritura se suele denotar la matriz cero simplemente escribiendo '0' (sin indicar el tipo), sin embargo, ello puede inducir a confusión ya que vemos que no existe una única matriz cero sino infinitas de ellas, una para cada tipo. En aquellos casos en que la matriz cero se nota mediante '0', debemos deducir cuál es el tipo del contexto en que ella aparece.

En la definición anterior, definíamos el concepto de matriz cuadrada. Las matrices cuadradas, que tienen el mismo número de filas que de columnas, desempeñan un papel de especial importancia en la teoría de matrices y en los modelos matemáticos matriciales. En la siguiente definición veremos una lista de conceptos y definiciones todos ellos relativos a matrices cuadradas.

Definición 12 (Conceptos básicos para matrices cuadradas).

- Llamamos *diagonal principal* de la matriz $A_{n \times n} = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ a la matriz fila $(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$. La diagonal principal es por tanto la matriz fila formada por los elementos de A que están recuadrados en la representación siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

- Llamamos *traza* de $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ y la notamos $\text{tr}(A)$ ó $\text{traza}(A)$ a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Ejemplo 13. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ entonces tenemos que

- la diagonal principal de A es $(1 \ 2 \ 9)$.
- la traza de A es $\text{tr}(A) = 1 + 2 + 9 = 12$.

- Decimos que $(a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ es:

- **triangular superior** si todos los elementos inferiores a la diagonal principal son nulos,
- **triangular inferior** si todos los elementos superiores a la diagonal principal son nulos,
- **diagonal** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos.

Ejemplos 14.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares superiores.

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares inferiores.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices diagonales.

- Llamamos *matriz identidad* de orden n y la notamos I_n a la matriz cuadrada de orden n que es diagonal y tal que todos los elementos de su diagonal principal son iguales a 1. Es decir,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Ejemplo 15.

- La matriz identidad de orden 1 es $I_1 = (1)$,
 - la matriz identidad de orden 2 es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 - la matriz identidad de orden 3 es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
-

- Decimos que $(a_{ij})_{n \times n}$ es simétrica si $A = A^t$ o, lo que es lo mismo:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

- Decimos que $(a_{ij})_{n \times n}$ es antisimétrica si se verifica que:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Obsérvese que si se cumple lo anterior, tomando $i = j$ obtenemos que

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

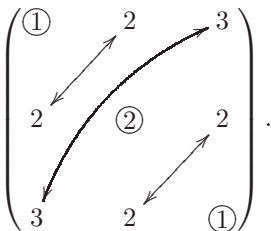
con lo que una matriz antisimétrica tendrá nulos todos los elementos de su diagonal principal.

Ejemplos 16.

- 1) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

y por lo tanto A es una matriz simétrica. Véase en el siguiente esquema que los elementos (i, j) y (j, i) de la matriz coinciden:



Para que la matriz sea simétrica los elementos situados en los extremos de una misma flecha han de coincidir. Obsérvese que los elementos de la diagonal principal (rodeados por un círculo) no están señalados por ninguna flecha y por lo tanto su valor no influye de ninguna manera en que la matriz sea simétrica.

- 2) La matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica ya que, si notamos $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, tenemos que

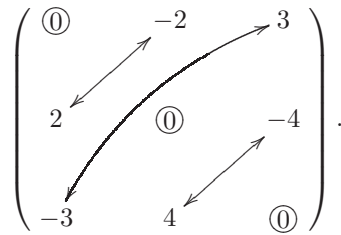
$$* b_{12} = -2 = -b_{21}.$$

$$* b_{13} = 3 = -b_{31}.$$

$$* b_{23} = -4 = -b_{32}.$$

$$* b_{11} = 0, b_{22} = 0, b_{33} = 0.$$

Lo anterior puede esquematizarse mediante el siguiente diagrama de flechas:



Los elementos situados en los extremos de una misma flecha han de ser opuestos y los de la diagonal (encerrados en un círculo) nulos.

3) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no es antisimétrica puesto que los elementos de la diagonal no todos son nulos.

Sin embargo la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sí es antisimétrica.

4) En distintas parcelas de terreno se estudia si están presentes tres especies de plantas A, B y C. Se observa que

- En 3 parcelas aparece solamente A.
- En 5 parcelas aparece solamente B.
- En 4 parcelas aparece solamente C.
- En 19 parcelas aparecen A y B.
- En 23 parcelas aparecen B y C.
- En 16 parcelas aparecen A y C.

Estos datos podemos codificarlos en una matriz de la siguiente manera,

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 19 & 16 \\ 19 & 5 & 23 \\ 16 & 23 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hemos situado en el cruce de la fila A con la columna A, el número de parcelas en que sólo aparece A, en el cruce de la fila A con la columna B, las parcelas en las que aparecen A y B y así sucesivamente. Evidentemente hay las mismas parcelas en las que aparece A y B que en las que aparecen B y A, así que en las posiciones correspondientes ponemos el mismo número, 19, y lo mismo sucederá en el caso B-C y A-C. Por tanto, la matriz resultante es simétrica ya que en la posición (i, j) encontraremos siempre el mismo número que en la (j, i) .

5) Se realizan trasvases de agua entre tres pantanos diferentes en las siguientes cuantías:

- Del pantano 1 al pantano 2 se trasvasan 0.5 hectómetros cúbicos,
- del pantano 1 al pantano 3 se trasvasan 0.9 hectómetros cúbicos,
- del pantano 2 al pantano 3 se trasvasan -0.2 hectómetros cúbicos.

Hemos utilizado el signo positivo para significar que el trasvase se hace del pantano inicial al final y el signo negativo para indicar lo contrario (así el tercer dato es -0.2 para indicar que el agua salió del pantano 3 hacia el 2). Es claro que si del pantano 1 salieron 0.5 hectómetros cúbicos hacia el 2, podemos decir también que del 2 salieron -0.5 hectómetros cúbicos hacia el 1. Por otro lado, es también inmediato que de cada pantano a sí mismo no se puede trasvasar ninguna cantidad. Toda esta información podemos resumirla en la siguiente matriz:

$$\text{Pantano de salida} \begin{cases} \text{pantano 1} \\ \text{pantano 2} \\ \text{pantano 3} \end{cases} \begin{matrix} \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Pantano de llegada}} \\ \text{pantano 1} \\ \text{pantano 2} \\ \text{pantano 3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.9 \\ -0.5 & 0 & -0.2 \\ -0.9 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede verse que hemos situado en el cruce de las filas y columnas correspondientes a los distintos pantanos la cantidad de hectómetros cúbicos trasvasados teniendo en cuenta a la hora de poner el signo de cada dato que las filas indican el pantano de salida y las columnas el de llegada. Como antes dijimos, si en una dirección se trasvasó una cantidad, en la contraria la cantidad tendrá signo opuesto; por ello en la matriz encontramos siempre en la posición (i, j) el número opuesto al que aparece en la (j, i) . Además, como de un pantano a sí mismo no se trasvasa nada en la diagonal principal hemos escrito solamente ceros. En definitiva, la matriz de datos es antisimétrica.

Nota. Las matrices diagonales se suelen notar, con objeto de abreviar la escritura, indicando únicamente los elementos de su diagonal principal. Así por ejemplo:

$$\text{La matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ se puede escribir como } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

En forma genérica, a la matriz diagonal $A \in \mathcal{M}_n$ cuya diagonal principal es $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ la denotaremos mediante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

4.3 Operaciones con matrices

Sabemos que es posible realizar distintas operaciones entre números reales. Así, podemos calcular la suma, la diferencia, el producto, la división, etc. Veremos en esta sección que es posible extender estas operaciones al cálculo con matrices. Comprobaremos incluso que muchas de las propiedades usuales de la aritmética de números siguen siendo válidas para matrices.

4.3.1 Suma de matrices

Definición 17. Dadas dos matrices del mismo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ definimos la suma de A y B como la matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ determinada mediante:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 18.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0_{3 \times 4}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3}.$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ es una operación que no se puede efectuar por no ser las dos matrices del mismo tipo.

5) Puesto que hemos identificado los elemento de \mathbb{R}^n con matrices fila y columna, la operación suma que hemos definido es también válida para ellos. Así podemos realizar los siguientes cálculos:

- $(2, 3, -1) + (6, 0, 2) = (8, 3, 1).$
- $(3, -2) - (-3, 2) = (0, 0).$
- $(4, 3, 2, 1, 1) + (-2, 4, 3, 0, -1) = (2, 7, 5, 1, 0).$
- $(3, 2, 1) + (2, 4, 6, 2)$ es una operación que no se puede realizar ya que tenemos tipos diferentes.

Véase que solamente se pueden sumar matrices que sean del mismo tipo y el resultado será entonces a su vez una matriz de ese mismo tipo.

Recopilamos a continuación varias propiedades de la suma de matrices. Todas ellas son análogas a las que se verifican para la suma de dos números y en realidad su demostración se deriva directamente de ellas.

Propiedades 19. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$:

1. *Propiedad conmutativa:* $A + B = B + A.$
2. *Propiedad asociativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C.$
3. $A + 0 = A$ (donde $0 = 0_{m \times n}$).

4. Dada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ definimos la matriz opuesta de A como

$$-A = (-a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

y entonces se verifica que:

$$A + (-A) = 0.$$

5. $(A + B)^t = A^t + B^t$.

6. A es antisimétrica $\Leftrightarrow A^t = -A$

Nota (Resta de matrices). De igual manera que se define la suma es igualmente fácil introducir la resta de matrices. De hecho, tal y como vemos a continuación, podemos definir la resta a partir de la suma.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ definiremos la resta o diferencia entre A y B como la matriz

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

Ejemplos 20.

1) $-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

2) $-0_{2 \times 2} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & -0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}.$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

4) $-(3, 2, -1) = (-3, -2, 1).$

5) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = -A$, por tanto A es una matriz antisimétrica.

4.3.2 Producto de matrices por un número real

Definición 21. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y un número real $r \in \mathbb{R}$, definimos el producto de r por A y lo notamos como $r \cdot A$ ó $A \cdot r$ como:

$$r \cdot A = A \cdot r = (r \cdot a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

Es decir:

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & \dots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & r \cdot a_{m2} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que si multiplicamos una matriz de tipo $m \times n$ por un número real obtenemos como resultado una matriz de tipo $m \times n$.

Ejemplos 22.

$$1) 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 2}.$$

$$3) -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente resumimos las propiedades más importantes del producto de un número por una matriz. En todos los casos la demostración es evidente y puede comprobarse de forma directa.

Propiedades 23. $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$:

1. *Propiedad distributiva:* $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$.

2. *Propiedad distributiva:* $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$.

3. $1 \cdot A = A$.

4. $(-1) \cdot A = -A$.

5. $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$.

6. $r \cdot 0 = 0, 0 \cdot A = 0$.

7. $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$.

Filas y columnas de proporciones

Hemos visto que cuando en cierto fenómeno intervienen varios datos a_1, a_2, \dots, a_n , podemos representar esta información mediante un elemento de \mathbb{R}^n en la forma,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Es frecuente que sea de interés determinar qué porcentaje representa cada cantidad respecto al total. Ello puede hacerse empleando tantos por ciento (porcentajes) o tantos por uno:

- El cálculo de porcentajes para cada cantidad de (a_1, a_2, \dots, a_n) se realiza de la siguiente forma:

– Porcentaje de a_1 respecto al total = $\frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_1 \%$.

– Porcentaje de a_2 respecto al total = $\frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_2 \%$.

– \vdots

– Porcentaje de a_n respecto al total = $\frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_n \%$.

- El cálculo de tantos por uno para cantidad de (a_1, a_2, \dots, a_n) se realiza como sigue:

– Tanto por uno de a_1 respecto al total = $\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_1$.

– Tanto por uno de a_2 respecto al total = $\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_2$.

$$- \quad \vdots$$

$$- \text{ Tanto por uno de } a_n \text{ respecto al total} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_n.$$

Si representamos los porcentajes correspondientes a (a_1, a_2, \dots, a_n) mediante un elemento de \mathbb{R}^n y utilizamos la definición del producto de un número por una matriz tenemos,

$$\left(\frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_1, \frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_2, \dots, \frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_n \right) =$$

$$= \frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Por su parte si hacemos lo mismo para los tantos por uno obtenemos

$$\left(\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_1, \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_2, \dots, \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} a_n \right) =$$

$$= \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

En otras palabras, dada la distribución de cantidades (a_1, a_2, \dots, a_n) , tenemos que

La upla de porcentajes correspondiente es:	$\frac{100}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_1, a_2, \dots, a_n)$
La upla de tantos por uno correspondiente es:	$\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Ejemplo 24. En la página 111 considerábamos el caso de un parque natural en el que la distribución de grandes herbívoros era la siguiente: 320 ciervos, 124 muflones, 238 cabras montesas. Representábamos esta distribución mediante la upla

$$(320, 124, 238) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculemos los porcentajes que representa cada especie respecto al total:

- Porcentaje de ciervos = $100 \frac{320}{320 + 124 + 238} = 46.92\%$.
- Porcentaje de muflones = $100 \frac{124}{320 + 124 + 238} = 18.18\%$.
- Porcentaje de cabras montesas = $100 \frac{238}{320 + 124 + 238} = 34.89\%$.

Como acabamos de ver, empleando la definición de producto de un número por una matriz podemos obtener estos mismos porcentajes mediante la operación

$$\frac{100}{320 + 124 + 238} (320, 124, 238) = (46.92, 18.18, 34.89).$$

De la misma manera, la upla de tantos por uno será,

$$\frac{1}{320 + 124 + 238} (320, 124, 238) = (0.4692, 0.1818, 0.3489).$$

Si tubiéramos otra distribución diferente de animales en el parque natural, los porcentajes podrían variar. Por ejemplo si la distribución viene representada por $(120, 201, 150)$ los porcentajes serán,

$$\frac{100}{120 + 201 + 150} (120, 201, 150) = (25.47, 42.67, 31.84).$$

5. $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$\begin{aligned} I_m \cdot A &= A & , & & 0_{p \times m} \cdot A_{m \times n} &= 0_{p \times n} \\ A \cdot I_n &= A & , & & A_{m \times n} \cdot 0_{n \times p} &= 0_{m \times p} \end{aligned} .$$

6. $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, B \in \mathcal{M}_{n \times p}$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t .$$

7. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A \cdot B \in \mathcal{M}_n$.

8. Dadas $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}_{n \times n}$, matrices diagonales de \mathcal{M}_n , tenemos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & & & \\ & a_2 \cdot b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \cdot b_n \end{pmatrix}_{n \times n} .$$

Nota. Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}, B \in \mathcal{M}_{p \times r}$, nos preguntamos cuándo será posible efectuar tanto la operación $A \cdot B$ como la operación $B \cdot A$. Tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \text{si es posible efectuar } A_{m \times n} \cdot B_{p \times r} &\Rightarrow n = p \\ \text{si es posible efectuar } B_{p \times r} \cdot A_{m \times n} &\Rightarrow r = m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A \in \mathcal{M}_{m \times n} \\ B \in \mathcal{M}_{n \times m} \end{cases}$$

$$\text{en cuyo caso } \begin{cases} A \cdot B \in \mathcal{M}_{m \times m} \\ B \cdot A \in \mathcal{M}_{n \times n} \end{cases} .$$

En particular, si $A, B \in \mathcal{M}_n$ (son de tipo $n \times n$) podemos calcular tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ y además obtenemos $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_n$.

En general el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa ($A \cdot B = B \cdot A$) ya que no siempre podremos calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y aun cuando ello sea posible no siempre obtendremos el mismo resultado.

Ejemplos 28.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} .$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ no puede ser calculada.

2) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ puesto que son de tipo 2×3 y 3×2 , podremos calcular tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$. Sin embargo tenemos que:

$$\star A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$\star B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Obtenemos pues que $A \cdot B \neq B \cdot A$ y además ni siquiera son matrices del mismo tipo.

3) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces podemos calcular tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ y además $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_2$, sin embargo:

$$\star A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\star B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego en este caso $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son del mismo tipo pero son matrices distintas.

4) Dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se verificará que

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

con lo que en esta situación los productos $A \cdot I_n$ y $I_n \cdot A$ si coinciden.

Potencia de matrices

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ será posible efectuar el producto

$$A_{m \times n} \cdot A_{m \times n}$$

solamente cuando $m = n$ con lo cual A sería una matriz cuadrada de orden n . En aquellos casos en los que A no sea una matriz cuadrada no será nunca posible efectuar la operación $A \cdot A$.

Vemos entonces que solamente es posible calcular el producto de una matriz por sí misma cuando esta es cuadrada y entonces, al realizar ese producto, obtenemos nuevamente una matriz cuadrada del mismo tipo que la inicial. Ello hace posible que podamos multiplicar una matriz cuadrada por sí misma cuantas veces queramos. Esto conduce al concepto de potencia de una matriz cuadrada que introducimos en la próxima definición y que, como veremos más adelante, constituye una de las herramientas más importantes en la construcción de modelos matriciales.

Definición 29. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ definimos, para $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A \in \mathcal{M}_n.$$

Ejemplos 30.

1) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden tres. Al ser cuadrada podremos calcular sus potencias. Por ejemplo,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos también calcular A^3 . Para ello aprovecharemos el cálculo realizado con A^2 de la siguiente manera,

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

En realidad, para calcular las sucesivas potencias de la matriz A (A^4 , A^5 , etc.), podemos repetir este proceso multiplicando la última potencia obtenida nuevamente por la matriz A para obtener así la potencia siguiente. Por ejemplo, si repetimos el proceso una vez más obtendremos A^4 :

$$A^4 = A \cdot A^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{La matriz } A}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{multiplicada por la potencia anterior, } A^3}, \quad = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 40 & 9 & 8 \\ 25 & 5 & 10 \\ 30 & 3 & 11 \end{pmatrix}}_{\text{proporciona la potencia siguiente, } A^4}.$$

En el ejemplo anterior se describe el procedimiento básico para calcular potencias de una matriz. Puede observarse que el cálculo de estas potencias conduce a la realización de numerosos productos matriciales e involucra por tanto un número elevado de operaciones. A poco que debamos calcular una potencia de exponente medianamente alto, nos encontraremos que es imposible realizar el cálculo a mano. Esto convierte al cálculo de potencias de matrices en una operación difícil que requiere la utilización de otras técnicas más sofisticadas que ya estudiaremos en el capítulo de diagonalización.

En la propiedad siguiente, entre otras cosas, veremos que existe una excepción a lo dicho en el párrafo anterior. Cuando la matriz a la que deseamos calcular la potencia es diagonal, entonces el cálculo se simplifica de forma notable.

Propiedades 31.

1. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ y $k, p \in \mathbb{N}$

$$A^k \cdot A^p = A^p \cdot A^k = A^{k+p}.$$

2. Dada la matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Ejemplos 32.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ se verifica que

$$\begin{aligned} A^3 \cdot A^2 &= (A \cdot A \cdot A) \cdot (A \cdot A) = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A = A^5, \\ A^2 \cdot A^3 &= (A \cdot A) \cdot (A \cdot A \cdot A) = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A = A^5. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^3 \cdot A^2 = A^2 \cdot A^3 = A^5$ tal y como nos indica la primera de las propiedades anteriormente enunciadas. Este ejemplo nos da una idea acerca de como puede ser demostrada esta propiedad en su forma más general.

3) El punto 3 de la propiedad anterior es aplicable solamente a matrices diagonales. Para matrices cualesquiera tal propiedad, en general, no se cumplirá. Así por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^3 & 2^3 & 0^3 \\ 0^3 & (-1)^3 & 1^3 \\ 1^3 & 2^3 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.4 Matriz inversa

Consideradas dos matrices A y B de los tipos adecuados, podemos calcular su suma, $A + B$, su diferencia, $A - B$, o su producto, $A \cdot B$. Sin embargo, no hemos definido aún ninguna operación a la que podamos llamar ‘división de matrices’. Esto es lo que vamos a intentar en este apartado definiendo el concepto de inversa de una matriz. Por el tipo de operaciones que ello implica, solamente una matriz cuadrada puede tener inversa. Para introducir estos nuevos conceptos comenzaremos haciendo algunas consideraciones:

- Dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$ sabemos que

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A,$$

propiedad análoga a la que verifica el número 1 dentro de los números reales ($\forall r \in \mathbb{R}, 1 \cdot r = r \cdot 1 = r$). Podemos admitir entonces que la matriz I_n desempeña el papel del 1 dentro del conjunto de las matrices cuadradas de orden n . Es decir, I_n es la unidad de \mathcal{M}_n .

- Dados $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, la división de a entre b puede calcularse como

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1},$$

donde b^{-1} es lo que se denomina inverso del número b . Por ello a la hora de dividir dos números lo que realmente nos interesa es calcular el inverso de alguno de ellos.

- Dado $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, sabemos que su inverso es otro número real que escribimos como b^{-1} y que es el único número que verifica

$$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1.$$

El inverso de b es aquel número por el que hay que multiplicar b para obtener 1.

- No todo número real tiene inverso ya que no es posible calcular $0^{-1} = \frac{1}{0}$ puesto que no hay ningún número x tal que

$$0 \cdot x = 1.$$

Por todo lo anterior, parece claro que, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, si queremos definir A^{-1} , habremos de encontrar otra matriz, $B \in \mathcal{M}_n$, tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

y entonces esa matriz B será la inversa de A , es decir, $A^{-1} = B$.

Definición 33. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, si existe, llamamos matriz inversa de A y la notamos A^{-1} a la única matriz que verifica:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Ejemplos 34.

1) Dada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Por lo tanto, según la definición que hemos dado, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Dada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ si tomamos $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

y por ello $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

3) Dada $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta propiedades que conocemos acerca del producto de matrices diagonales es fácil calcular la inversa tomando los inversos de los elementos de la diagonal principal de B :

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

y por ello $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix}.$

Téngase en cuenta que esta técnica no puede ser utilizada con matrices que no sean diagonales tal y como queda puesto de manifiesto en los apartados **1)** y **2)** de **Ejemplos 34** en los que la matriz inversa no es la matriz formada por los inversos de los elementos de la matriz inicial.

Si pensamos en lo que hubiera sucedido si algunos de los elementos de la diagonal principal de B hubiera sido nulo, parece claro también, a la vista de como hemos obtenido antes B^{-1} , que en tal caso no sería posible el cálculo de la inversa.

Técnica básica para el cálculo de la matriz inversa

El cálculo de la matriz inversa es tedioso ya que involucra por lo general un gran número de operaciones. Presentamos ahora una primera técnica que permite determinar la inversa de matrices de reducido tamaño (orden 2 o a lo sumo 3). Esta técnica pasa por la resolución de un sistema lineal cuyas incógnitas son los elementos de la matriz inversa. Veamos en qué consiste la técnica por medio de un par de ejemplos.

Ejemplos 35.

1) Nos preguntamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. Si A tiene inversa, ésta será también una matriz cuadrada de orden 2 y por lo tanto de la forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces tendremos que

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} = I_2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a+c=1 & b+d=1 \\ a+c=0 & b+d=0 \end{cases}, \end{aligned}$$

lo cual es imposible ya que es evidente que la cantidad $a+c$ no puede ser al mismo tiempo igual a 1 e igual a 0. Deducimos por tanto que la matriz A no tiene matriz inversa.

2) Intentemos calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Para ello aplicaremos la misma técnica que hemos utilizado en el ejemplo anterior. De esta forma, si A tiene inversa sabemos que será también una matriz cuadrada de orden 2 y por tanto ha de ser de la forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz inversa debe cumplir $A \cdot A^{-1} = I_2$ tendremos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c=1, & 3b+d=0, \\ 2a+c=0, & 2b+d=1. \end{cases} \\ \text{Resolviendo el sistema} &\Rightarrow \begin{cases} a=1, & b=-1, \\ c=-2, & d=3. \end{cases} \end{aligned}$$

Véase que al final obtenemos un sistema lineal con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas que se resuelve fácilmente de modo que finalmente hemos calculado la matriz inversa que será

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En estos ejemplos hemos presentado la técnica básica para decidir si una matriz es regular o no y, en caso de que lo sea, calcular su inversa. Como vemos, si aplicamos esta técnica, el cálculo de la inversa depende de la resolución de un sistema que en el caso de una matriz 2×2 tendrá cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. El problema que plantea esta técnica reside en el hecho de que para matrices de orden superior el número de ecuaciones y variables que aparecerán en el sistema se multiplica considerablemente. Así, para una matriz de orden 3 tendríamos 9 ecuaciones y para una de orden 4 serían 16. Por este motivo este método es válido solamente en casos sencillo como el de las matrices de orden 2. Una vez que, en las secciones siguientes de este tema, introduzcamos las técnicas de manejo de matrices mediante operaciones elementales dispondremos de un método más efectivo para el cálculo de matrices inversas.

Definición 36. Decimos que $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz regular si existe la matriz inversa de A y en caso contrario diremos que A es una matriz singular o no regular.

Ejemplo 37. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz singular mientras que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices regulares.

Veamos algunas propiedades importantes de la matriz inversa.

Propiedades 38.

i) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ son regulares entonces la matriz $A \cdot B$ es también regular y además se verifica que:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

ii) Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular entonces A^t es también regular y además se verifica que:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

iii) Dada la matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ tal que $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$, tenemos que A es regular y además:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

iv) Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular, entonces A^{-1} es también regular y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

v) Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular y tomamos $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$, entonces $r \cdot A$ es regular y se verifica que:

$$(r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}.$$

Ejemplos 39. En los siguientes ejemplos vamos a recurrir a los distintos puntos de **Propiedades 38**:

1) Calculemos la inversa de algunas matrices aprovechando algunas operaciones anteriores y las propiedades ya vistas. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conocemos mediante el ejemplo 34 de la página 152 la siguiente inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t,$$

así que, empleando la propiedad 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y finalmente podemos también usar la propiedad 1 para calcular

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Dada $I_n \in \mathcal{M}_n$ sabemos que $I_n \cdot I_n = I_n$ por lo tanto la matriz identidad es regular y su inversa es ella misma:

$$(I_n)^{-1} = I_n.$$

Por otro lado, al ser I_n una matriz diagonal, también podemos utilizar la propiedad 3 para llegar a la misma conclusión sobre su inversa.

3) Dadas $A, B, C \in \mathcal{M}_n$ vamos a calcular la inversa $(A \cdot B \cdot C)^{-1}$. Para ello utilizaremos repetidamente la propiedad 1.

$$\begin{aligned} (A \cdot B \cdot C)^{-1} &= ((A \cdot B) \cdot C)^{-1} = (\text{propiedad 1}) = C^{-1} \cdot (A \cdot B)^{-1} \\ &= (\text{propiedad 1}) = C^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

En general reiterando este proceso es fácil comprobar que dado un número cualquiera, k , de matrices cuadradas regulares, $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n$, se verifica que

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

4.4 Reglas de simplificación e igualdades de matrices

En distintos puntos de este capítulo y de los siguientes nos encontraremos con expresiones e igualdades que involucran operaciones con matrices. Sabemos que, cuando manejamos expresiones o igualdades con números, existen reglas que permiten su simplificación. En la siguiente propiedad resumimos las reglas de simplificación que podemos aplicar en el caso matricial. Puede verse que muchas de ellas son equivalentes a las que utilizamos para expresiones numéricas pero otras requieren un cuidado especial.

Propiedades 40.

1. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, entonces:

$$\begin{aligned} A + B = A + C &\Rightarrow B = C, \\ A + B = C &\Rightarrow B = C - A. \end{aligned}$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ matriz regular y $B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, entonces:

$$\begin{aligned} B \cdot A = C \cdot A &\Rightarrow B = C, \\ B \cdot A = C &\Rightarrow B = C \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

3. Sea $A \in \mathcal{M}_m$ matriz regular y $B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, entonces:

$$\begin{aligned} A \cdot B = A \cdot C &\Rightarrow B = C, \\ A \cdot B = C &\Rightarrow B = A^{-1} \cdot C. \end{aligned}$$

4. Sea $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y $B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, entonces:

$$\begin{aligned} r \cdot B = r \cdot C &\Rightarrow B = C, \\ r \cdot B = C &\Rightarrow B = \frac{1}{r} \cdot C. \end{aligned}$$

Demostración. La demostración de todos los puntos es sencilla empleando todas las propiedades que ya conocemos sobre matrices. \square

Nota.

• Véase que en las propiedades 2 y 3 es fundamental que se cumpla la condición de que la matriz A sea regular. Si A es una matriz singular no podemos garantizar que sea posible su simplificación ni que sea posible despejarla. Por ejemplo fácilmente se verifica que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=0_{2 \times 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{=0_{2 \times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=0_{2 \times 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=0_{2 \times 2}}$$

sin embargo, no podemos simplificar en esta igualdad la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que si lo hacemos obtendremos

$$\begin{pmatrix} 1/1 & 1/1 \\ 1/1 & 1/1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/1 & 1/1 \\ 1/1 & 1/1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

lo cual evidentemente no es cierto. Ello es debido a que, como sabemos, la matriz simplificada no es regular.

• Existen otras situaciones en las que las reglas habituales para la manipulación de números no pueden ser aplicadas cuando trabajamos con matrices. Así por ejemplo, si tomamos las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ y pretendemos calcular el producto $A \cdot B \cdot A^{-1}$, no podemos realizar la simplificación

$$\cancel{A} \cdot B \cdot \cancel{A}^{-1} = B$$

ya que podemos eliminar A con su inversa, A^{-1} , solamente cuando se encuentran una contigua a la otra, cosa que no sucede en este caso. Véase además que, puesto que el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa, en $A \cdot B \cdot A^{-1}$ no se puede alterar el orden para conseguir $B \cdot A \cdot A^{-1}$ y poder así simplificar.

Ejemplos 41.

1) Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$, compruébese si se verifica la igualdad

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot (A + B) + B \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = A^2 + B^2 + A \cdot B + B \cdot A \end{aligned}$$

y entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$$

$$\begin{aligned}
& \Updownarrow \\
A^2 + B^2 + A \cdot B + B \cdot A &= A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \\
& \Updownarrow \\
A \cdot B + B \cdot A &= 2 \cdot A \cdot B \\
& \Updownarrow \\
A \cdot B + B \cdot A &= A \cdot B + A \cdot B \\
& \Updownarrow \\
B \cdot A &= A \cdot B.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad propuesta en el ejemplo será correcta solamente si se verifica que $B \cdot A = A \cdot B$ lo cual en general no es cierto. La igualdad se cumplirá solamente para aquellas matrices A y B que hagan cierta la igualdad

$$B \cdot A = A \cdot B.$$

2) Simplifíquese la expresión $(A + B)^2 - A \cdot (A + B) - (B + A) \cdot B$.

Empleando algunas de las igualdades obtenidas en el ejercicio anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (A + B)^2 - A \cdot (A + B) - (B + A) \cdot B \\
&= A^2 + B^2 + A \cdot B + B \cdot A - A^2 - A \cdot B - B^2 - A \cdot B \\
&= B \cdot A - A \cdot B.
\end{aligned}$$

3) Simplificar la expresión

$$-2 \cdot A^t \cdot B - (B^t \cdot A)^t + [B^t \cdot A + (A^t \cdot B^t)^t]^t.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot A^t \cdot B - (B^t \cdot A)^t + [B^t \cdot A + (A^t \cdot B^t)^t]^t \\
&= -2 \cdot A^t \cdot B - A^t \cdot B^{tt} + (B^t \cdot A)^t + ((A^t \cdot B^t)^t)^t \\
&= -2 \cdot A^t \cdot B - A^t \cdot B + A^t \cdot B^{tt} + A^t \cdot B^t \\
&= A^t \cdot B^t - 2 \cdot A^t \cdot B = A^t \cdot (B^t - 2 \cdot B).
\end{aligned}$$

4) Calcular las matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2$ tales que verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} 2 \cdot X - 5 \cdot Y &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -X + 3 \cdot Y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por 2 obtenemos

$$\begin{cases} 2 \cdot X - 5 \cdot Y &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -2 \cdot X + 6 \cdot Y &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{cases},$$

sumando ambas ecuaciones

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

y finalmente, utilizando la segunda de las ecuaciones que teníamos al principio:

$$X = 3 \cdot Y - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

5) Calcular las matrices C_1 y C_2 que verifican:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Empleando el ejercicio 1 de la página 152 sabemos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es regular y que su inversa es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz es regular podemos despejarla obteniendo:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Modelos matriciales basados en potencias de matrices

El producto y la potencia de matrices son fundamentales en el planteamiento de los modelos matriciales más importantes.

Supongamos que estamos estudiando un fenómeno en el que intervienen varias magnitudes a_1, a_2, \dots, a_k que varían con respecto al tiempo. Si estudiamos ese fenómeno en varios períodos, $n = 0$ (período inicial), $n = 1$, $n = 2$, etc., las magnitudes a_1, a_2, \dots, a_k irán tomando distintos valores. Si disponemos en forma de upla el valor de las magnitudes en cada período n , obtendremos una lista de k -uplas, P_0, P_1, \dots, P_n que nos proporcionan la información del fenómeno en cada período.

Lo importante aquí sería poder calcular las k -upla correspondientes a los períodos futuros de manera que podamos predecir la evolución del fenómeno. Es entonces cuando entra en juego el cálculo de potencias matriciales ya que en numerosas situaciones, si conocemos la situación inicial del fenómeno, es decir, conocemos la upla P_0 correspondiente al período inicial $n = 0$, podremos calcular la upla de un período cualquiera, n , mediante una fórmula del tipo

$$P_n = A^n \cdot P_0,$$

donde A es una matriz cuadrada de orden k que se denomina **matriz de transición** y que gobierna los cambios que experimenta el fenómeno de un período al siguiente.

Ilustraremos mejor esto a continuación mediante un ejemplo clásico de modelo matricial basado en la potenciación de matrices.

Ejemplo 42. Supongamos que en cierto parque natural se estudian los movimientos anuales de los especímenes de cierta especie. En el parque se dan tres asentamientos en los que habita dicha especie que llamaremos A, B y C. De un año a otro, parte de los individuos que se encuentran en un asentamiento se desplazan a otro (por ejemplo los machos jóvenes que al llegar a adultos son expulsados de una manada). Los datos disponibles permiten formular la siguiente tabla de desplazamientos de un año al siguiente:

	Salen de A	Salen de B	Salen de C
Llegan a A	80%	10%	10%
Llegan a B	10%	60%	20%
Llegan a C	10%	30%	70%

Por ejemplo, vemos que cada año el 80% de los individuos del asentamiento A permanecen en A, el 10% pasan a B y el 10% a C. Sabemos además que en el año que comenzaron los estudios se detectaron 210 individuos en A, 190 en B y 320 en C.

Vamos a plantear un modelo matricial para estudiar este problema. Suponiendo que el año $n = 0$ es el año en que comenzaron los estudios, llamaremos:

- A_n = número de individuos en el asentamiento A al cabo de n años.
- B_n = número de individuos en el asentamiento B al cabo de n años.
- C_n = número de individuos en el asentamiento C al cabo de n años.

La información de cada año la agruparemos en una upla columna que denotaremos como P_n ,

$$P_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Según los datos del problema tenemos que $A_0 = 210$, $B_0 = 190$ y $C_0 = 320$ con lo que

$$P_0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la tabla de desplazamientos es fácil calcular los especímenes que habrá en cada asentamiento si conocemos los que había el año anterior. Así, si en el año n tenemos A_n en A, B_n en B y C_n en C, en el año $n + 1$ tendremos

- $\underbrace{A_{n+1}}_{\text{especímenes en A el año } n+1} = 80\% \text{ de } A_n + 10\% \text{ de } B_n + 10\% \text{ de } C_n = 0.8A_n + 0.1B_n + 0.1C_n.$
- $\underbrace{B_{n+1}}_{\text{especímenes en B el año } n+1} = 10\% \text{ de } A_n + 60\% \text{ de } B_n + 20\% \text{ de } C_n = 0.1A_n + 0.6B_n + 0.2C_n.$
- $\underbrace{C_{n+1}}_{\text{especímenes en C el año } n+1} = 10\% \text{ de } A_n + 30\% \text{ de } B_n + 70\% \text{ de } C_n = 0.1A_n + 0.3B_n + 0.7C_n.$

Escribiendo toda esta información en columna y empleando la definición del producto de matrices, es fácil darse cuenta de que

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.8A_n + 0.1B_n + 0.1C_n \\ 0.1A_n + 0.6B_n + 0.2C_n \\ 0.1A_n + 0.3B_n + 0.7C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot P_n.$$

Llamando $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, en definitiva hemos probado que

$$P_{n+1} = AP_n.$$

Tenemos por tanto,

$$P_1 = AP_0$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= AP_1 \\
P_3 &= AP_2 \\
P_4 &= AP_3 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

De este modo, si queremos calcular P_4 según este esquema, puesto que los únicos datos que conocemos son los del año inicial, es decir P_0 , tendremos que calcular primero P_1 , luego P_2 y P_3 y finalmente P_4 . Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned}
P_2 &= AP_1 = A(AP_1) = (AA)P_1 = A^2P_1. \\
P_3 &= AP_2 = (\text{empleando la ecuación anterior}) = A(A^2P_0) = (AA^2)P_0 = A^3P_0. \\
P_4 &= AP_3 = (\text{empleando la ecuación anterior}) = A(A^3P_0) = (AA^3)P_0 = A^4P_0.
\end{aligned}$$

Luego, utilizando potencias de matrices, podemos calcular P_4 si necesidad de obtener previamente P_0, P_1, P_2, P_3 . En realidad, es evidente que este proceso se puede aplicar iterativamente cuantas veces queramos de modo que, en general,

$$\boxed{P_n = A^n P_0} \tag{4.2}$$

Lo que vemos aquí es que la población en cada asentamiento en el año n , P_n , viene determinada por la población inicial, P_0 y la potencia n -ésima de A . La matriz A regula el paso de un año al siguiente y es la **matriz de transición** para este problema.

Puesto que conocemos la distribución de población inicial podemos calcular fácilmente la población en años sucesivos. Para ello, calculamos varias potencias de A :

$$\begin{aligned}
A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix}. \\
A^3 = AA^2 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix}. \\
A^4 = AA^3 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4934 & 0.2533 & 0.2533 \\ 0.223 & 0.3201 & 0.2945 \\ 0.2836 & 0.4266 & 0.4522 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Empleando estos cálculos con la ecuación (4.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
P_1 = AP_0 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 219 \\ 199 \\ 302 \end{pmatrix}. \\
P_2 = A^2P_0 &= \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 & 0.17 \\ 0.16 & 0.43 & 0.27 \\ 0.18 & 0.4 & 0.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225.3 \\ 201.7 \\ 293 \end{pmatrix}. \\
P_3 = A^3P_0 &= \begin{pmatrix} 0.562 & 0.219 & 0.219 \\ 0.198 & 0.355 & 0.291 \\ 0.24 & 0.426 & 0.49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229.71 \\ 202.15 \\ 288.14 \end{pmatrix}. \\
P_4 = A^4P_0 &= \begin{pmatrix} 0.4934 & 0.2533 & 0.2533 \\ 0.223 & 0.3201 & 0.2945 \\ 0.2836 & 0.4266 & 0.4522 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 190 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232.797 \\ 201.889 \\ 285.314 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Después de realizar todas estas operaciones, es evidente que el obstáculo mayor lo supone el cálculo de las potencias de A debido a que no es una matriz diagonal. Hasta la potencia cuarta el cálculo podría hacerse de forma manual pero si quisiéramos potencias más altas como A^{20} ó A^{30} , parece imprescindible recurrir a otras técnicas.

Por otro lado, una vez planteado este modelo surgen diversas cuestiones a resolver:

- a) ¿Es posible estudiar la tendencia de futuro en la distribución de la población?. Más interesante incluso que calcular la población pasado un número concreto de años sería poder describir el comportamiento futuro determinando si los individuos tienden a acumularse en un asentamiento u otro o si tienden a repartirse por igual entre ellos.
- b) ¿Existen distribuciones de equilibrio? Por ejemplo, los gestores del parque podría pensar adaptar las instalaciones de cada asentamiento (abrevaderos, caminos, etc.) teniendo en cuenta el número de especímenes que los ocuparán. Si inicialmente pudieran distribuirse los animales de modo que año tras año la población sea siempre la misma (sea estable) en cada asentamiento podría planificarse las mejoras pensando en una situación permanente.

4.6 Combinaciones lineales, independencia lineal. Rango de una matriz

El análisis de un fenómeno se basará, en general, en los datos relativos a ese fenómeno que obtenemos midiendo las variables que en él están implicadas. Determinar qué variables son esenciales o no, cuáles se pueden obtener o explicar mediante otras y en general medir la cantidad de información que poseemos sobre el fenómeno son tareas esenciales que se basan en los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia que veremos en esta sección. Comenzaremos mostrando un ejemplo que pone de manifiesto todas estas cuestiones.

Ejemplo 43. Supongamos que estamos estudiando el parque de vehículos en diferentes ciudades con el objetivo de tomar decisiones sobre el reciclado de los desechos procedentes de esos vehículos de motor. Realizamos el estudio en siete ciudades que llamaremos A, B, C, D, E, F y G. En cada una de ellas estudiaremos inicialmente dos variables:

$$N_C = \text{Número de coches presentes en la ciudad,}$$

$$N_M = \text{Número de motocicletas.}$$

Después de la correspondiente toma de datos obtenemos los siguientes valores para estas variables en cada ciudad (expresados en miles de vehículos de cada tipo):

	N_C	N_M
Ciudad A	7	6
Ciudad B	8	5
Ciudad C	10	5
Ciudad D	6	6
Ciudad E	4	5
Ciudad F	20	10
Ciudad G	9	5

Pretendemos analizar el reciclado de neumáticos y de residuos derivados del motor. Para ello es razonable que estudiemos en cada ciudad dos nuevas variables:

$$N_R = \text{Número neumáticos circulando en los vehículos de la ciudad,}$$

$$N_m = \text{Número de motores en uso.}$$

Podríamos realizar nuevas tomas de datos en las ciudades del estudio para obtener la información de estas otras dos variables, sin embargo, es evidente que cada coche tiene cuatro ruedas y dos cada moto y que habrá un único motor por vehículo. Por tanto, en este caso, no es preciso tomar más datos ya que conocidas las variables correspondientes al número de coches y motos, N_C y N_M , podemos calcular las otras dos variables debido a que claramente tendremos que

$$N_R = 4N_C + 2N_M \quad \text{y} \quad N_m = N_C + N_M. \quad (4.3)$$

De este modo si obtuviéramos los datos para todas las variables obtendríamos

	N_C	N_M	N_R	N_m
Ciudad A	7	6	40	13
Ciudad B	8	5	42	13
Ciudad C	10	5	50	15
Ciudad D	6	6	36	12
Ciudad E	4	5	26	9
Ciudad F	20	10	100	30
Ciudad G	9	5	46	14

y es posible comprobar cómo para cada ciudad se cumplen las relaciones dadas en (4.3). En realidad, cada una de las cuatro variables es una 7-upla ya que contiene siete datos, uno por ciudad, y empleando las operaciones que conocemos para uplas tenemos que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 40 \\ 42 \\ 50 \\ 36 \\ 26 \\ 100 \\ 46 \end{pmatrix}}_{=N_R} = 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \quad \text{y} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \\ 30 \\ 14 \end{pmatrix}}_{=N_m} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

Podemos comprobar que la información de N_R y N_m depende de N_C y N_M y por ello no es necesario que tomemos datos en cada ciudad para estas variables, simplemente tenemos que obtener la información para N_R y N_m combinando la que ya tenemos en N_C y N_M mediante las relaciones de dependencia dadas por las ecuaciones de (4.3). En realidad, podemos combinar N_C y N_M para obtener otras muchas variables pero todas ellas contendrán información superflua que puede ser calculada a partir de los datos que ya tenemos. Otras variables que se obtienen por combinación de N_C y N_M podrían ser:

- N_P = Número máximo de pasajeros transportables,
- N_F = Número de faros de iluminación nocturna.

Bajo el supuesto de que cada coche puede transportar cinco pasajeros y tiene dos faros y de que cada moto transporta un máximo de dos con un solo faro, son evidentes las siguientes relaciones de dependencia,

$$N_P = 5N_C + 2N_M \quad \text{y} \quad N_F = 2N_C + N_M,$$

mediante las cuales podremos calcular los valores que toman N_P y N_F en las diferentes ciudades mediante el cálculo con uplas del siguiente modo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 47 \\ 50 \\ 60 \\ 42 \\ 30 \\ 120 \\ 55 \end{pmatrix}}_{=N_P} = 5 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \quad \text{y} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 25 \\ 18 \\ 13 \\ 50 \\ 23 \end{pmatrix}}_{=N_F} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

En realidad cualquier variable, N , que se obtiene como combinación de N_C y N_M será de la forma

$$N = \alpha N_C + \beta N_M$$

y sus valores podrán calcularse mediante la operación de uplas

$$N = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M}.$$

Para distintos valores de α y β podemos obtener infinidad de variables que son combinación de N_C y N_M pero en todos los casos su información será superflua una vez que conocemos estas dos últimas.

Por otro lado, parece claro que el número de coches en una ciudad es completamente independiente del número de motos. Es decir, sabiendo el número de coches es imposible calcular el de motos e igualmente en el caso contrario. De este modo, las variables N_C y N_M son independientes entre sí y ambas son esenciales por lo que necesitamos tomar los datos de ellas dos sin que los de una puedan obtenerse a partir de los de la otra. Es decir, no existe ninguna fórmula del tipo

$$N_C = \alpha N_M \quad \text{ó} \quad N_M = \alpha N_C$$

que permita obtener N_C como combinación de N_M o al revés.

Así pues, parece claro que en este problema las variables esenciales son N_C y N_M de las cuales podemos derivar otras como combinación.

El ejemplo anterior sirve de introducción para los conceptos de combinación, dependencia e independencia lineal que introducimos en la siguiente definición. Es evidente que en lugar de estudiar siete ciudades, el estudio podría ampliarse a ocho, nueve o, en general, n . En tal caso, para cada variable sería una n -upla con n datos, uno por cada ciudad. Asimismo, en nuestro estudio pueden participar mas de dos variables, en su lugar podríamos tener tres, cuatro ó, en general, m con lo cual tendríamos m , n -uplas, una para cada variable.

Definición 44. Consideremos las n -uplas $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

i) Decimos que la n -upla, $w \in \mathbb{R}^n$, es combinación lineal v_1, v_2, \dots, v_m si

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

para ciertos números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ que denominamos coeficientes de la combinación. El conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_m se denota $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

ii) Decimos que v_1, v_2, \dots, v_m son independientes si ninguna de ellas puede obtenerse como combinación lineal de las demás. Decimos que una única upla es independiente (es decir, $m = 1$) siempre que no sea nula.

iii) Decimos que v_1, v_2, \dots, v_m son dependientes si no son independientes.

Estos conceptos corresponden directamente con las ideas que hemos presentado en el ejemplo al comienzo de la sección. En efecto, aplicando esta nueva terminología en el ejemplo anterior podemos decir que:

- Las uplas N_R, N_m, N_P y N_F son combinación lineal de N_C y N_M . Dicho de otro modo,

$$N_R, N_m, N_P, N_F \in \langle N_C, N_M \rangle.$$

Podemos obtener además muchas otras combinaciones de N_C y N_M y todas serán de la forma $\alpha N_C + \beta N_M$ para ciertos números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\langle N_C, N_M \rangle = \{ \alpha N_C + \beta N_M : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

- El conjunto formado por las uplas $N_C, N_M, N_R, N_m, N_P, N_F$ es linealmente dependiente ya que algunas de ellas (las cuatro últimas) pueden obtenerse como combinación lineal de las otras (de las dos primeras). En consecuencia en dicho conjunto sabemos que hay uplas (variables) superfluas cuya información puede ser obtenida a partir de las demás.
- Las uplas N_C y N_M son independientes ya que ninguna es combinación lineal de la otra. En consecuencia la información que contienen estas dos uplas es imprescindible y ninguna de ellas puede ser considerada superflua.

A partir de varias uplas podemos generar otras muchas mediante combinaciones lineales. En el ejemplo anterior, hemos visto que a partir de N_C y N_M podemos obtener muchas otras nuevas uplas como N_R, N_m, N_P o N_F y en realidad podríamos obtener una infinidad ya que simplemente modificando los coeficientes que utilizamos en cada combinación lineal obtendremos una nueva. Es por ello que el conjunto $\langle N_C, N_M \rangle$ tiene infinitos elementos. Esto mismo sucede cuando tenemos cualesquiera otras uplas, combinándolas podremos obtener una cantidad ilimitada de nuevas uplas y el conjunto de sus combinaciones lineales será también infinito.

La siguiente propiedad es esencial ya que hace hincapié en la idea de que una upla que puede obtenerse como combinación lineal de otras es superflua en cierto sentido. En concreto veremos que, a la hora de generar combinaciones lineales, una de tales uplas es innecesaria y puede ser eliminada.

Propiedad 45. Dadas las n -uplas w y v_1, v_2, \dots, v_m , se tiene que

$$\underbrace{w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle}_{\text{Si } w \text{ se obtiene como combinación de } v_1, v_2, \dots, v_m} \Leftrightarrow \underbrace{\langle w, v_1, v_2, \dots, v_m \rangle}_{\text{todas las combinaciones obtenidas empleando } w} = \underbrace{\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle}_{\text{también se pueden obtener si eliminamos } w}.$$

Por tanto, cuando tenemos un conjunto de uplas y averiguamos que son dependientes, sabremos también que, a la hora de obtener uplas mediante combinaciones lineales, dicho conjunto se podrá simplificar ya que tendremos uplas superfluas. Por ejemplo, combinando N_C, N_M y N_R podemos obtener muchas uplas que formarán el conjunto

$$\langle N_C, N_M, N_R \rangle.$$

Ahora bien, sabemos que estas tres uplas, $\{N_C, N_M, N_R\}$ forman un conjunto dependiente ya que N_R se puede obtener como combinación de las otras dos. En consecuencia, N_R es superflua y la podemos eliminar ya que

$$\underbrace{\langle N_C, N_M, N_R \rangle}_{\text{todas las combinaciones obtenidas empleando } N_R} = \underbrace{\langle N_C, N_M \rangle}_{\text{también se pueden obtener si eliminamos } N_R}.$$

Dicho de otro modo, al ser dependiente, en el conjunto inicial de combinaciones podemos eliminar N_R ,

$$\langle N_C, N_M, \cancel{N_R} \rangle.$$

Veamos algunos ejemplos adicionales.

Ejemplos 46.

1) Consideremos las columnas

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si las sumamos multiplicadas por los números 5, 2 y -1 obtenemos

$$5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}}.$$

Por tanto, la upla $(18, 11, -8)$ se obtiene como combinación de las tres iniciales siendo los coeficientes de esa combinación 5, 2 y -1 . Escribiendo esto mismo de otra manera, podremos poner que

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2) Tomemos ahora las 5-uplas

$$(2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6) \quad \text{y} \quad (-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1).$$

Nuevamente podemos combinarlas para obtener una fila distinta a las iniciales. Por ejemplo podemos multiplicar por 3 y 2,

$$\begin{aligned} & 3(2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6) + 2(-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) = \\ & = (6 \ 9 \ 0 \ 0 \ 18) + (-2 \ 4 \ 6 \ 0 \ 2) = \boxed{(4 \ 13 \ 6 \ 0 \ 20)}. \end{aligned}$$

Si hubiéramos elegido coeficientes diferentes habríamos conseguido como resultado una fila también diferente. De esta forma, si ahora tomamos 4 y -1 tenemos

$$\begin{aligned} & 4(2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6) + (-1)(-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) = \\ & = (8 \ 12 \ 0 \ 0 \ 24) + (1 \ -2 \ -3 \ 0 \ -1) = \boxed{(9 \ 10 \ -3 \ 0 \ 23)}. \end{aligned}$$

En definitiva tenemos que

$$(4 \ 13 \ 6 \ 0 \ 20), (9 \ 10 \ -3 \ 0 \ 23) \in \langle (2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6), (-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) \rangle.$$

En realidad, cambiando los coeficientes que utilizamos para combinar las dos filas iniciales podríamos generar una cantidad infinita de nuevas combinaciones lineales y por ello sabemos que el conjunto

$$\langle (2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6), (-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) \rangle$$

tiene infinitos elementos. A pesar de ello, cabe preguntarse si es posible conseguir cualquier 5-upla o si por el contrario existen uplas de \mathbb{R}^5 que no se pueden obtener combinando las dos iniciales. En este caso es fácil comprobar que se da la segunda opción ya que podemos comprobar directamente que mediante las dos filas que tenemos no es posible conseguir la 5-upla $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$ como combinación lineal ya que, no importa qué números a_1 y a_2 escojamos para realizar la combinación, siempre tendremos

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_1(2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6) + a_2(-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1)}_{\substack{\text{el resultado siempre tiene} \\ \text{un 0 en la cuarta posición}}} \quad \text{y} \quad \underbrace{(0 \ 0 \ 0 \ \boxed{1} \ 0)}_{\substack{\text{la fila que pretendemos} \\ \text{obtener tiene un 1} \\ \text{en la cuarta posición}}} \end{aligned}$$

y por ello ninguna combinación de las dos filas iniciales podrá producir la fila en cuestión. Es decir,

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \notin \langle (2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6), (-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) \rangle$$

y en consecuencia

$$\langle (2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6), (-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1) \rangle \neq \mathbb{R}^5.$$

Es decir, no toda 5-upla puede ser obtenida como combinación lineal de $(2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6)$ y $(-1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1)$.

3) Consideremos las columnas $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Realizando combinaciones lineales de estas columnas es posible obtener otras nuevas. El conjunto de todas sus combinaciones lineales será

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ & = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, tomando $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = 3$ obtenemos la combinación lineal

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La cuestión es si es posible obtener las mismas combinaciones lineales con menos columnas o, dicho de otra manera, si hay alguna de las cuatro columnas que sea superflua. Dar respuesta a esta pregunta resulta sencillo si nos percatamos de que la tercera columna puede ser obtenida combinando las otras tres en la forma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Directamente esto significa que las cuatro columnas iniciales son dependientes ya que una de ellas (la tercera) se obtiene combinando las demás y en tal caso, si aplicamos la **Propiedad 45**, sabemos entonces que podemos prescindir de esa tercera columna. Pero, ¿cuál es el motivo de ello? ¿Realmente podremos obtener las mismas combinaciones si prescindimos de esa columna? Veamos que es fácil responder afirmativamente a ambas preguntas.

Utilizando la relación de dependencia (4.4) es sencillo comprobar que cualquier combinación de las cuatro columnas también puede ser obtenida utilizando solamente las columnas primera, segunda y cuarta. Por

ejemplo, $\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación de las cuatro columnas pero empleando (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Sustituimos} \\ \text{empleando (4.4)}}} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \overbrace{\left(2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}^{\downarrow} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente con utilizar las columnas primera, segunda y cuarta. El hecho de que podamos expresar la tercera columna como combinación lineal de las demás nos ha permitido eliminarla de la combinación lineal. En realidad, este mismo argumento es válido para cualquier combinación de las cuatro columnas y en consecuencia

$$\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{Todas las combinaciones obtenidas empleando las cuatro columnas,}} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{también se pueden obtener si eliminamos la tercera}}$$

En definitiva, la tercera columna es superflua a la hora de obtener combinaciones lineales y podríamos eliminarla,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Veamos a continuación algunas notas complementarias sobre dependencia, independencia y combinaciones lineales.

Nota.

★ Téngase en cuenta que la notación $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ que vimos en la **Definición 44** se utiliza en ocasiones para abreviar en la escritura. Así, en lugar de escribir

‘Sea v un elemento de \mathbb{R}^3 que es combinación lineal de $(1, 2, -1)$ y $(2, 2, 1)$ ’

pondremos

‘Sea $v \in \langle (1, 2, -1), (2, 2, 1) \rangle$ ’.

★ La upla cero siempre puede ser obtenida como combinación lineal de cualesquiera uplas v_1, v_2, \dots, v_m (es decir siempre se tiene que $0 \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$). Para ello basta con tomar nulos todos los coeficientes de la combinación lineal,

$$0 = 0v_1 + v_2 + \dots + 0v_m.$$

Esta forma de obtener la upla cero, por ser la más sencilla se denomina ‘trivial’.

Ejemplo 47. Dadas las filas $(2 \ 3 \ 4)$ y $(4 \ 3 \ 9)$, podemos obtener la fila cero (en este caso la fila cero será $0_{1 \times 3} = (0 \ 0 \ 0)$) tomando iguales a cero los dos coeficientes de la combinación lineal en la forma

$$(0 \ 0 \ 0) = 0(2 \ 3 \ 4) + 0(4 \ 3 \ 9).$$

Esta sería la forma trivial de obtener la upla cero.

★ Como consecuencia del comentario anterior, cualquier conjunto de uplas que contenga a la upla 0 será siempre linealmente dependiente. En efecto, sabemos que la upla 0 siempre se podrá obtener como combinación lineal de las demás y por ello el conjunto de uplas ha de ser dependiente.

Ejemplo 48. Sin necesidad de realizar cálculo alguno sabemos que las uplas $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ son dependientes ya que una de ellas es la upla cero que se puede obtener como combinación lineal de las demás en la forma

$$(0, 0, 0) = 0(1, 2, -1) + 0(2, 1, 1).$$

★ Dadas varias uplas v_1, v_2, \dots, v_m , en general, el conjunto de sus combinaciones lineales, $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ siempre tiene infinitos elementos. Es decir, hay una cantidad infinita de combinaciones lineales que se pueden obtener a partir de ciertas uplas.

Ejemplo 49. Si tomamos las uplas $(2, 1)$ y $(3, 2)$ podemos obtener diversas combinaciones lineales a partir de ellas y todas serán de la forma

$$a_1(2, 1) + a_2(3, 2),$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de la combinación. Dando distintos valores a a_1 y a_2 obtendremos sus diferentes combinaciones. Así por ejemplo:

- Tomando $a_1 = 3$ y $a_2 = -1$: $3(2, 1) + (-1)(3, 2) = (3, 1)$.
- Tomando $a_1 = 2$ y $a_2 = 2$: $2(2, 1) + 2(3, 2) = (10, 6)$.
- Tomando $a_1 = 1$ y $a_2 = 0$: $1(2, 1) + 0(3, 2) = (2, 1)$.
- Tomando $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$: $0(2, 1) + 1(3, 2) = (3, 2)$.
- Tomando $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$: $0(2, 1) + 0(3, 2) = (0, 0)$.

Tenemos que todas las combinaciones así obtenidas son elementos de $\langle (2, 1), (3, 2) \rangle$. Es decir,

$$(3, 1), (10, 6), (2, 1), (3, 2), (0, 0) \in \langle (2, 1), (3, 2) \rangle.$$

En general tenemos que

$$\langle (2, 1), (3, 2) \rangle = \underbrace{\left\{ \underbrace{a_1(2, 1) + a_2(3, 2)}_{\text{combinaciones de } (2,1), (3,2)} : \underbrace{a_1, a_2 \in \mathbb{R}}_{\text{Los coeficientes van tomando distintos valores reales}} \right\}}_{\text{Reuniendo todas estas combinaciones obtenemos todo } \langle (2, 1), (3, 2) \rangle}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, en general tenemos que

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \underbrace{\left\{ \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m}_{\text{Combinaciones de } v_1, \dots, v_m} : \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}}_{\text{Los coeficientes van tomando distintos valores reales}} \right\}}_{\text{Reuniendo todas estas combinaciones obtenemos todo } \langle v_1, \dots, v_m \rangle}.$$

Existe un único caso en el que el conjunto de combinaciones lineales no es infinito y tiene un solo elemento. Este caso es aquel en que la única upla de que disponemos para obtener combinaciones lineales es la upla cero. Entonces, la única upla que podemos obtener como combinación lineal es la propia upla cero. Es decir,

$$\langle 0 \rangle = \{0\}.$$

Ejemplo 50. Tomemos la upla 0 de \mathbb{R}^3 , $(0, 0, 0)$. Tenemos que

$$\langle (0, 0, 0) \rangle = \left\{ \underbrace{a_1(0, 0, 0)}_{\substack{=(0,0,0) \\ \text{siempre sale lo mismo}}} : a_1 \in \mathbb{R} \right\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Por más valores que demos a a_1 solamente obtenemos $(0, 0, 0)$

De esta forma vemos que $\langle (0, 0, 0) \rangle$ no tiene infinitos elementos como sucede en general sino solamente uno.

★ Siempre se cumple que

$$v_1, v_2, \dots, v_m \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle.$$

Es decir, v_1, v_2, \dots, v_m se pueden obtener como combinación lineal de las uplas v_1, v_2, \dots, v_m . Pero esto es claro ya que v_i se consigue tomando nulos todos los coeficientes excepto el que multiplica a v_i que lo tomaremos igual a 1:

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_m.$$

Ejemplo 51. Tenemos que

$$(2, -1, 2) \in \langle (1, 2, 1), (2, -1, 2), (3, 3, 1) \rangle$$

ya que podemos obtener $(2, -1, 2)$ mediante la siguiente combinación

$$(2, -1, 2) = 0(1, 2, 1) + 1(2, -1, 2) + 0(3, 3, 1)$$

en la que los coeficientes son 0, 1 y 0. Razonando igualmente es claro también que

$$(1, 2, 1), (3, 3, 1) \in \langle (1, 2, 1), (2, -1, 2), (3, 3, 1) \rangle.$$

★ Es evidente que si tenemos más uplas con ellas podremos realizar también más combinaciones lineales. Es decir, si tenemos las m uplas $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ y adicionalmente tomamos q uplas más, $w_1, w_2, \dots, w_q \in \mathbb{R}^m$, se cumple que

$$\underbrace{\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle}_{\substack{\text{Todas las combinaciones} \\ \text{que podemos obtener} \\ \text{combinando } v_1, \dots, v_m}} \subseteq \underbrace{\langle v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_q \rangle}_{\substack{\text{también las podemos obtener} \\ \text{combinando } v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_q}}.$$

Ello es claro ya que si v se obtiene como combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_m con los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_p ,

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_pv_m,$$

entonces v también se obtiene como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_q$ tomando ahora como coeficientes a_1, a_2, \dots, a_p y $0, 0, \dots, 0$,

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_pv_m + 0w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_q.$$

Ejemplo 52. Dados $(2, 3, -1, 0), (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ y adicionalmente $(1, 6, 3, 1), (0, 3, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$, cualquier combinación de los dos primeros, por ejemplo

$$3(2, 3, -1, 0) + 2(1, 2, 1, 1) = (8, 13, -1, 2),$$

puede escribirse también como combinación de los cuatro, por ejemplo

$$(8, 13, -1, 2) = 3(2, 3, -1, 0) + 2(1, 2, 1, 1) + 0(1, 6, 3, 1) + 0(0, 3, 0, 1).$$

Por tanto,

$$\langle (2, 3, -1, 0), (1, 2, 1, 1) \rangle \subseteq \langle (2, 3, -1, 0), (1, 2, 1, 1), (1, 6, 3, 1), (0, 3, 0, 1) \rangle.$$

★ Si v_1, v_2, \dots, v_p son independientes entre sí cualquier subconjunto de uplas que escojamos de entre ellas son también linealmente independientes entre sí.

Ejemplo 53. Es posible comprobar que las 4-uplas

$$(1, 2, -1, 1), (2, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, -2, 1, 1)$$

son independientes. En tal caso cualquier subconjunto de ellas que tomemos también será independiente. Por ejemplo,

$$(1, 2, -1, 1), (0, -1, 1, 1), (2, -2, 1, 1)$$

son uplas independientes.

★ Si entre las uplas v_1, v_2, \dots, v_p aparece alguna de ellas repetida, entonces dichas uplas son linealmente dependientes entre sí.

Ejemplo 54. Las 4-uplas

$$(3, 2, -1, 2), (2, 1, 2, 1), (3, 2, -1, 2), (7, 2, 3, 1)$$

son dependientes entre sí ya que una de ellas aparece repetida. Para verlo basta tomar una de las uplas que aparece repetida, $(3, 2, -1, 2)$, e intentar obtenerla como combinación de las restantes que en este caso son $(2, 1, 2, 1)$, $(3, 2, -1, 2)$ y $(7, 2, 3, 1)$. Al estar repetida, entre las restantes aparecerá nuevamente la upla que queremos obtener y entonces es sencillo plantear la combinación tomando nulos todos los coeficientes menos el correspondiente al de la upla repetida:

$$\underbrace{(3, 2, -1, 2)}_{\text{La upla repetida}} = 0 \underbrace{(2, 1, 2, 1)}_{\text{aparece entre las restantes}} + 1 \underbrace{(3, 2, -1, 2)}_{\text{aparece entre las restantes}} + 0(7, 2, 3, 1)$$

y por tanto podemos obtenerla fácilmente como combinación lineal.

4.6.1 Técnicas básicas para el estudio de la dependencia lineal

Sabemos ya lo que es una combinación lineal y conocemos los conceptos de dependencia e independencia. Necesitamos ahora técnicas que nos permitan dar solución a problemas relativos a estos conceptos. En concreto, precisamos resolver los siguientes problemas:

- a) Determinar si una upla puede obtenerse o no combinando otras.
- b) Determinar si un conjunto de uplas son dependientes o independientes.

Veamos como podemos hacerlo.

Determinar si una upla es combinación lineal de otras

Sabemos que una upla, $w \in \mathbb{R}^n$, es combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ si podemos encontrar los números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m.$$

En realidad, cuando desconocemos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, la expresión anterior constituye un sistema lineal de ecuaciones cuyas variables son los coeficientes que queremos determinar. Si podemos resolver dicho sistema podremos encontrar los números que buscamos y w se podrá obtener como combinación lineal; en caso contrario, ello no será posible.

Veámoslo mejor en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 55.

1) Determinar si la upla

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de las uplas N_C y N_M del **Ejemplo 43**. N_1 será combinación lineal si podemos encontrar los números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$N_1 = \alpha N_C + \beta N_M.$$

Si sustituimos el valor de cada upla y efectuamos las operaciones matriciales que aparecen en la expresión, tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 6\beta \\ 8\alpha + 5\beta \\ 10\alpha + 5\beta \\ 6\alpha + 6\beta \\ 4\alpha + 5\beta \\ 20\alpha + 10\beta \\ 9\alpha + 5\beta \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones

y si ahora igualamos por filas llegamos a

$$\begin{cases} 7\alpha + 6\beta = 1 \\ 8\alpha + 5\beta = 3 \\ 10\alpha + 5\beta = 5 \\ 6\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + 5\beta = -1 \\ 20\alpha + 10\beta = 10 \\ 9\alpha + 5\beta = 4 \end{cases}.$$

Tal y como dijimos, cuando desconocemos el valor de los coeficientes, al plantear la combinación lineal obtenemos un sistema lineal de ecuaciones. Ahora debemos intentar resolver este sistema para responder a la cuestión planteada. En este caso es sencillo encontrar la solución. Por ejemplo, si a la ecuación tercera restamos la segunda tendremos que $\alpha = 1$ y luego sustituyendo en cualquier otra ecuación podemos despejar para obtener $\beta = -1$. Podemos comprobar que todas las ecuaciones se cumplen para estos valores de α y β . Por tanto, hemos calculado los coeficientes α y β que necesitamos y ahora sabemos que N_1 se puede escribir como

$$N_1 = N_C - N_M.$$

Así pues $N \in \langle N_C, N_M \rangle$, es decir, N se puede obtener combinando N_C y N_M tal y como se indica en esta última relación de dependencia.

Véase que el problema se reduce a encontrar la solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Estudiemos ahora el mismo problema para la upla

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Repetiendo los mismos pasos, debemos encontrar nuevamente los coeficientes α y β de modo que

$$N_2 = \alpha N_C + \beta N_M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=N_C} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=N_M} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 6\beta \\ 8\alpha + 5\beta \\ 10\alpha + 5\beta \\ 6\alpha + 6\beta \\ 4\alpha + 5\beta \\ 20\alpha + 10\beta \\ 9\alpha + 5\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha + 6\beta = 1 \\ 8\alpha + 5\beta = 1 \\ 10\alpha + 5\beta = 1 \\ 6\alpha + 6\beta = 1 \\ 4\alpha + 5\beta = 1 \\ 20\alpha + 10\beta = 1 \\ 9\alpha + 5\beta = 1 \end{cases}.$$

Debemos ahora determinar si este sistema tiene solución o no. Si restamos la ecuación segunda a la tercera obtenemos que $\alpha = 0$. Si ahora despejamos β en la primera ecuación tendremos que $\beta = 1/6$. Por contra, si despejamos en la segunda, $\beta = 1/8$. Puesto que β no puede tomar simultáneamente dos valores diferentes, concluimos que el sistema no tiene solución y, en consecuencia, no es posible encontrar los coeficientes α y β que necesitamos. Por tanto, finalmente tenemos que

$$N_2 \notin \langle N_C, N_M \rangle$$

y la upla N_2 no se puede obtener combinando N_C y N_M .

2) Comprobar si $(3, 3, 1) \in \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1) \rangle$.

Nuevamente debemos encontrar los coeficientes, en este caso tres, necesarios para formar la combinación que produzca la upla $(3, 3, 1)$,

$$(3, 3, 1) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(2, 1, 1).$$

Efectuando las operaciones e igualando tenemos

$$(3, 3, 1) = (\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}.$$

Para resolver el sistema,

$$\begin{cases} \text{restando la ecuación última a la primera} & \Rightarrow \gamma = 2, \\ \text{restando la ecuación última a la segunda} & \Rightarrow \alpha = 2, \\ \text{sustituyendo y despejando en la tercera} & \Rightarrow \beta = -3. \end{cases}$$

Por tanto

$$(3, 3, 1) = 2(1, 2, 1) - 3(1, 1, 1) + 2(2, 1, 1)$$

y $(3, 3, 1) \in \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1) \rangle$.

3) Estudiar si $(1, 0, 0) \in \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 3, 2) \rangle$.

Repetiendo el proceso obtendremos nuevamente un sistema lineal de ecuaciones,

$$(1, 0, 0) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(2, 3, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

y es evidente que la primera y la última ecuación no pueden cumplirse al mismo tiempo ya que $\alpha + \beta + 2\gamma$ no puede valer al mismo tiempo 1 y 0. En consecuencia este sistema no tiene solución y no podemos encontrar los coeficientes α , β y γ . Por tanto,

$$(1, 0, 0) \notin \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 3, 2) \rangle.$$

Estudio de la dependencia e independencia lineal

Dadas varias uplas $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sabemos que siempre es posible combinarlas para obtener de forma trivial la upla 0 de \mathbb{R}^n (que es la n -upla con todos sus datos iguales a 0, $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$). Para ello basta con formar la combinación lineal de ellas con todos los coeficientes iguales a cero ya que claramente

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m = 0.$$

Pero, ¿es esta la única manera de obtener la upla 0 como combinación de v_1, v_2, \dots, v_m o existirán otras? En realidad esta pregunta es la clave para determinar si las uplas v_1, v_2, \dots, v_m son o no independientes.

Para justificar esto último, retornemos al **Ejemplo 43** en el que estudiábamos el parque de vehículos de motor en diferentes ciudades y tomemos las uplas N_C, N_M y N_R que respectivamente contenían la información correspondiente al número de coches, motocicletas y ruedas circulando en cada ciudad. Puesto que

$$N_R = 4N_C + 2N_M,$$

sabemos que estas tres uplas, $\{N_C, N_M, N_R\}$, son dependientes ya que una de ellas se puede obtener combinando las demás. Si pasamos en esta última igualdad todos los sumandos a un mismo miembro tenemos

$$4N_C + 2N_M - N_R = 0,$$

donde $0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ es la 7-upla nula. De este modo, al ser dependientes podemos encontrar una forma de obtener la upla 0 diferente de la trivial.

Esta idea que acabamos de ilustrar con este ejemplo queda plasmada de forma precisa en la siguiente propiedad que recoge la técnica básica para estudiar la dependencia o independencia de un conjunto de uplas.

Propiedad 56. *Consideremos las uplas $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces si los únicos valores de los números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ para los que obtenemos*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

son $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, dichas uplas son independientes. En caso contrario, las uplas serán dependientes.

Veámoslo más claro en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 57.

1) Estudiemos si las uplas $(2, 3, 1), (4, 6, 4), (4, 6, 3) \in \mathbb{R}^3$ son dependientes o independientes. Para ello debemos determinar para qué números α_1, α_2 y α_3 tenemos

$$\alpha_1(2, 3, 1) + \alpha_2(4, 6, 4) + \alpha_3(4, 6, 3) = (0, 0, 0).$$

Primero efectuaremos las operaciones matriciales indicadas en esta igualdad con lo que llegamos a

$$(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

y ahora igualando ambos miembros finalmente obtenemos el sistema lineal de tres variables y tres ecuaciones,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} .$$

Resolviendo este sistema debemos determinar cuáles son los posibles valores para α_1, α_2 y α_3 . En este caso,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 & \xrightarrow{\text{dividiendo por 2}} & \alpha_1 + \cancel{2\alpha_2} + \cancel{2\alpha_3} = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 & \xrightarrow{\text{dividiendo por 3}} & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & & \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} ,$$

donde hemos eliminado la primera ecuación por coincidir con la segunda. Ahora el sistema queda

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ecuación 2 menos ecuación 1}} \\ \xrightarrow{\text{sustituyendo}} \end{array} \begin{cases} \alpha_3 = -2\alpha_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_2 \end{cases} .$$

Se trata por tanto de un sistema compatible indeterminado que tendrá infinitas soluciones. Para cada valor de α_2 podemos calcular α_1 y α_3 mediante las ecuaciones que hemos obtenido. Puesto que tenemos infinitas soluciones podremos encontrar expresiones de la upla nula diferentes de la trivial y directamente la **Propiedad 56** nos indica que estas uplas son dependientes.

Aunque ya sabemos que las uplas son dependientes, a modo de ejemplo, podemos obtener una solución concreta del sistema y su combinación lineal correspondiente. Si tomamos $\alpha_2 = 1$ obtenemos, mediante las ecuaciones anteriores, la solución

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2,$$

que nos conduce a la siguiente expresión, no trivial, de la upla nula,

$$2(2, 3, 1) + (4, 6, 4) - 2(4, 6, 3) = (0, 0, 0).$$

En realidad, a partir de esta combinación no trivial podemos deducir que las uplas son dependientes utilizando la propia definición de dependencia ya que nos permite despejar una de las uplas como combinación lineal de las otras. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= \boxed{2}(2, 3, 1) + \boxed{1}(4, 6, 4) + \boxed{-2}(4, 6, 3) \Rightarrow (0, 0, 0) - \boxed{2}(2, 3, 1) = \boxed{1}(4, 6, 4) + \boxed{-2}(4, 6, 3) \\ &\Rightarrow (2, 3, 1) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{-2}}(4, 6, 4) + \frac{\boxed{2}}{\boxed{-2}}(4, 6, 3) \end{aligned}$$

Vemos de esta manera que $(2, 3, 1)$ es combinación lineal de $(4, 6, 4)$ y $(4, 6, 3)$ y tenemos de nuevo la dependencia.

2) Comprobemos si las uplas $(1, 1, 3)$, $(2, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$ son dependientes o independientes.

Para ello, emplearemos la **Propiedad 56**. Supongamos que cierta combinación lineal de las uplas proporciona la upla cero,

$$a_1(1, 1, 3) + a_2(2, 0, -1) + a_3(-1, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Debemos determinar los coeficientes de esta combinación, a_1 , a_2 y a_3 . Para ello resolveremos el sistema lineal de ecuaciones que surge cuando efectuamos las operaciones que aparecen indicadas en la combinación lineal e igualamos. Veámoslo,

$$a_1(1, 1, 3) + a_2(2, 0, -1) + a_3(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

↓

$$(a_1, a_1, 3a_1) + (2a_2, 0, -a_2) + (-a_3, 0, a_3) = (0, 0, 0)$$

↓

$$(a_1 + 2a_2 - a_3, a_1, 3a_1 - a_2 + a_3) = (0, 0, 0)$$

Para que dos uplas sean iguales,
↓ cada una de sus componentes
deben ser iguales.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 3a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Los coeficientes a_1 , a_2 y a_3 deben cumplir las ecuaciones del sistema anterior. Ahora bien, si resolvemos el sistema obtenemos fácilmente que

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

y por tanto los coeficientes de la combinación son todos forzosamente iguales a cero. De este modo, comprobamos que en este caso la única forma de obtener la upla cero consiste en tomar todos los coeficientes de la combinación nulos y deducimos que las uplas son independientes.

3) Estudiar la dependencia e independencia de las uplas $(2, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(4, -1, 0, 3)$, $(0, 1, 1, 0)$.

Emplearemos la misma técnica que en el apartado anterior, igualando a cero una combinación lineal de las uplas y obteniendo el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$x(2, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(4, -1, 0, 3) + w(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

↓

$$(2x, 0, 0, x) + (0, y, 0, -y) + (4z, -z, 0, 3z) + (0, w, w, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

↓

$$(2x + 4z, y - z + w, w, x - y + 3z) = (0, 0, 0, 0)$$

↓

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ y - z + w = 0 \\ w = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} .$$

Si resolvemos el sistema observamos que solamente podemos despejar tres de las variables en la forma

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = z \\ w = 0 \end{cases} .$$

Es fácil darse cuenta de que este es un sistema con infinitas soluciones que podemos obtener dando distintos valores a z en las igualdades anteriores. Al disponer de soluciones diferentes de la trivial directamente, mediante la **Propiedad 56**, deducimos que las uplas son dependientes.

4) Consideremos los n elementos $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ de \mathbb{R}^n definidos como sigue:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0),$$

⋮

$$e_n = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Es fácil que ver que son independientes entre sí empleando nuevamente la **Propiedad 56**. Para ello, supongamos que obtenemos la upla 0 de \mathbb{R}^n (es decir $0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$) como combinación lineal de e_1, e_2, \dots, e_n en la forma

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

y veamos que en tal caso la única posibilidad es que todos los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sean iguales a cero. Tenemos que

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, 0, \dots, 1) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) + (0, 0, 0, \dots, \alpha_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \vdots \\ \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Por tanto todos los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son forzosamente nulos y como consecuencia e_1, e_2, \dots, e_n son independientes.

Las uplas e_1, e_2, \dots, e_n de \mathbb{R}_n se denominan n -uplas coordenadas de \mathbb{R}^n y veremos que desempeñan un papel importante dentro de la teoría de matrices. Para cada conjunto $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, etc. tenemos un conjunto diferente de n -uplas coordenadas. Veamos algunos ejemplos:

- En \mathbb{R}^2 las 2-uplas coordenadas son 2:

$$e_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad e_2 = (0, 1).$$

Sabemos además que e_1 y e_2 son independientes entre sí.

- En \mathbb{R}^3 las 3-uplas coordenadas serán 3:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Estas tres uplas son independientes entre sí.

- En \mathbb{R}^4 las 4 uplas coordenadas son

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \text{y} \quad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Nuevamente, estas cuatro uplas forman un conjunto linealmente independiente.

De la misma forma disponemos de las n -uplas coordenadas para cualquier conjunto \mathbb{R}^n .

Véase que la notación e_1, e_2 , etc. es ambigua. Dependiendo de que estemos en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ó \mathbb{R}^4 , e_1 ó e_2 significarán cosas diferentes. Es algo similar a lo que ocurre con la upla 0 que será $0 = (0, 0)$ para \mathbb{R}^2 ó $0 = (0, 0, 0)$ para \mathbb{R}^3 . Es preciso ser cuidadoso con los problemas que plantea esta ambigüedad y como siempre, determinar en función del contexto de cada problema la opción adecuada.

4.6.2 Rango de una matriz

En este apartado introduciremos el concepto de rango de una matriz y describiremos técnicas que permiten calcularlo fácilmente. A través de las propiedades que veremos para el rango podremos estudiar la dependencia e independencia de conjuntos de uplas de forma rápida.

Dada cualquier matriz podemos considerar las uplas fila o columna de dicha matriz. El análisis de estas uplas fila o columna permite definir el concepto de rango de una matriz.

Definición 58. Dada la matriz $A = (v_1|v_2|\dots|v_n) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ cuyas uplas columna son v_1, v_2, \dots, v_n , llamamos rango de la matriz A , y lo denotamos

$$\text{rango}(A) \quad \text{ó} \quad r(A),$$

al tamaño del mayor subconjunto de uplas independientes que podemos encontrar entre las uplas columna v_1, v_2, \dots, v_n . Por definición, diremos que el rango de la matriz $0_{m \times n}$ es 0.

Ejemplos 59.

1) Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus uplas columna son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras corresponden a las uplas coordenadas e_1 y e_2 de \mathbb{R}^3 y las dos ultimas son iguales a la upla 0. Para calcular el rango tenemos que obtener conjuntos independientes a partir de las uplas columna y quedarnos con el mayor de estos conjuntos (el que tenga el mayor número de elementos). Las 3-uplas coordenadas de \mathbb{R}^3 , que son e_1 , e_2 y e_3 , forman un conjunto independiente y cualquier subconjunto suyo sigue siendo independiente por lo que $\{e_1, e_2\}$ es linealmente independiente. Por tanto, tomando las dos primeras columnas de A , tenemos el conjunto

$$\{e_1, e_2\}$$

que es independiente y tiene tamaño 2. Podemos preguntarnos si existirá algún conjunto de columnas independiente con más elementos. Ahora bien, sabemos que cualquier conjunto que contenga a la upla 0 será siempre dependiente. Por tanto las dos últimas columnas nunca podrán intervenir en ningún conjunto independiente. De aquí deducimos que cualquier conjunto de uplas columna mayor que $\{e_1, e_2\}$ debería incluir al menos una de las uplas 0 y no sería independiente. De este modo, el mayor conjunto de uplas columnas independiente que podemos conseguir es $\{e_1, e_2\}$ que tiene tamaño 2 y en consecuencia

$$\text{rango}(A) = 2.$$

2) Tomemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus uplas columna,

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$$

coinciden con las tres primeras uplas coordenadas de \mathbb{R}^4 , e_1 , e_2 y e_3 . Pero cualquier subconjunto de las uplas coordenadas forma un subconjunto independiente y por tanto las uplas columna de la matriz B son independientes entre sí. El conjunto linealmente independiente más grande que podemos obtener a partir de estas tres columnas consistirá por tanto en tomarlas todas y por ello tendrá tamaño 3. En consecuencia,

$$\text{rango}(B) = 3.$$

3) Empleando los mismos argumentos que en los dos ejemplos anteriores podemos calcular a simple vista el rango de algunas matrices sencillas:

$$\bullet \text{ rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\bullet \text{ rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

- $\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$
- $\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

4) En la **Definición 58** se establece que el rango de la matriz cero es siempre 0. Algunos ejemplos de esto son:

- $\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$
- $\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

En realidad, las uplas columna de la matriz cero son todas ellas iguales a la upla cero correspondiente y por tanto nunca podemos formar con ellas ningún conjunto independiente. De ahí que el rango de estas matrices se establezca como 0.

En los ejemplos anteriores vemos que es posible calcular el rango de matrices sencillas en las que todos los elementos son nulos excepto algunos unos dispuestos en diagonal. Esquemáticamente representamos todas ellas de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

que designa a una matriz con todos sus elementos nulos excepto r unos dispuestos en diagonal. Teniendo en cuenta los ejemplos vistos la siguiente propiedad resulta evidente:

Propiedad 60. Dado $r, n, m \in \mathbb{N}$:

i) $\text{rango} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = r.$

ii) $\text{rango}(I_r) = r.$

iii) $\text{rango}(0_{n \times m}) = 0.$

Dicho de otra manera, para calcular el rango de una matriz con todos sus elementos nulos excepto unos en diagonal, únicamente debemos contar el número de unos que ella aparecen. Por ejemplo, la matriz identidad de orden r tendrá siempre rango r ya que tiene r unos dispuestos en diagonal.

La cuestión es que por ahora solamente sabemos calcular el rango de matrices del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ y evidentemente no todas las matrices son de esta forma. Si tenemos una matriz cualquiera podemos intentar transformarla en una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ y entonces calcular su rango. Claro está, la transformación que apliquemos debe respetar el valor del rango. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 61. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, sin embargo es suficiente modificar el orden de las columnas para obtener:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reordenando columnas}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, el rango es el tamaño del mayor conjunto de columnas independientes y evidentemente la matriz inicial, A , y la obtenida tras aplicar la transformación tienen las mismas columnas. Por tanto, es claro que el rango de ambas debe coincidir. Pero la matriz transformada es claramente del tipo $A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ y su rango es evidentemente 3 (tres unos en diagonal). Como consecuencia

$$r(A) = 3.$$

Cambiar el orden de las columnas de una matriz no altera el rango y en el ejemplo anterior esta propiedad nos ha permitido calcular el rango de la matriz A que inicialmente desconocíamos. Desafortunadamente si partimos de una matriz cualquiera, no siempre podremos llegar a una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ modificando el orden de las columnas. Sin embargo, podemos formularnos las dos siguientes preguntas:

- a) ¿Existen más transformaciones como ésta que modifican la matriz pero no el valor del rango?
- b) Supuesto que la respuesta a la pregunta a) es afirmativa: ¿Las transformaciones disponibles permitirán convertir cualquier matriz en una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$?

En lo que queda de sección veremos que en ambos casos tenemos una respuesta afirmativa. Comenzamos viendo en la siguiente propiedad tres tipos de transformaciones que no modifican el rango. Con ello resolvemos la cuestión a).

Propiedad 62. *Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, se verifica que:*

- i) *Si modificamos el orden de las filas o columnas de A , la matriz resultante tiene el mismo rango que A .*
- ii) *Si multiplicamos una de las filas o columnas de A por un número distinto de cero, la matriz resultante tiene el mismo rango que A .*
- iii) *Si sumamos a una columna (respectivamente fila) otra columna (respectivamente fila) multiplicada por un número, la matriz resultante tiene el mismo rango que A .*

En la propiedad anterior, afirmamos que hay tres tipos de transformaciones que podemos aplicar a una matriz sin que el rango varíe. Estas transformaciones son lo que usualmente se denomina operaciones elementales sobre la matriz. En concreto tenemos:

Definición 63. *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$ llamamos operación elemental sobre A a cualquiera de las siguientes transformaciones:*

- *Multiplicar una fila o columna por un número no nulo.*
- *Modificar el orden de las filas o columnas.*
- *Sumar a una columna (respectivamente fila) otra columna (respec. fila) multiplicada por un número cualquiera.*

La **Propiedad 62** nos dice entonces que las operaciones elementales son transformaciones que conservan el rango de una matriz.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente nomenclatura para describir las operaciones elementales que efectuamos sobre una matriz:

- a) Cuando multiplicamos la columna i -ésima por un número k lo indicamos mediante " kC_i ".
- b) Cuando intercambiamos la columna i por la j lo indicamos mediante " $C_i \leftrightarrow C_j$ ".

- c) Cuando sumamos a la columna i la columna j multiplicada por un número k lo notamos " $C_i=C_i+kC_j$ ".
d) Las mismas operaciones para filas se denotan utilizando la letra "F" en lugar de "C".

Ejemplos 64.

1) Apliquemos una serie de operaciones elementales a la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1 = F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{3C_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices que aparecen a la derecha, todas ellas, se han obtenido a partir de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ aplicando operaciones elementales. Puesto que las operaciones elementales conservan el rango, todas tendrán el mismo rango que la matriz inicial:

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Para calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos aplicar sobre ella operaciones elementales para intentar transformarla en una matriz del tipo $\left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right)$. Veamos cómo podemos hacerlo:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_3 = F_3 + 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efectivamente, la última matriz obtenida es del tipo $\left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right)$ y por tanto sabemos calcular su rango. Al mismo tiempo dicha matriz ha sido obtenida a partir de A mediante operaciones elementales y su rango es el mismo que el de A . En resumidas cuentas calculamos el rango de A en la forma

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

El último ejemplo reproduce el método que pretendemos aplicar para calcular el rango de una matriz. Dada la matriz A aplicaremos sobre ella operaciones elementales para intentar transformarla en una matriz del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$,

$$A \xrightarrow[\text{Operaciones elementales}]{} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces calculamos el rango de A a través de la matriz obtenida en la forma

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r.$$

Sin embargo, en todo este proceso permanece sin respuesta la pregunta **b)** que formulábamos en la página 179. Es decir: ¿Podremos encontrar siempre las operaciones elementales adecuadas que transformen A en $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$? La respuesta afirmativa la da la siguiente propiedad. La prueba de la propiedad se basa en la aplicación del método de eliminación de Gauss que describimos a continuación.

El método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss o de eliminación Gaussiana permite reducir, mediante operaciones elementales, cualquier matriz a una matriz con unos en diagonal y el resto de elementos nulos. Es lo que se denomina un método iterativo. Es decir, se basa en la aplicación reiterada de los mismos pasos. Estos pasos son los seis que veremos a continuación y serán los que siempre aplicaremos para calcular el rango de una matriz.

Iremos viendo los pasos a seguir al tiempo que los reproducimos sobre un ejemplo concreto. Así pues, estos son los pasos del método de eliminación de Gauss:

- 1) Seleccionamos en la matriz una fila o columna en la que existan al menos dos elementos no nulos. Con carácter general seleccionaremos la fila o columna con un mayor número de ceros.
- 2) En la fila o columna seleccionada en el apartado anterior elegimos un elemento no nulo al que llamamos ‘pivote’. Hemos de tener en cuenta los siguientes criterios:
 - En el caso de cálculos manuales, la elección del elemento pivote con valor igual a 1 ó -1 puede simplificar las operaciones.
 - En el caso de cálculos precisos, los mejores resultados se obtienen seleccionando como pivote el elemento de la fila o columna con mayor valor absoluto.

Ejemplo 65. Apliquemos el método para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hemos seleccionado la fila tercera ya que en ella aparecen más ceros que en ninguna otra fila o columna. Dentro de la fila tomamos como pivote el elemento tercero cuyo valor es 1 con el objetivo de simplificar los cálculos posteriores.

- 3) Empleamos el pivote para anular todos los elementos de la fila o columna inicialmente seleccionada.

Ejemplo 66. Dentro de la fila seleccionada sólo queda un elemento no nulo distinto del pivote. Debemos efectuar una operación para eliminar este elemento

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-2C_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que para anular elementos en una fila debemos realizar operaciones por columnas. Análogamente, si tuviéramos que eliminar elementos de una columna haríamos operaciones con filas.

4) Utilizamos el pivote para anular los elementos de la fila o columna perpendicular a la que habíamos seleccionado en el paso 1 que intersecta a la altura del pivote.

Ejemplo 67. Seleccionamos la columna perpendicular a la altura del pivote:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Puesto que vamos a eliminar elementos en una columna haremos operaciones por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & \mathbf{2} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2=F_2-2F_3 \\ F_4=F_4-2F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix}$$

5) Siempre que quede alguna fila o columna con más de un elemento no nulo retornaremos al paso 1.

Ejemplo 68. Es evidente que en la matriz resultante del ejemplo anterior quedan filas y columnas con más de un elemento no nulo. Retornamos entonces al paso 1 seleccionando alguna de estas filas o columnas. Tomaremos la segunda columna y como pivote su segundo elemento y aplicamos los pasos 3 y 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 0 & 1 \\ -3 & \mathbf{\underline{-1}} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1=F_1+2F_2 \\ F_4=F_4-F_2}} \begin{pmatrix} -5 & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ -3 & \mathbf{\underline{-1}} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1=C_1-3C_2 \\ C_4=C_4+C_2}} \begin{pmatrix} -5 & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{\underline{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como todavía quedan filas y/o columnas con más de un elemento no nulo retornamos nuevamente al paso 1. Tomamos ahora la última fila y como pivote el primer elemento:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1-\frac{3}{2}F_4} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{2}} \end{pmatrix}.$$

En la matriz resultante no quedan filas ni columnas con más de un elemento no nulo. Pasaremos entonces al último paso.

6) Si es necesario se reordenan las filas o columnas para pasar la matriz a forma diagonal. Si en la diagonal principal aparecen elementos no nulos distintos de 1 podemos dividir adecuadamente la fila o columna correspondiente para transformarlos en 1.

Ejemplo 69. La matriz, tal y como quedó en el último ejemplo ya está en forma diagonal así que no es necesario reordenar filas ni columnas. Puesto que en la diagonal principal aparecen elementos no nulos distintos de 1 dividiremos adecuadamente las filas correspondientes:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F1 = \frac{1}{-5}F1 \\ F2 = \frac{1}{-1}F2}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

Finalmente hemos obtenido una matriz del tipo $\left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$. Podemos calcular ahora el rango de la matriz inicial A :

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

La **Propiedad 62** y el método de eliminación de Gauss responden a las preguntas **a)** y **b)** que formulábamos en la página 179. Estas dos propiedades, en especial el método de eliminación de Gauss, junto con la **Propiedad 60** nos proporcionan un mecanismo para calcular el rango. De esta manera, la idea para calcular el rango de una matriz A se basa en los siguientes pasos:

1. Aplicamos el método de eliminación de Gauss para encontrar una lista de operaciones elementales, llamémosla L , que transforme A del siguiente modo:

$$A \xrightarrow[\text{Operaciones } L]{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right).$$

2. Utilizamos la **Propiedad 62** que nos garantiza que

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right).$$

3. Finalmente, aplicamos la **Propiedad 60** para realizar el cálculo:

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} I_r & & & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) = r.$$

El rango por filas y otras propiedades básicas

Nos plantearemos ahora una cuestión que quedo pendiente de forma implícita cuando en la **Definición 58** establecíamos que el rango de una matriz A es el tamaño del mayor conjunto independiente de columnas de ella. La pregunta es si podríamos haber definido el rango tomando el mayor conjunto posible de filas independientes en lugar de trabajar con columnas.

Estrechamente relacionado con lo anterior está esta otra cuestión. Si tomamos las filas de A y las ponemos en forma de columna obtenemos la matriz traspuesta A^t . Para calcular el rango de A^t tendremos en cuenta sus columnas que en realidad son las filas de A . Podemos preguntarnos entonces que relación existe entre $\text{rango}(A)$ y $\text{rango}(A^t)$.

La siguiente propiedad hace uso de los resultados de esta sección para resolver estos problemas.

Teorema 70. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ se tiene que:

i) $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t)$.

ii) El rango de A es el tamaño del mayor conjunto independiente formado por uplas fila de la matriz A .

Demostración. Comenzamos probando i). Si $\text{rango}(A) = r$ podremos encontrar un conjunto de operaciones elementales, que llamaremos L , de modo que

$$A \xrightarrow{\text{Operaciones } L} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Si en el conjunto de operaciones elementales L todas las operaciones por filas las cambiamos a operaciones por columnas y viceversa, obtendremos otro conjunto diferente de operaciones que podemos llamar L^t . Entonces es evidente que

$$A^t \xrightarrow{\text{Operaciones } L^t} \left(\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{m \times n} \right)^t = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n \times m}.$$

En consecuencia,

$$\text{rango}(A^t) = \text{rango} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n \times m} = r = \text{rango}(A).$$

Una vez que hemos probado i), demostrar ii) es fácil ya que calcular el tamaño del mayor conjunto independiente de filas de A es lo mismo que calcular el tamaño del mayor conjunto independiente de columnas de A^t que por definición vale $\text{rango}(A^t)$. Pero $\text{rango}(A^t) = \text{rango}(A)$ y por tanto el tamaño del mayor conjunto independiente de filas de A será $\text{rango}(A)$. \square

Una consecuencia inmediata del ultimo teorema es el hecho de que el rango de una matriz será inferior tanto al número de columnas como al número de filas de la matriz. Ello queda reflejado con más precisión en el siguiente corolario.

Corolario 71. Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ se verifica que

$$\text{rango}(A) \leq m \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) \leq n.$$

Demostración. La matriz A tiene m filas y n columnas. Por definición, el rango es el tamaño del mayor subconjunto de columnas de A independiente y como en A tenemos solamente n columnas, el rango a lo sumo valdrá n . En el **Teorema 70** hemos demostrado que el rango es también el tamaño del mayor conjunto independiente de filas y por ello nuevamente debe ser inferior que el número de filas de la matriz, m . \square

Terminamos viendo algunas propiedades sencillas del rango que pueden simplificar algunos cálculos.

Propiedades 72.

i) $\text{rango} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \text{rango} \left(\begin{array}{c} A \\ 0 \end{array} \right) = \text{rango}(A|0) = \text{rango}(A)$.

ii) $\text{rango} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_s \end{array} \right) = \text{rango}(A) + s$.

iii) Si A_1 es submatriz de A entonces $\text{rango}(A_1) \leq \text{rango}(A)$.

Ejemplos 73.

1) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ entonces es evidente que $\text{rango}(B) \leq 2$ y además si consideramos la submatriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y aplicamos operaciones elementales, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-F2}]{\text{F1=F1+2F2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $\text{rango}(A) = 2$ con lo que, al ser A submatriz de B ,

$$2 = \text{rango}(A) \leq \text{rango}(B) \leq 2 \Rightarrow \text{rango}(B) = 2.$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= (\text{F3=F3-F1}) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{C2=C2-2C1} \\ \text{C3=C3+C1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{array} \right) = \\ 1 + \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} &= 3. \end{aligned}$$

Cálculos con dependencia, independencia, combinaciones lineales mediante el rango

Por definición, el rango de una matriz es el mayor número de columnas independientes que podemos tomar en ella. Es evidente entonces que si las uplas v_1, v_2, \dots, v_m son independientes, el mayor conjunto de columnas independientes de la matriz $(v_1|v_2|\dots|v_m)$ estará formado por todas esas m uplas y en consecuencia tendremos

$$\text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m) = m.$$

De esta forma, para analizar la dependencia o independencia de varias uplas podemos ponerlas en columna y estudiar el rango de la matriz así obtenida. La siguiente propiedad pone de manifiesto cómo, siguiendo esta misma idea, podemos analizar cuestiones relativas a la dependencia, independencia y combinaciones lineales a través del cálculo de rangos.

Propiedad 74. Consideremos las n -uplas v_1, v_2, \dots, v_m y w :

$$i) v_1, v_2, \dots, v_m \text{ son independientes entre sí} \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m) = m.$$

$$ii) w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m) = \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m|w).$$

Supongamos que disponemos de varias uplas v_1, v_2, \dots, v_m y que estamos trabajando con el conjunto de sus combinaciones lineales, $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$. Sabemos que si el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es dependiente entonces algunas uplas pueden ser obtenidas como combinación lineal de las demás y serán superfluas (véase la **Propiedad 45** en la página 164). Por contra, si son independientes ninguna de ellas puede ser eliminada. En el caso en que sean dependientes será de interés determinar cuántas y cuáles pueden ser eliminadas.

Si tenemos en cuenta la definición de rango, la **Propiedad 74** resuelve también el importante problema de detectar las uplas superfluas. En efecto, supongamos que

$$\text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m) = r < m.$$

Entonces, podremos encontrar r columnas independientes dentro de A y, además, ningún conjunto con más de r columnas podrá ser independiente. Por tanto, no es difícil demostrar que basta encontrar r de esas uplas que sean independientes y podremos eliminar todas las demás.

Ejemplos 75.

1) Comprobar si las uplas $v_1 = (2, 1, 3, -1, 2)$, $v_2 = (4, 2, 6, -2, 4)$, $v_3 = (-2, -1, 0, -5, 1)$, $v_4 = (2, 1, 2, 1, 1)$ y $v_5 = (2, 1, 5, -5, 4)$ son independientes entre sí.

Resolveremos el ejercicio aplicando la **Propiedad 74**. Para ello, comenzaremos calculando el rango de la matriz obtenida al poner en columna las uplas en cuestión,

$$\text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Según el apartado *i*) de la **Propiedad 74**), p uplas son independientes si puestas en columna dan rango p . Sin embargo aquí tenemos 5 uplas y puestas en columna no dan rango 5 sino 2. Por tanto no son independientes.

2) Las uplas del apartado anterior pueden ser combinadas para obtener otras. ¿Son necesarias las cinco uplas dadas para obtener todas esas combinaciones o, por el contrario, existen uplas superfluas? Encontramos un conjunto lo más pequeño posible que permita obtener todas las combinaciones lineales que proporcionan las cinco uplas iniciales.

En el apartado anterior vemos que, puestas en columna, las uplas ofrecen rango igual a 2. Ello nos indica que el mayor conjunto independiente tendrá dos uplas. Para encontrar ese conjunto independiente bastará con encontrar dos uplas independientes cualesquiera entre las cinco que nos dieron al principio.

Si tomamos las dos primeras columnas tenemos

$$\text{rango}(v_1|v_2) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

y por tanto no son independientes (dos columnas independientes darían rango 2) con lo que podemos descartar esta elección. Tomemos en su lugar las columnas primera y tercera. En este caso,

$$\text{rango}(v_1|v_3) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

y estas dos columnas sí son independientes. Los comentarios que hemos hecho tras la **Propiedad 74** nos indican entonces que podemos quedarnos con esas dos 5-uplas y eliminar las demás. Es decir,

$$\langle v_1, v_3, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle (2, 1, 3, -1, 2), (-2, -1, 0, -5, 1) \rangle.$$

Por tanto, en lo que respecta a la obtención de combinaciones lineales, si nos quedamos con la primera y tercera, todas las demás uplas son superfluas.

Ahora bien, en lugar de probar con las uplas primera y tercera, podríamos haber escogido también, por

ejemplo, las cuarta y la quinta. En ese caso, disponiéndolas en columna y calculando su rango tenemos que

$$\text{rango}(v_4|v_5) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Por ello, $(2, 1, 2, 1, 1)$ y $(2, 1, 5, -5, 4)$ son independientes y podemos razonar como antes para concluir que si nos quedamos con estas dos uplas podemos eliminar todas las demás y seguir obteniendo las mismas combinaciones lineales.

De esta forma, tenemos dos respuestas para el mismo ejercicio. Combinando las uplas

$$(2, 1, 3, -1, 2) \quad \text{y} \quad (-2, -1, 0, -5, 1)$$

obtenemos las mismas combinaciones que con las cinco uplas iniciales y, al mismo tiempo, combinando

$$(2, 1, 2, 1, 1) \quad \text{y} \quad (2, 1, 5, -5, 4)$$

también obtenemos todas esas combinaciones. Ambas parejas de uplas representan respuestas correctas al problema de seleccionar el conjunto más simple que proporcione las mismas combinaciones que las uplas iniciales.

3) Comprobar si $w_1 = (1, 2, 3, 2, 1)$ y $w_2 = (0, 0, 3, -6, 3)$ se pueden obtener como combinación lineal de las uplas v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 del apartado **1**).

Comencemos con $w_1 = (1, 2, 3, 2, 1)$. Aplicando el apartado *ii*) de la **Propiedad 74** sabemos que

$$w_1 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5) = \text{rango}(v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|w_1)$$

Por tanto, hemos de comprobar que el rango de la matriz formada por las cinco uplas iniciales es igual al de la matriz obtenida al añadir la columna w_1 . Es decir, debemos comprobar si es cierta la igualdad

$$\underbrace{\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=2 \text{ (apartado 1)}} = \text{rango} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=3} ?$$

Pero en el apartado **1**) vimos que la primera de las matrices tiene rango 2 y es fácil calcular el rango de la segunda que será igual a 3. Por tanto, no se produce la igualdad de rangos y como consecuencia $w_1 \notin \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$, es decir la upla $(1, 2, 3, 2, 1)$ no se puede obtener de ninguna forma combinando v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

Podríamos haber simplificado estos cálculos si hubiéramos empleado los resultados del apartado **2**) ya que entonces vimos que

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle.$$

De esta manera, comprobar si $w_1 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ equivale a comprobar que $w_1 \in \langle v_1, v_3 \rangle$ para lo cual habremos de calcular el rango de matrices de menor tamaño.

Empleemos esta última técnica para el caso de la upla $w_2 = (0, 0, 3, -6, 3)$. Para determinar si w_2 se puede obtener combinando v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , puesto que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$, bastará con estudiar si $w_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle$. Ahora, el apartado *ii*) de la **Propiedad 74** nos dirá que

$$w_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_3) = \text{rango}(v_1|v_3|w_2).$$

Si calculamos los rangos de $(v_1|v_3)$ y $(v_1|v_3|w_2)$ tenemos

$$\underbrace{\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=2 \text{ (apartado 1)}} = \text{rango} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=2}.$$

Dado que los rangos coinciden, deducimos que efectivamente $w_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ y en este caso la upla $w_2 = (0, 0, 3, -6, 3)$ sí que se puede obtener como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

Etiquetado de columnas

En los ejemplos anteriores hemos aplicado la **Propiedad 74** para determinar cuáles son las uplas superfluas de un conjunto dado. Si bien esta técnica para encontrar las uplas independientes y superfluas es correcta, veremos a continuación que el esquema de operaciones elementales de la página 181 que hace posible calcular el rango de una matriz también permite detectar las uplas independientes. Para ello basta con etiquetar cada columna con un indicativo de la upla a la que corresponde. Tras aplicar el esquema de operaciones elementales, las uplas cuyas etiquetas aparezcan sobre los unos en diagonal de la forma reducida serán directamente independientes.

Ejemplo 76. Consideremos las uplas $v_1 = (1, 2, 0, -1)$, $v_2 = (2, 4, 0, -2)$, $v_3 = (2, 1, 1, 0)$ y $v_4 = (4, 5, 1, -2)$. Para ver cuántas y cuáles de ellas son independientes, las pondremos en columna y calcularemos el rango de la matriz resultante. Sin embargo, etiquetaremos además cada columna con el nombre que hemos dado a cada upla:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{C_4=C_4-C_3} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\substack{F_1=F_1-2F_3 \\ F_2=F_2-F_3}} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} \xrightarrow{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_4=F_4+F_1}} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\substack{C_2=C_2-2C_1 \\ C_4=C_4-2C_1}} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftrightarrow C_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3}} \begin{matrix} v_1 & v_3 & v_2 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Véase que si modificamos el orden de las columnas debemos modificar de la misma manera el orden de las etiquetas. Una vez que hemos llevado la matriz a su forma reducida, es fácil ver que el rango es 2 y por tanto tendremos a lo sumo dos uplas independientes. Pero además, las etiquetas que aparecen sobre los dos unos en diagonal resultantes corresponden a las uplas v_1 y v_3 por tanto, estas dos uplas forma un conjunto independiente que genera las mismas combinaciones que las cuatro iniciales. Es decir,

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

De esta forma, podemos descartar las uplas v_2 y v_4 .

Obtención de todas las uplas posibles

Dado cierto conjunto de n -uplas, v_1, v_2, \dots, v_m , en ocasiones es de importancia determinar si ellas son suficientes para generar mediante combinaciones cualquier otra n -upla o si, por el contrario, existen n -uplas que no pueden obtenerse combinándolas.

El conjunto de todas las n -uplas es \mathbb{R}^n , así que la cuestión que estamos planteando aquí es si con ciertas uplas v_1, v_2, \dots, v_m podemos obtener todo \mathbb{R}^n , es decir, si

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n.$$

En la siguiente propiedad se recogen resultados que permiten abordar distintos aspectos de este problema.

Propiedad 77.

i) Dadas las n -uplas v_1, v_2, \dots, v_m ,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_m) = n.$$

ii) Las n -uplas coordenadas de \mathbb{R}^n , e_1, e_2, \dots, e_n cumplen que

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n.$$

iii) Dadas las n -uplas v_1, v_2, \dots, v_n ,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ es independiente.}$$

iv) Más de n , n -uplas no pueden ser independientes.

v) Con menos de n , n -uplas no es posible obtener todo \mathbb{R}^n (es decir, todas las n -uplas).

Ejemplos 78.

1) Dadas las 4-uplas, $(1, 2, -1, 1)$, $(2, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -1)$ y $(1, 2, 0, 1)$, nos preguntamos si combinándolas es posible obtener cualquier otra 4-upla que deseemos. El conjunto de todas las 4-uplas es \mathbb{R}^4 así que estamos preguntando si combinando las uplas dadas es posible obtener todo \mathbb{R}^4 . Aplicando el apartado *i)* de la **Propiedad 77** sabemos que

$$\langle (1, 2, -1, 1), (2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (1, 2, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^4$$

se cumplirá si puestas en columna, dichas uplas dan rango 4. Tenemos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

así que efectivamente cualquier upla de \mathbb{R}^4 puede ser obtenida combinando esas cuatro. Como consecuencia del apartado *iii)* de la **Propiedad 77** o del *i)* de la **Propiedad 74**, por añadidura deducimos que las cuatro uplas son independientes entre sí.

2) Estudiemos el mismo problema del ejercicio anterior referido ahora a las uplas $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(-1, 2, 1)$ y $(2, 3, 5)$. Nos preguntamos entonces si combinándolas es posible obtener cualquier 3-upla, es decir, si

$$\langle (1, 2, 3), (2, 1, 3), (-1, 2, 1), (2, 3, 5) \rangle = \mathbb{R}^3. \tag{4.5}$$

Sin necesidad de realizar ningún cálculo, de antemano, aplicando el apartado *iv)* de la **Propiedad 77** sabemos que las cuatro uplas son dependientes ya que más de 3 3-uplas nunca son independientes. Para comprobar (4.5), como antes, puestas las uplas en columna, su rango debería ser 3. Ahora bien,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

así que existen uplas de \mathbb{R}^3 que no se pueden obtener combinando las de este ejemplo. Por ejemplo la upla $(1, 0, 0)$ no es combinación lineal de ellas. Para comprobarlo, tenemos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 2 = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Basta aplicar el apartado *ii*) de **Propiedad 74** para deducir que $(1, 0, 0) \notin \langle (1, 2, 3), (2, 1, 3), (-1, 2, 1), (2, 3, 5) \rangle$.

4.6.3 Rango y Matriz inversa. Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales

Cuando definimos la inversa de una matriz en la **Sección 4.3.4**, presentamos una técnica para el cálculo de inversas (véanse los apartados **4**) y **5**) de **Ejemplos 34**) que era válida para el casos de matrices de orden reducido. Utilizaremos el cálculo mediante operaciones elementales para ofrecer en esta sección un nuevo método más efectivo para manejar inversas de matrices.

En esta sección estudiaremos las relaciones que existentes entre los conceptos de rango y de matriz inversa en el caso de matrices cuadradas. Comprobaremos que ambos pueden definirse uno en términos del otro. Para comenzar, veremos en la próxima propiedad que el hecho de que una matriz tenga inversa, que sea regular, determina de forma directa su rango.

Propiedad 79. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada de orden n . Entonces,*

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = n.$$

Hagamos algunos comentarios sobre esta última propiedad:

- De la propiedad anterior se desprende que si una matriz tiene inversa, sus uplas columna deben ser independientes (recuérdese que n n -uplas con rango n son independientes). En otras palabras, un enunciado equivalente para la propiedad sería:

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{las columnas de } A \text{ son independientes.}$$

Por otro lado, si A tiene inversa, también la tendrá su matriz traspuesta, A^t , y podemos deducir igualmente que las columnas de A^t son independientes. Ahora bien, las columnas de A^t son las filas de A . Por tanto, este enunciado equivalente puede escribirse también en términos de filas.

- Como consecuencia del **Corolario 71**, una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ de orden n (con n filas y n columnas) tendrá rango a lo sumo n . Entonces, n es el valor máximo que puede adoptar el rango de A y, en consecuencia, se dice que A tiene rango máximo cuando $\text{rango}(A) = n$. Empleando esta nomenclatura, la **Propiedad 79** puede reescribirse como

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ tiene rango máximo.}$$

Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales

Tomemos una matriz cuadrada de orden n , $A \in \mathcal{M}_n$. Si la matriz tiene rango n entonces tras aplicarle las adecuadas operaciones elementales llegaremos a una matriz, del mismo tamaño que A , que tiene todo ceros menos n unos en diagonal, es decir, llegamos a la matriz identidad I_n ,

$$A \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} I_n.$$

Formemos la matriz $(A|I_n)$ que se obtiene añadiendo la matriz identidad a la matriz A . Si las operaciones elementales de antes son todas ellas por filas y las aplicamos a $(A|I_n)$, transformarán tanto el primer bloque (el

correspondiente a A) como el segundo (el correspondiente a I_n). Sabemos que esas operaciones transforman A and I_n , $A \rightarrow I_n$, y ahora además transformarán I_n en otra matriz B , $I_n \rightarrow B$. Tendremos por tanto

$$(A|I_n) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (I_n|B).$$

Se puede comprobar que las matriz B que aparece de este modo almacena las operaciones elementales que hemos aplicado a A en el sentido de que al multiplicar A por dicha matriz B conseguimos el mismo efecto que al aplicar a A las operaciones elementales. Es decir

$$\underbrace{A \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} I_n}_{\text{las op. el. transforman } A \text{ en } I_n} \quad \text{y por tanto} \quad \underbrace{A \cdot B = I_n}_{\text{el producto por } B \text{ transforma } A \text{ en } I_n}.$$

Pero esta última igualdad nos indica que la matriz B es justamente la matriz inversa de A y por tanto $A^{-1} = B$.

Las ideas que hemos esbozado en el párrafo anterior nos permiten determinar si una matriz tiene inversa y calcularla en tal caso. En resumen, tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad 80. *Supongamos que la matriz $A \in \mathcal{M}_n$ tiene inversa y que L es una lista de operaciones elementales por filas que transforma A en I_n , entonces si aplicamos las operaciones de L a la matriz por bloques $(A|I_n)$ obtendremos*

$$(A|I_n) \xrightarrow{\text{Operaciones } L} (I_n|B),$$

donde B es la inversa de A .

De este modo, de la **Propiedad 80** se desprende para calcular la inversa de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$, debemos reducir A en I_n pero ahora aplicando operaciones elementales solamente por filas. Para el cálculo del rango podemos aplicar operaciones tanto por filas como por columna pero ahora, para obtener la inversa, tenemos que limitarnos únicamente a operaciones por filas. Sin embargo, ello sigue siendo posible aplicando el método de eliminación de Gauss que vimos en la página 181. Solamente habremos de tener en cuenta las siguientes puntualizaciones cuyo objetivo es evitar en todos los pasos la realización de operaciones por columnas:

- a) Puesto que solamente podemos aplicar operaciones por filas, en el paso 1 únicamente seleccionaremos columnas ya que para anular los elementos de una columna las operaciones a realizar son por filas.
- b) En el paso 2, hemos de tomar la precaución de seleccionar un elemento que no esté a la altura de los pivotes seleccionados en pasos anteriores.
- c) Obviaremos el paso 4 ya que supone la realización de operaciones por columnas.
- d) Una vez aplicados los pasos 1 a 5 para todas las columnas, será suficiente con dividir las filas con objeto de transformar todos los elementos no nulos en unos. Finalmente ordenaremos las filas para obtener la identidad.

El procedimiento de la página 181 junto con estas puntualizaciones nos permiten obtener para cualquier matriz regular, A , una lista de operaciones por filas que transforman A en I_n . Entonces, emplearemos estas operaciones para calcular la inversa tal y como indica la **Propiedad 80**.

Ejemplos 81.

1) Calcúlese la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para ello, formamos la matriz $(A | I_4)$ y le aplicaremos operaciones elementales por filas hasta transformarla en $(I_4 | B)$.

Emplearemos el método de reducción de matrices teniendo en cuenta los puntos antes comentados. Comenzamos seleccionando la columna tercera y su tercer elemento como pivote:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_3 \\ F_4=F_4-2F_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & \mathbf{0} & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Tal y como hemos dicho no podemos efectuar operaciones por columnas y por ello no podemos anular la fila perpendicular a la altura del pivote. Por tanto, seleccionamos una nueva columna y un nuevo pivote que, como ya se ha comentado antes, no debe estar a la altura de los demás pivotes elegidos (por ahora solamente el **1** del paso anterior). Seleccionemos ahora la columna cuarta y tomemos el segundo elemento como pivote

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-F_2 \\ F_4=F_4-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 3 & 0 & \mathbf{0} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Continuamos seleccionando la segunda columna y tomando como pivote el cuarto elemento para evitar que esté a la altura de los dos anteriores. Antes de anular los otros elementos, para simplificar los cálculos, convertimos en 1 el pivote dividiendo la cuarta fila por 2:

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1=F_1-3F_4 \\ F_2=F_2+F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -4 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Finalizamos seleccionando la primera columna y como pivote, si pretendemos que no esté a la altura de los hasta ahora seleccionados, no podemos elegir más que el primero. Dado que el valor del pivote es -5 primero dividimos la primera fila para transformarlo en 1:

$$\xrightarrow{\frac{-1}{5}F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{2} & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{\underline{1}} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\underline{1}} & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

Para terminar es suficiente reordenar

$$\xrightarrow{\text{reordenando}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

de donde obtenemos,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) Consideremos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y veamos que es una matriz regular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3-C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ordenando columnas}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Por tanto $\text{rango}(A) = 3$ y en consecuencia la matriz A es regular. Podemos ahora calcular su inversa aplicando operaciones elementales a las filas de la matriz $(A \mid I_3)$

$$\begin{aligned} (A \mid I_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{reordenando filas}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (I_3 \mid B). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Aplicando transformaciones elementales a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ conseguimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2-C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\text{rango}(A) = 1 < 2$ y en consecuencia A es una matriz singular que no tiene inversa.

4) Calcúlese la matriz C que verifica la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La manera más sencilla para calcular C es despejar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Para ello en primer lugar hemos de comprobar si es regular:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2-2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Mediante la cadena de operaciones anteriores obtenemos I_2 con lo que la matriz en cuestión tiene rango 2 y es efectivamente regular así que podemos despejarla:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1=F1-2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right),$$

con lo que finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto:

$$C = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}.$$

Para terminar con esta sección, daremos una definición alternativa de rango basada en el concepto de inversa. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ hemos visto que

$$\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

Sin embargo, si $\text{rango}(A) < n$ o A no es cuadrada, esta caracterización no tiene sentido. Para una matriz cualquiera, no necesariamente cuadrada, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, ¿será posible caracterizar el hecho de que el rango alcance un valor concreto, $\text{rango}(A) = r$, de una forma similar?

La siguiente propiedad responde a esta pregunta. Veremos que si $\text{rango}(A) = r$ seguramente no podremos calcular la inversa de A pero existirá dentro de A una submatriz cuadrada de orden r que sí tendrá inversa. Manejamos aquí el concepto de menor que definiremos a continuación:

Definición 82. Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, llamamos menor de orden r de la matriz A a cualquier submatriz cuadrada de orden r de A .

Ejemplo 83. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tenemos que:

* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadra de orden 3 de A y por lo tanto es un menor de orden 3 de la matriz A .

* $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadrada de orden 2 de A y por ello es un menor de orden 2 de A .

* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una submatriz cuadrada de orden 2 de A y como consecuencia un menor de orden 2.

* (2), (0) ó (4) son submatrices cuadradas de orden 1, es decir, menores de orden 1.

Veamos ya la propiedad anunciada. Véase que la caracterización que damos en ella es, en su enunciado, similar a la definición que dimos para el rango en la **Definición 58** (pag. 176).

Propiedad 84. Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$,

$$\text{rango}(A) = r \Leftrightarrow \text{el orden del mayor menor regular de } A \text{ es } r.$$

En otras palabras, si una matriz tiene rango r , necesariamente podremos encontrar dentro de ella una submatriz cuadrada, un menor, de tamaño r con inversa y además no es posible encontrar submatrices mayores con inversa.

4.7 Determinante de una matriz

Hemos visto cómo averiguar si una matriz cuadrada es regular o no. Estudiaremos en esta sección mecanismos alternativos para determinar la regularidad así como para el cálculo de la inversa.

La herramienta que utilizaremos para este propósito es el determinante. El determinante es un número real que, en cierto sentido, mide el grado en que un conjunto de n , n -uplas son independientes. Si el determinante es cero las n -uplas serán dependientes y si es distinto de cero serán independientes pero de manera que cuanto más próximo a cero sea el determinante más próximas, en cierto sentido, a ser dependientes estarán las n -uplas.

Para la definición del determinante seguiremos un método constructivo basado en las fórmulas de desarrollo del determinante por una fila o columna.

Definición 85. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ definimos el determinante de A y lo notamos $\det(A)$ o $|A|$, como el número que verifica:

- Si $A = (a)_{1 \times 1} \in \mathcal{M}_1$, entonces $|A| = |(a)| = a$.
- Si $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ con $n > 1$, entonces $|A|$ se define de cualquiera de las dos siguientes maneras:
 - a) Para cualquier $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot \Delta_{i2} + \dots + a_{in} \cdot \Delta_{in} \\ &= \underbrace{(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})}_{\text{fila } i \text{ de } A} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La fórmula anterior se conoce como desarrollo del determinante de la matriz A por la fila i -ésima.

- b) Para cualquier $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j} \cdot \Delta_{1j} + a_{2j} \cdot \Delta_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot \Delta_{nj} \\ &= (\Delta_{1j} \quad \Delta_{2j} \quad \dots \quad \Delta_{nj}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}}_{\text{columna } j \text{ de } A}. \end{aligned}$$

Esta fórmula se denomina desarrollo del determinante de la matriz A por la columna j -ésima.

Donde Δ_{ij} se denomina adjunto (i, j) de la matriz y se define mediante la fórmula

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{(i,j)}|,$$

siendo $A_{(i,j)}$ la submatriz de A obtenida eliminando la fila i -ésima y la columna j -ésima.

Nota. Aunque el símbolo que usamos para el determinante de una matriz, $|\cdot|$, es el mismo que para el valor absoluto de un número real, son conceptos totalmente diferentes y no tienen relación alguna.

Ejemplos 86.

1) Para calcular el determinante de la matriz $(3)_{1 \times 1}$ acudiremos al primer punto de la definición de determinante ya que esta matriz es una matriz tipo 1×1 . Entonces tenemos que:

$$|(3)| = 3.$$

$|(-5)| = -5$ (recuérdese que $|(-5)|$ es el determinante de la matriz $(-5)_{1 \times 1}$ y no el valor absoluto del número -5).

2) Determinante de la matriz cuadrada de orden 2.

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$ e intentemos calcular su determinante. Puesto que no es una matriz 1×1 no podemos aplicar el primer punto de la definición de determinante y debemos acudir al segundo. Para ello tenemos que:

* $A_{(1,1)}$ es la submatriz de A que obtenemos eliminando la fila 1 y la columna 1:

$$A_{(1,1)} = (a_{22}).$$

* $A_{(1,2)}$ es la submatriz de A que obtenemos eliminando la fila 1 y la columna 2:

$$A_{(1,2)} = (a_{21}).$$

* $A_{(2,1)}$ es la submatriz de A que obtenemos eliminando la fila 2 y la columna 1:

$$A_{(2,1)} = (a_{12}).$$

* $A_{(2,2)}$ es la submatriz de A que obtenemos eliminando la fila 2 y la columna 2:

$$A_{(2,2)} = (a_{11}).$$

A partir de lo anterior calculamos los adjuntos de la matriz:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot |A_{(1,1)}| = (-1)^2 \cdot |(a_{22})| = a_{22}, \\ \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot |A_{(1,2)}| = (-1)^3 \cdot |(a_{21})| = -a_{21}, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot |A_{(2,1)}| = (-1)^3 \cdot |(a_{12})| = -a_{12}, \\ \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot |A_{(2,2)}| = (-1)^4 \cdot |(a_{11})| = a_{11}. \end{aligned}$$

Para el cálculo del determinante tenemos ahora cuatro posibilidades:

1. Hacer el desarrollo del determinante por la primera fila.
2. Hacer el desarrollo del determinante por la segunda fila.
3. Hacer el desarrollo del determinante por la primera columna.
4. Hacer el desarrollo del determinante por la segunda columna.

Calcularemos siguiendo dos de las posibilidades anteriores:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| &= \\ \text{(fila 1)} &= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21}) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \\ \text{(columna 2)} &= a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{22} \cdot \Delta_{22} = a_{12} \cdot (-a_{21}) + a_{22} \cdot a_{11} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \end{aligned}$$

Independientemente del método seguido (desarrollo por la primera fila o por la segunda columna) hemos obtenido el mismo valor para el determinante. Se puede comprobar como ejercicio que si desarrollamos por

la segunda fila o por la primera columna el resultado también será el mismo. En definitiva hemos conseguido la siguiente fórmula para el determinante de una matriz 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Esquemáticamente, podemos representar esta fórmula como sigue

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

donde los elementos que aparecen unidos por un segmento han de ser multiplicandos.

3) Determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

calcularemos su determinante haciendo el desarrollo por la primera columna. Tendremos entonces que:

$$|A| = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{31} \cdot \Delta_{31}.$$

Calculamos a continuación los adjuntos necesarios en la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} |A_{(1,1)}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} |A_{(2,1)}| = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{13}, \\ \Delta_{31} &= (-1)^{3+1} |A_{(3,1)}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{21} \cdot (a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{33}) \\ &\quad + a_{31} \cdot (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}). \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ &\quad - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}). \end{aligned}$$

A la fórmula anterior para el determinante de una matriz 3×3 se la denomina regla de Sarrus y se puede esquematizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

4) A continuación calculamos algunos determinantes de matrices 2×2 utilizando la fórmula obtenida en el ejemplo 3:

$$\star \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2.$$

$$\star \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

$$\star \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = -9.$$

5) Empleamos ahora la fórmula de Sarrus para calcular el determinante de matrices 3×3 :

$$\begin{aligned} \star \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 1 - (0 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \cdot 1) \\ &= 2 + 6 = 8. \\ \star \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} &= \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - (0 \cdot 3 \cdot 6 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot 5) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60. \end{aligned}$$

6) Calcularemos ahora el determinante de una matriz 3×3 desarrollando por la fila segunda en lugar de utilizar la fórmula de Sarrus:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= \\ &= 0 \cdot \Delta_{21} + 1 \cdot \Delta_{22} + (-1) \cdot \Delta_{23} \\ &= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0) + (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2) = -1. \end{aligned}$$

7) Resolvemos a continuación el determinante de una matriz 4×4 . Para ello no tenemos más que aplicar las fórmulas de desarrollo por filas o por columnas. En general la fila o columna más adecuada para desarrollar será aquella que posea un mayor número de ceros ya que entonces se reducirá la cantidad de cálculos a realizar. En este caso haremos un desarrollo por la tercera columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \Delta_{13} + 1 \cdot \Delta_{23} + 0 \cdot \Delta_{33} - \Delta_{43} \\ &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(0 + 0 + 4 - 0 - 3 - 2) + (-2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) \\ &= 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

8) En el siguiente ejemplo resolvemos un determinante de tipo 4×4 mediante un desarrollo por la segunda

fila:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \\
 & = 2 \cdot \Delta_{21} + 0 \cdot \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{24} \\
 & = -2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| - \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| \\
 & = -2 \cdot (4 + 2 - 1 - 1 - 4 + 2) - (2 + 1 - 2 + 1 - 1 - 4) \\
 & \quad + (2 - 1 - 2 - 1 - 1 - 4) = -4 + 3 - 7 = -8.
 \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores se pone de manifiesto que el determinante puede adoptar como valor cualquier número real. Por contra, el rango será siempre un número natural.

La siguiente propiedad recoge propiedades fundamentales del determinante. De entre ellas es de importancia las que ponen de manifiesto la relación del determinante con el producto y regularidad de matrices.

Propiedades 87.

1. Dada $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ matriz diagonal, triangular inferior o triangular superior, se verifica que:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

En particular $|I_n| = 1$.

2. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, $|A^t| = |A|$.

3. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

4. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ regular, tenemos que $|A| \neq 0$ y además

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

5. Dada $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $|A| \neq 0$ se verifica que A es regular.

6. Dada una matriz $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$,

$$\text{rango}(B) = r \Leftrightarrow \text{El orden del mayor menor de } A \text{ con determinante no nulo es } r.$$

Demostración. Veremos la demostración solamente de las propiedades 1 y 4:

1. Veremos solamente el caso de matrices triangulares superiores. Para el resto de los casos la demostración es similar.

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ matriz triangular superior de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando por} \\ \text{la columna 1} \end{array} \right) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando} \\ \text{la columna 2} \end{array} \right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ 0 & 0 & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{array}{l} \text{repetiendo el proceso} \\ \text{sucesivamente} \end{array} \right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.
 \end{aligned}$$

4. Si A es regular entonces existirá su matriz inversa A^{-1} que verificará:

$$A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Efectuando el determinante en ambos miembros de esta desigualdad y aplicando la propiedad 3 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 |A \cdot A^{-1}| &= |I_n| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \\
 \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{cases} & \text{ (despejando } |A^{-1}| \text{ en la igualdad anterior) } \cdot
 \end{aligned}$$

□

Nota. Las propiedades 4 y 5 son importantes ya que indican que podemos utilizar el determinante para comprobar si una matriz es o no regular sin más que comprobar si el determinante es o no nulo.

Ejemplos 88.

1) Considerada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$|A| = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5 \neq 0.$$

Puesto que el determinante de A es no nulo sabemos que es una matriz regular y además sin necesidad de conocer su inversa, A^{-1} , sabemos el valor de su determinante:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}.$$

$$2) \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right| = \left(\begin{array}{l} \text{empleando la} \\ \text{propiedad 1} \end{array} \right) = 2 \cdot (-3) \cdot 6 = -36.$$

3) El apartado 6 de la **Propiedad 87** proporciona una técnica alternativa para el cálculo del rango. Podemos determinar el rango de una matriz mediante la aplicación de operaciones elementales o bien a través de esta última propiedad.

Calcularemos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ empleando las dos técnicas que conocemos:

- i) La mayor submatriz cuadrada de A será de orden como mucho 3 por lo que el rango de la matriz tendrá un valor máximo de 3. Para comprobar si el rango es 3 hemos de encontrar una submatriz 3×3 con determinante no nulo. Pero ello es fácil ya que si tomamos la submatriz formada por las tres primeras columnas de A tenemos

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 5 \neq 0,$$

con lo que tenemos un menor de orden 3 no nulo y el rango será 3 ya que no puede haber menores mayores en la matriz A . Luego aplicando esta definición obtenemos:

$$\text{rango}(A) = 3.$$

- ii) Aplicaremos operaciones elementales a la matriz A hasta transformarla en una matriz con unos en diagonal:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{C_4=C_4-2C_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2=F_2-2F_3 \\ F_1=F_1-3F_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_2=C_2+2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{\frac{1}{5}F_1 \\ -F_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ordenando}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hemos obtenido una matriz con tres unos en diagonal y cero en todas las demás posiciones con lo que finalmente:

$$\text{rango}(A) = 3.$$

- 4) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y calculemos su rango empleando los dos métodos que conocemos:

- i) La mayor matriz cuadrada que puede encontrarse dentro de A es de tipo 3×3 luego el mayor rango posible para A es 3. Veamos si A tiene algún menor no nulo de orden 3 y para ello consideremos todas las posibles submatrices cuadradas de orden 3 de A y obtengamos su determinante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right| = 0 & \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0 & \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0 \end{array} \right.$$

Las anteriores son todas las posibles submatrices 3×3 y todas tienen determinante nulo luego el rango de la matriz no será 3. Sin embargo, tendrá rango 2 puesto que es fácil encontrar submatrices de A con determinante no nulo como por ejemplo:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0.$$

De este modo el orden del mayor menor con determinante no nulo es 2 y por ello el rango de la matriz será:

$$\text{rango}(A) = 2.$$

ii) Efectuando operaciones sobre A tenemos:

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{C3=C3+C1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C2=C2-2C1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F3=F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C3=C3-3C2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F3=F3-2F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Propiedades 89 (Operaciones elementales para determinantes). Dada $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n$ tenemos que:

1. Un número que multiplica a toda una fila o a toda una columna puede salir fuera del determinante. Es decir, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & r \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & r \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & r \cdot a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| &= r \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|, \\
 \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{i1} & r \cdot a_{i2} & \cdots & r \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| &= r \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

2. Si intercambiamos una columna (respectivamente fila) con otra columna (respec. fila) contigua el determinante cambia de signo.
3. Si a una columna (respectivamente fila) sumamos otra columna (respec. fila) multiplicada por un número, el determinante no varía.

Ejemplos 90.

1. Aplicando la propiedad 1 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \star \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 1 & 0 \\ 6 & 2 \cdot 2 & 3 \\ 2 & 2 \cdot 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right|. \\
 \star \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{5} \cdot 0 & \frac{1}{5} \cdot 2 & \frac{1}{5} \cdot 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{5} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

2. Aplicando repetidas veces la propiedad 3 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| &= (C2 \leftrightarrow C3) = - \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
 &= (C3 \leftrightarrow C4) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
 &= (C2 \leftrightarrow C3) = - \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -|I_n| = -1.
 \end{aligned}$$

3. En el siguiente caso aplicaremos repetidas veces la propiedad 4 para simplificar el cálculo del determinante:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| &= \\
 &= (C3=C3+3C1) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= (F2=F2+F1) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= (C2=C2-C3) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= 1 \cdot 7 \cdot 4 = 28.
 \end{aligned}$$

La última propiedad junto con las otras que hemos visto para determinantes permiten resolver de manera directa algunos determinantes sencillos. Veámoslo en la siguiente nota:

Nota. Es importante tener en cuenta los siguientes puntos:

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene una columna completa de ceros o una fila completa de ceros entonces $|A| = 0$. Esto es evidente ya que si todos los elementos en la fila o columna son nulos, desarrollando por esa fila o columna obtendremos cero como resultado.
- Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene dos columnas iguales o dos filas iguales entonces $|A| = 0$. Esto es claro ya que en tal caso aplicando el apartado 3 de **Propiedades 89**, podemos restar a la fila o columna la otra que coincide con ella obteniendo así una fila o columna de ceros con lo que el determinante será nulo.

Ejemplo 91. $\left| \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \right| = (F3=F3-F1) = \left| \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$

- Si alguna columna (respectivamente fila) puede obtenerse sumando las otras columnas (respec. filas) multiplicadas por números, entonces $|A| = 0$. En efecto si una columna se obtiene sumando de determinada manera las otras columnas de la matriz, podemos restar adecuadamente de esta columna

hasta obtener una columna completa de ceros (igual comentario podemos hacer para filas). Dicho de otro modo, si las filas o columnas de la matriz son dependientes entonces el determinante será nulo.

Ejemplo 92. En la matriz del determinante siguiente la tercera columna puede obtenerse como la suma del doble de la primera columna más el triple de la segunda, con lo que:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 16 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \right| = (C3=C3-2C1) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \right| = (C3=C3-3C2) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Un método alternativo para el cálculo del determinante de matrices de orden superior a tres, consiste en aplicar operaciones elementales para determinantes a la matriz inicial con objeto de simplificarla y poder obtener el determinante con un número menor de cálculos. En la práctica, para la simplificación de un determinante se puede, con las necesarias precauciones, utilizar el procedimiento para reducción de matrices visto en la Sección 4.6.2 con la salvedad de que en el caso de determinantes hemos de tener en cuenta los siguientes puntos:

- La multiplicación de una fila o columna por un número no nulo hará que varíe el valor del determinante pero en su lugar podrá aplicarse el apartado 1 de **Propiedades 89**.
- La modificación del orden de las filas o columnas supone el cambio de signo del determinante según lo indicado en el apartado 2 de **Propiedades 89**.
- Una vez anulada una fila o columna utilizando un pivote, desarrollaremos el determinante por dicha fila o columna para obtener un determinante de menor tamaño.

Veamos a continuación algunos ejemplos de este método:

Ejemplos 93.

1)

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \\ & = (C2=C2+C3) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ & = \underset{\text{la fila 4}}{\text{(desarrollando por)}} = (-1)^{4+3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right| \\ & = -((-6 + 45 + 2) - (-3 + 10 + 18)) = -16. \end{aligned}$$

2)

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} F2=F2+F1 \\ F3=F3+F1 \\ F4=F4+F1 \\ F5=F5+3F1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ -2 & 4 & 0 & 12 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando} \\ \text{la columna 3} \end{array} \right) = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 10 \\ -2 & 4 & 12 & 7 \end{vmatrix} \\
&= (F2=F2-F1) = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 10 \\ -2 & 4 & 12 & 7 \end{vmatrix} \\
&= (C2=C2+C4) = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 14 & 1 & 10 \\ -2 & 11 & 12 & 7 \end{vmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando} \\ \text{la fila 2} \end{array} \right) = -2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 14 & 1 \\ -2 & 11 & 12 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot ((168 + 330 - 14) - (-168 + 11 + 420)) = -2 \cdot 221 = -442.
\end{aligned}$$

4.7.1 Cálculo de la inversa mediante determinantes

En esta sección estudiaremos un método alternativo para el cálculo de la inversa de una matriz basado en el concepto de determinante.

Definición 94. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, llamamos *matriz adjunta de A* y la notamos $\text{Adj}(A)$, a la matriz:

$$\text{Adj}(A) = (\Delta_{ij})_{n \times n} \in \mathcal{M}_n.$$

La matriz adjunta de A es, por tanto, la matriz formada por todos los adjuntos de A dispuestos ordenadamente.

Propiedad 95 (Cálculo de la inversa mediante determinantes). Sea $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $\det(A) \neq 0$, entonces A es una matriz regular y además:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj}(A))^t.$$

Ejemplos 96.

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = 5 + 8 = 13 \neq 0,$$

con lo cual A es una matriz regular y podemos calcular su inversa para lo que obtendremos primero los adjuntos de la matriz

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= (-1)^{1+1}|(5)| = 5, & \Delta_{12} &= (-1)^{1+2}|(4)| = -4, \\
\Delta_{21} &= (-1)^{2+1}|(-2)| = 2, & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2}|(1)| = 1
\end{aligned}$$

y entonces la matriz adjunta será:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Sea $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz 2×2 genérica. Entonces sabemos que:

- $|M| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
- $\begin{cases} \Delta_{11} = a_{22} & \Delta_{12} = -a_{21} \\ \Delta_{21} = -a_{12} & \Delta_{22} = a_{11} \end{cases}$.

Por ello la matriz adjunta de M será

$$\text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

y entonces la matriz inversa es

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{Adj}(M)^t = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^t$$

con lo que finalmente obtenemos la siguiente fórmula para la inversa de una matriz 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ entonces su determinante es

$$|A| = -2 - 1 - 6 = -9$$

y además sus adjuntos son

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, & \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, & \Delta_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ \Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, & \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, & \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, & \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \end{cases}$$

con lo que su matriz adjunta será:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

y A^{-1} la calcularemos como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

4.7.2 Ejercicios

Veamos a continuación algunos ejercicios sobre determinantes y rangos de matrices.

Ejercicios.

1) Resolver la ecuación $\left| \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \right| = 0.$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \right| = \\ & = \left(\begin{array}{l} \text{restando a todas} \\ \text{la columna 1} \end{array} \right) = \left| \begin{pmatrix} 1+x & -x & -x & -x \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| \\ & = (F1=F1+F4) = \left| \begin{pmatrix} 2+x & -x & -x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| \\ & = \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando por} \\ \text{la columna 4} \end{array} \right) = x \cdot (-1)^{4+4} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2+x & -x & -x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \right| \\ & = \left(\begin{array}{l} F1=F1+F2 \\ F1=F1+F3 \end{array} \right) = x \cdot \begin{pmatrix} 4+x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot (x+4) \cdot x \cdot x \\ & = (x+4) \cdot x^3. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior la ecuación del enunciado equivale a la ecuación

$$x^3 \cdot (x+4) = 0$$

cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = -4$.

2) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $A^2 = A$. Determínese $|A|$.

$$A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A| \Rightarrow |A \cdot A| = |A| \Rightarrow |A| \cdot |A| = |A|$$

$$\Rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ \text{ó} \\ |A| = 1 \end{cases}.$$

3) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $r \in \mathbb{R}$. Determínese el valor de $|r \cdot A|$.

Supongamos que $A = (a_{ij})_{n \times n}$ entonces puesto que sabemos que un número que multiplica a toda una columna puede salir del determinante:

$$\begin{aligned}
 |r \cdot A| &= \\
 &= \left| \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & \cdots & r \cdot a_{1n} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & \cdots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{n1} & r \cdot a_{n2} & \cdots & r \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \right| = r \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & r \cdot a_{12} & \cdots & r \cdot a_{1n} \\ a_{21} & r \cdot a_{22} & \cdots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & r \cdot a_{n2} & \cdots & r \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\
 &= r^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & r \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & r \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \cdots = r^n \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\
 &= r^n \cdot |A|.
 \end{aligned}$$

4) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ calcúlese $|\text{Adj}(A)|$.

Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t$ así que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t \Rightarrow |A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t \right|$$

y empleando el resultado del ejercicio anterior y la fórmula para el determinante de la matriz inversa y de la transpuesta tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|A|} &= \left(\frac{1}{|A|} \right)^n \cdot |\text{Adj}(A)^t| = \frac{1}{|A|^n} \cdot |\text{Adj}(A)| \\
 \Rightarrow |\text{Adj}(A)| &= \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}.
 \end{aligned}$$

5) Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$ tales que $|A| = 5$ y $|B| = 3$. Obténganse entonces los valores de $|B \cdot A^t|$, $|B \cdot A \cdot B|$, $A^{-1} \cdot B \cdot A$ y $\text{Adj}(A)$.

$$\begin{aligned}
 |B \cdot A^t| &= |B| \cdot |A^t| = |B| \cdot |A| = 3 \cdot 5 = 15. \\
 |B \cdot A \cdot B| &= |B| \cdot |A| \cdot |B| = 3^2 \cdot 5 = 45. \\
 |A^{-1} \cdot B \cdot A| &= |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot |A| = |B|. \\
 |\text{Adj}(A)| &= |A|^{n-1} = 5^{n-1}.
 \end{aligned}$$

6) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & -1 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2.

Tenemos que:

$$\text{rango}(A) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} C2=C2+C4 \\ C3=C3-C4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} a & b-1 & a+1 & -1 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & a+1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F1=F1+F4-F2 \\ F3=F3-F4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & a+1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C1=C1-a C3 \\ C2=C2+C3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & a+b & a & 0 \\ b-a(a-1) & 2a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F2=F2-a F1 \\ F3=F3-(a-1)F1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & a+b & 0 & 0 \\ b-a(a-1) & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{reordenando filas} \\ \text{y columnas} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & a+b \\ 0 & 0 & b-a(a-1) & 2a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mediante la} \\ \text{Propiedad 72} \end{pmatrix} = 2 + \text{rango} \begin{pmatrix} -a^2 & b+a \\ b-a(a-1) & 2a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior obtendremos que:

$$\begin{aligned}
\text{rango}(A) = 2 &\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} -a^2 & b+a \\ b-a(a-1) & 2a \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a^2 & b+a \\ b-a(a-1) & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b+a=0 \\ 2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Luego la única elección posible es $a = b = 0$ y efectivamente es fácil comprobar que en este caso $\text{rango}(A) = 2$.

Véase que cuando manipulamos parámetros es válida una operación elemental del tipo $F2=F2-aF1$ pero nunca una de la forma $F2=F2-\frac{1}{a}F1$ ya que en ella estamos suponiendo que $a \neq 0$ (para poder calcular $\frac{1}{a}$) lo cual puede no ser cierto.

4.8 Sistemas lineales de ecuaciones

4.8.1 Conceptos básicos

Una ecuación es una igualdad matemática en la que aparece uno o varios datos desconocidos denominados incógnitas. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que por lo general comparten las mismas incógnitas. En este capítulo estudiaremos un tipo particular de sistemas, los ‘sistemas lineales’, que son de especial importancia debido a:

- La gran cantidad de aplicaciones. En la base de prácticamente cualquier cálculo matemático se halla siempre la necesidad de resolver un sistema lineal.
- La posibilidad de un tratamiento teórico a través de técnicas algebraicas elementales. De hecho, todas las técnicas que utilizaremos ya han sido presentadas en el capítulo anterior.

- Columna de variables del sistema a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Ecuación matricial del sistema o forma matricial del sistema a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$$

- Matriz ampliada del sistema a la matriz

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

En los siguientes ejemplos ilustramos los conceptos que hemos introducido en las definiciones anteriores. Vemos en ellos que hay sistemas que tienen una única solución pero que también podemos encontrar otros que tienen múltiples soluciones. En ese último caso, cuando tenemos un sistema con varias soluciones, es fundamental encontrar un método adecuado que permita escribirlas todas ellas. La técnica básica para la representación de soluciones múltiples consiste en la utilización de parámetros. En los ejemplos siguientes presentamos las ideas básicas de esta técnica.

Ejemplos 99.

1) Consideremos el sistema de dos ecuaciones y variables (x, y, z) siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}.$$

Se trata de un sistema lineal completo para el que la matriz de coeficientes y las columnas de términos independientes y variables son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Además, es fácil comprobar que $(5, -2, 0)$, $(10, -5, 1)$, $(0, 1, -1)$ son soluciones del sistema. Para ello, sustituimos las variables x , y y z por los valores correspondientes en las ecuaciones del sistema o en su ecuación matricial. Así por ejemplo:

$$(5, -2, 0) \text{ es solución ya que tomando } \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \text{ tenemos } \begin{cases} \begin{cases} 5 + (-2) + 0 = 1 \\ 5 + (-2) - 2 \cdot 0 = 3 \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

2) Consideremos el sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$

Puesto que no hemos indicado lista de variables, hemos de suponer que toda incógnita o dato desconocido que aparezca en el sistema es una variable del mismo. En el sistema encontramos las incógnitas

$$\alpha, x, y, z,$$

que, por tanto, serán todas ellas variables. En este caso el sistema de ecuaciones indicado no es lineal puesto que dos de sus variables, α y x , aparecen multiplicadas entre si.

3) Consideremos el sistema de tres ecuaciones y con variables (x, y, z) siguiente:

$$\begin{cases} \alpha x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$

Para este sistema, puesto que hemos indicado quienes son sus variables, sabemos que α no es una de ellas así que será un parámetro del sistema (recuérdese que un parámetro es una incógnita que aparece en el sistema y que no forma parte de la lista de variables).

En este caso el sistema es lineal y su matriz de coeficientes y columnas de términos independientes y variables son:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

La solución del sistema dependerá del valor del parámetro α . Si $\alpha \neq 1$, es fácil comprobar que el sistema tiene una única solución dada mediante

$$\left(\frac{3}{\alpha-1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3}{\alpha-1} \right) \text{ o lo que es lo mismo, } \begin{cases} x = \frac{3}{\alpha-1}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{\alpha-1}. \end{cases}$$

Por contra, si $\alpha = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$

y no tiene ninguna solución. Ello podemos verlo fácilmente ya que sumando la primera ecuación con la tercera y restando el doble de la segunda tenemos

$$\begin{array}{rcl} x + 3y + z & = & 1 \\ -2(x + y + z) & = & -2 \cdot (-1) \\ \hline x - y + z & = & 0 \\ \hline 0x + 0y + 0z & = & 3 \end{array}$$

y es evidente que la ecuación resultante no puede cumplirse nunca para ningunos valores de x, y, z .

4) El sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 12 \\ y + z + 3w = 10 \\ x + 2y - 3z + 2w = 14 \\ 2x - 2y + 4z + 5w = 9 \end{cases}$$

y en general tendremos infinitas soluciones correspondientes a todos los demás posibles valores de α . El conjunto de todas las soluciones será

$$\{(3 - \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

6) En el sistema,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \end{cases},$$

aparecen cuatro variables y solamente dos ecuaciones. Con sólo dos ecuaciones no podemos calcular el valor de las cuatro variables x , y , z y w . Como en el ejemplo anterior, solo podremos resolver el sistema si sabemos lo que valen algunas de las variables. Supongamos por tanto que el valor de z es α y el de w es β . Es decir, hemos tomado como parámetro las variables z y w con lo que el sistema queda en la forma,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \\ z = \alpha \\ w = \beta \end{cases}.$$

Puesto que hemos supuesto que conocemos las variables z y w , las sustituiremos por sus valores y dejaremos en el miembro izquierdo de cada igualdad solamente las variables que aún desconocemos,

$$\begin{cases} x + y = 2 - \alpha - \beta \\ x - y = 1 - \alpha + 2\beta \\ z = \alpha \\ w = \beta \end{cases}.$$

De esta forma, nos queda por resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 - \alpha - \beta \\ x - y = 1 - \alpha + 2\beta \end{cases}.$$

que tiene dos variables y dos ecuaciones y podremos resolverlo dando el valor de x y y que, por supuesto, aparecerá en función de los parámetros α y β . Para ello bastará con sumar o restar entre sí las dos ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} x + y = 2 - \alpha - \beta \\ x - y = 1 - \alpha + 2\beta \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sumando las ecuaciones}} \\ \xrightarrow{\text{restando las ecuaciones}} \end{array} \begin{cases} 2x = 3 - 2\alpha + \beta \\ 2y = 1 - 3\beta \end{cases}$$

y la solución final es

$$\begin{cases} x = \frac{3-2\alpha+\beta}{2} \\ y = \frac{1-3\beta}{2} \\ z = \alpha \\ w = \beta \end{cases} \text{ o de otra forma, } \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right).$$

El sistema tiene infinitas soluciones todas las cuales se obtienen dando valores a los parámetros α y β . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \beta = 0 &\rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \\ \alpha = 1, \beta = 1 &\rightarrow (1, -1, 1, 1) \end{aligned}$$

pudiéndose obtener las demás soluciones de esta manera. De este modo, el conjunto de todas las soluciones del sistema es

$$\left\{ \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ya hemos comentado que un sistema compatible que tiene una única solución no necesita ningún parámetro para ser resuelto. Es decir, necesita 0 parámetros y será, en consecuencia, de solución 0-dimensional.

Es evidente que un sistema homogéneo siempre tendrá al menos una solución consistente en elegir todas las variables iguales a cero. Por tanto, todo sistema homogéneo es siempre compatible. En caso de que el sistema no sea homogéneo será necesario recurrir a argumentos más complejos para determinar si el sistema es o no compatible.

Ejemplo 102. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Es evidente que no tiene ninguna solución ya que no es posible encontrar ningunos valores de x e y que cumplan al mismo tiempo las dos ecuación (si x e y suman 0, es imposible que simultáneamente sumen también 1). El sistema es por tanto incompatible.

En este caso ha sido posible comprobar a simple vista que el sistema es incompatible. Sin embargo, podemos encontrarnos con otros casos no tan sencillos en los que no será tan fácil determinar si el sistema en cuestión es compatible o incompatible.

El siguiente teorema permite determinar de qué tipo es un sistema a partir del estudio de los rangos de su matriz de coeficientes y de su matriz ampliada.

Teorema 103 (Rouché-Frobenius). *Consideremos un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas expresado mediante su forma matricial:*

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Entonces:

- i) El sistema es compatible $\Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|B)$.*
- ii) El sistema es determinado $\Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = n = \text{número de incógnitas}$.*
- iii) El sistema tiene solución k -dimensional ($k > 0$) \Leftrightarrow Es compatible y $n - \text{rango}(A) = k$.*

Demostración. Veamos ahora solamente la demostración del punto *i)*. La demostración de los puntos *ii)* y *iii)* se consigue fácilmente recurriendo a los argumentos que emplearemos más tarde en la **Propiedad 113**.

Si consideremos las m -uplas columna de A , v_1, v_2, \dots, v_n tenemos que $A = (v_1|v_2|\dots|v_n)$ y el sistema se puede escribir en la forma

$$(v_1|v_2|\dots|v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B.$$

Teniendo en cuenta las representaciones vistas en el Capítulo 4 (página ??) para el producto de una matriz de uplas columna por una columna, podemos escribir esta última igualdad en la forma

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = B.$$

En tal caso, el sistema tendrá solución si existen los números x_1, x_2, \dots, x_n que, sustituidos en esta expresión, la hacen cierta. Pero si se verifica la última igualdad entonces B se puede obtener como combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n . En resumidas cuentas,

$$\begin{aligned} \text{El sistema tiene solución} &\Leftrightarrow B \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \Leftrightarrow \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_n) = \text{rango}(v_1|v_2|\dots|v_n|B) \\ &\Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|B), \end{aligned}$$

donde la penúltima implicación es consecuencia de la **Propiedad 74** del Capítulo 4. \square

En un sistema de solución k -dimensional, $k > 0$, el conjunto de soluciones depende de ciertos parámetros que pueden tomar cualquier valor y por ello el sistema tendrá infinitas soluciones. Un sistema compatible siempre es determinado con una única solución o indeterminado y por tanto de solución k -dimensional, $k > 0$, con infinitas soluciones. En consecuencia, un sistema tiene o bien ninguna solución (sistema incompatible) o bien una única solución (determinado) o bien infinitas soluciones (indeterminado)

Ejemplos 104. 1) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z + w = 3 \\ y - z + w = 2 \\ 2x + z + w = -1 \\ 2x + 3y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 4, \quad \text{rango}(A|B) = 4.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 4 = n. \text{ variables}$$

y el sistema es compatible determinado.

2) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = -3 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 2.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2 < n. \text{ variables}$$

y el sistema es compatible indeterminado de solución

$$n - \text{rango}(A) = 4 - 2 = 2\text{-dimensional.}$$

3) El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 3 \\ x + 2z + w = 3 \\ y + 2z + w = 3 \\ x - 2y - 2z - w = 7 \end{cases}$$

tiene matriz de coeficientes y ampliada iguales a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{rango}(A) = 2, \quad \text{rango}(A|B) = 3.$$

Por tanto

$$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|B)$$

y el sistema es incompatible.

4.8.2 Cálculo de los coeficientes de una combinación lineal

Dadas las n -uplas v_1, v_2, \dots, v_p y w , supongamos que queremos saber si

$$w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle.$$

En principio podemos dar respuesta a esta pregunta aplicando los resultados sobre rangos que vimos en el Capítulo 4. Ahora bien, sabemos que $w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ si y solamente si podemos encontrar los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = w.$$

Si tomamos la matriz $A = (v_1|v_2|\dots|v_p)$ podemos escribir la ecuación anterior como

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = w.$$

Pero esto último constituye un sistema en forma matricial en el que las incógnitas son los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ que estamos buscando.

Es evidente entonces que $w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ equivale a que dicho sistema lineal de ecuaciones tenga solución y entonces los coeficientes que nos permiten obtener w combinando v_1, v_2, \dots, v_p se calcularán resolviendo dicho sistema.

Ejemplo 105. Comprobemos si $(2, 1, -1)$ se puede obtener combinando $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, -2)$. Se podrá obtener como combinación lineal siempre que podamos encontrar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2, 1, -1) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, -2) \Leftrightarrow (2, 1, -1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, se obtiene $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$. Puesto que el sistema tiene solución concluimos que el vector en cuestión sí se puede obtener como combinación de los otros. Además los coeficientes de esa combinación serán

$$(2, 1, -1) = 1(1, 1, 1) + 1(1, 0, -2).$$

- Si tras reducir la matriz mediante operaciones elementales aparece una fila con todos sus elementos nulos en las columnas de variables y el elemento en el término independiente no nulo, entonces el sistema será incompatible.

Ejemplo 109. En la siguiente matriz detallada,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

aparece una fila completa de ceros acompañada en los términos independientes por un elemento no nulo. Si escribimos la ecuación correspondiente a esta fila tendríamos

$$0x + 0y + 0z + 0w = 2$$

y es evidente que no existe solución válida para esta ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.

- Despejaremos las variables correspondientes a las columnas que hemos reducido.
- Tomaremos como parámetro las variables correspondientes a las columnas que no han sido reducidas.

Ejemplo 110. En la siguiente matriz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

después de reducir dos columnas no podemos elegir más pivotes no nulos a altura diferente de los ya marcados. Por tanto no aplicaremos más operaciones elementales y la matriz está ya en forma escalonada reducida. Las columnas que hemos reducido corresponden a las variables x y z y por estas serán las que despejaremos, las otras dos variables y , w , serán las que tomaremos como parámetro. Para resolver, simplemente reescribimos (por supuesto, no es necesario escribir la tercera ecuación ya que es, toda ella, nula) el sistema y despejamos del modo indicado:

$$\begin{cases} x + y + w = -1, \\ -y + 2z + 3w = 2, \\ y = \alpha, \\ w = \beta \end{cases} \xrightarrow{\substack{\Rightarrow \\ \text{Sustituyendo} \\ \text{parámetros} \\ \text{y despejando}}} \begin{cases} x = -1 - \alpha - \beta, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ y = \alpha, \\ w = \beta. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \alpha - \beta, \\ y = \alpha, \\ z = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\beta, \\ w = \beta. \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos en los que reproducimos esta técnica de resolución de sistemas.

Ejemplos 111.

1) Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

La matriz detallada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Obtengamos la matriz escalonada reducida. Para ello, iremos tomando distintos pivotes, todos ellos a diferentes alturas, para ir anulando cada columna.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(pivote}=2^\circ \text{ elemento de la } 1^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & -6 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$F_3 = F_3 - 5F_2$
 $F_4 = F_4 - 3F_2$
 $F_5 = F_5 - 2F_2$
 $F_6 = F_6 - 3F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & -6 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(pivote}=6^\circ \text{ elemento de la } 2^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 15 & -16 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & \underline{1} & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$F_2 = F_2 - F_6$
 $F_3 = F_3 + 2F_6$
 $F_4 = F_4 + F_6$
 $F_5 = F_5 - 2F_6$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 15 & -16 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & \underline{1} & 4 & -5 & -3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(pivote}=4^\circ \text{ elemento de la } 3^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \underline{9} & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 & -\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} \end{array} \right)$$

$F_2 = F_2 + \frac{6}{9} F_4$
 $F_3 = F_3 - \frac{15}{9} F_4$
 $F_5 = F_5 + \frac{6}{9} F_4$
 $F_6 = F_6 - \frac{4}{9} F_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \underline{9} & -9 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 & -\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(pivote}=3^\circ \text{ elemento de la } 4^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ \hline \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-1} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \underline{9} & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{5}{9} \end{array} \right)$$

$F_2 = F_2 + F_3$
 $F_4 = F_4 - 9F_3$
 $F_5 = F_5 + F_3$
 $F_6 = F_6 - F_3$

Puede observarse que ya no es posible elegir ningún pivote no nulo a altura diferente de los anteriormente seleccionados. Ello indica que tenemos ya la forma escalonada reducida. La simple observación de ella nos permite afirmar que se trata de un sistema compatible indeterminado con solución 1-dimensional que necesita un único parámetro para ser resuelto. Las variables correspondiente a las columnas que hemos reducido son x_1, x_2, x_3, x_4 y estas serán las que despejaremos y por tanto hemos de tomar la variable x_5 como parámetro para obtener la solución. La ventaja de la forma escalonada reducida reside en que, una vez que llegamos a ella, calcular las soluciones no precisa de más operaciones. En efecto, si escribimos el sistema correspondiente a la matriz escalonada reducida y tomamos como parámetro la variable x_5 tenemos,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_4 - \frac{2}{3}x_5 = -\frac{1}{3} \\ 9x_3 + x_5 = -13 \\ 0 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{9}x_5 = -\frac{5}{9} \\ x_5 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ x_3 = -\frac{13}{9} - \frac{\alpha}{9} \\ x_2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases}.$$

De donde deducimos directamente que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha \\ x_3 = -\frac{13}{9} - \frac{1}{9}\alpha \\ x_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases} \quad \text{o bien en la forma} \quad \left(0, -\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\alpha, -\frac{13}{9} - \frac{1}{9}\alpha, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha, \alpha\right)$$

en función del parámetro α .

2) Estudiemos ahora el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Para ello intentaremos llegar a su matriz escalonada. Para ello vamos seleccionando pivotes y anulando las columnas correspondientes.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(pivote}=4^\circ \text{ elemento de la } 4^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$F_2 = F_2 - 2F_4$
 $F_6 = F_6 + F_4$

$$\xrightarrow{\text{(pivote}=5^\circ \text{ elemento de la } 3^\text{a} \text{ columna)}} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ -9 & -14 & 0 & 0 & -7 \\ -9 & -16 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 3 & 3 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$F_2 = F_2 - 3F_5$
 $F_3 = F_3 - 4F_5$
 $F_6 = F_6 - F_5$

En realidad podríamos seguir reduciendo columnas pero observamos que aparece una fila, la última, toda de ceros acompañando a un término independiente no nulo. Sin necesidad de llegar a la forma escalonada reducida deducimos que el sistema es incompatible indeterminado.

4.8.4 Regla de Cramer (Resolución de sistemas mediante cálculo de matriz inversa)

Dado un sistema cualquiera podemos siempre extraer su ecuación matricial que será de la forma

$$AX = B, \quad A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Entonces, es posible aplicar las reglas para la manipulación de igualdades de matrices del Capítulo 4 para resolver el sistema. En realidad, bastaría con despejar X de esa ecuación matricial para llegar a la solución en la forma

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Esto último nos proporciona un método válido para resolver sistemas. Sin embargo, debemos tener en cuenta que despejar de esta manera es factible solamente cuando la matriz A es cuadrada (o lo que es lo mismo, el

sistema tiene tantas ecuaciones como variables) y regular. Un sistema que satisface estas condiciones y que puede ser resuelto despejando la matriz de coeficientes se denomina 'sistema de Cramer'. Con más precisión tenemos:

Propiedad 112. Consideremos el sistema con n ecuaciones y variables (x_1, x_2, \dots, x_n) , dado mediante su ecuación matricial

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $|A| \neq 0$ el sistema es compatible y determinado y su solución es

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t \cdot B. \tag{4.6}$$

La última expresión de (4.6) es lo que suele conocerse como regla de Cramer. Generalmente se presenta la regla de Cramer desarrollando el producto matricial que aparece indicado en la propiedad despejando cada variable de forma particular. Adquiere entonces la siguiente formulación:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Cabría preguntarse si es posible modificar esta técnica de algún modo que permita su uso para cualquier tipo de sistemas y no solamente para sistemas de Cramer. La clave para responder a esta pregunta la encontramos en la definición alternativa de rango de una matriz que dimos en la **Propiedad 84**. Entonces vimos que el rango es el orden del mayor menor regular de una matriz. Si la matriz A no es regular o no es cuadrada no podremos obtener su inversa pero si tenemos que $\text{rango}(A) = r$ podremos encontrar dentro de A una submatriz que sí es regular. Si bien el sistema inicial puede no tener el mismo número de variables que de ecuaciones, una vez detectada dicha submatriz regular podremos modificar esta situación si tenemos en cuenta que:

- ★ En un sistema podemos eliminar aquellas ecuaciones que sean superfluas.
- ★ El número de ecuaciones se puede modificar tomando variables como parámetro.

En la siguiente propiedad desarrollamos de forma detallada la idea del párrafo anterior que permitirá extender el método de Cramer a cualquier sistema.

Propiedad 113. Consideremos el sistema con m ecuaciones y variables (x_1, x_2, \dots, x_n) , dado mediante su ecuación matricial

$$A \cdot X = B,$$

donde

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el sistema es compatible, en cuyo caso

$$\text{rango}(A | B) = \text{rango}(A) = r.$$

Consideremos el menor $\tilde{A}_{r \times r}$ de A obtenido como intersección de las filas i_1, i_2, \dots, i_r y las columnas j_1, j_2, \dots, j_r de A y supongamos que $|\tilde{A}| \neq 0$. Entonces:

- i) El sistema compuesto únicamente por las ecuaciones i_1 -ésima, i_2 -ésima, \dots , i_r -ésima del sistema inicial tiene las mismas soluciones que este.
- ii) El sistema obtenido al tomar como parámetro toda variable que no sea alguna de $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ es determinado.

Dicho de otra manera, una vez que hemos detectado dentro de la matriz de coeficientes, A , un menor regular de orden r , debemos eliminar todas las ecuaciones que no intervengan en el menor y tomar como parámetro todas las variables cuya columna no interviene en el menor.

Ejemplo 114. En principio, para resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 9 \\ 3x_1 + 7x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$$

no sería posible aplicar el método de Cramer. Sin embargo podemos recurrir a la **Propiedad 113** para transformar el sistema adecuadamente. En primer lugar, dado que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -18 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & -18 & -5 & -6 \end{array} \right) = 3$$

el sistema es compatible indeterminado de solución 1-dimensional. El rango de la matriz de coeficientes es igual a 3 y por ello existirá dentro de ella una submatriz de orden 3 regular. Si tomamos la submatriz correspondiente a las filas primera, segunda y cuarta y a las columnas primera, segunda y cuarta tenemos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

y por tanto dicho menor es regular, tiene inversa. Marquemos en la matriz de coeficientes del sistema las filas y columnas correspondientes al menor seleccionado,

$$\begin{array}{l} \text{ecuación 1}^{\text{a}} \\ \text{ecuación 2}^{\text{a}} \\ \text{ecuación 3}^{\text{a}} \\ \text{ecuación 4}^{\text{a}} \\ \text{ecuación 5}^{\text{a}} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & -5 & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -7 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{6} \\ 3 & 7 & -18 & -5 \end{pmatrix}.$$

Eliminemos las ecuaciones que no intervienen en el menor y tomemos como parámetro las variables que tampoco lo hacen. Tras ello, el sistema queda de la forma

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9 \\ x_3 = \alpha \end{cases}.$$

Puesto que, en función del parámetro α , ya conocemos el valor de x_3 , resolveremos solamente el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5\alpha - 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7\alpha + 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_4 = \alpha + 9 \end{cases} .$$

Pero ahora tenemos igual número de ecuaciones y de variables y además la matriz de coeficientes es precisamente el menor seleccionado antes que es regular. Por tanto este sistema es de Cramer y puede ser resuelto despejando en la ecuación matricial que es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} .$$

Despejando y calculando la inversa, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -13 & 5 \\ -10 & 8 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\alpha - 1 \\ 7\alpha + 2 \\ \alpha + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha \\ 3\alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La solución del sistema será entonces,

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \alpha, \\ x_2 = 3\alpha - 1, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{ó lo que es lo mismo } (2 - \alpha, 3\alpha - 1, \alpha, 1).$$

4.8.5 Expresión de la solución de un sistema mediante combinaciones lineales

Hemos visto que para expresar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales necesitamos introducir parámetros. La representación de la solución del sistema que obtenemos mediante ellos se denomina ‘expresión paramétrica’ de la solución del sistema. Sin embargo, en esta sección veremos que también podemos describir las soluciones de un sistema mediante combinaciones lineales. Para obtener esta representación mediante combinaciones lineales nosotros tomaremos como base la expresión paramétrica de la solución del sistema. A partir de su forma de upla, bastará con separar adecuadamente las uplas correspondientes a cada parámetro. Necesitaremos únicamente introducir la siguiente notación:

Definición 115. Dado un subconjunto de uplas $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y una upla fija $p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de uplas que se obtiene si sumamos la upla fija, p , a todas las uplas de C , se denota $p + C$. Es decir:

$$p + C = \{p + c : c \in C\}.$$

Ejemplo 116. Tomemos el siguiente conjunto de 2-uplas

$$C = \{(1, 0), (2, 3), (-1, 4)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

y consideremos la upla fija $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$. Entonces el conjunto $p + C$ es el que se obtiene si sumamos la upla $(2, -1)$ a todas las de C :

$$\begin{aligned} p + C &= (2, -1) + \{(1, 0), (2, 3), (-1, 4)\} \\ &= \{(2, -1) + (1, 0), (2, -1) + (2, 3), (2, -1) + (-1, 4)\} \\ &= \{(3, -1), (4, 2), (1, 3)\}. \end{aligned}$$

Veamos ya mediante algunos ejemplos cómo podemos obtener la expresión de la solución de un sistema mediante combinaciones lineales:

Ejemplos 117.

1) Consideremos el sistema lineal,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - 2w = 1 \end{cases}.$$

En el apartado 3) de **Ejemplos 99** (pag. 211) resolvimos este sistema tomando dos variables como parámetro de manera que se trata de un sistema de solución 2-dimensional. Empleando los parámetros α y β la solución se escribe en la forma

$$\begin{cases} x = \frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \\ y = \frac{1-3\beta}{2}, \\ z = \alpha, \\ w = \beta \end{cases} \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad \left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right).$$

Estas dos últimas representaciones son lo que se denominan expresiones paramétricas de la solución del sistema. Para expresar las soluciones mediante combinaciones lineales emplearemos la forma de upla (la segunda) de la representación paramétrica de la solución. Comenzaremos separando en cada componente los sumandos que corresponden a cada uno de los dos parámetros y los que no corresponden a ninguno de ellos y procederemos luego como se indica a continuación:

$$\left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right) = \left(\underbrace{\frac{3}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } \frac{3}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: -\alpha \\ \text{Parte para } \beta: \frac{1}{2}\beta}}, \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } \frac{1}{2} \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: -\frac{3}{2}\beta}}, \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: \alpha \\ \text{Parte para } \beta: 0}}, \underbrace{\beta}_{\substack{\text{Parte sin parámetros: } 0 \\ \text{Parte para } \alpha: 0 \\ \text{Parte para } \beta: \beta}} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Separamos en uplas dife-} \\ \text{rentes la parte que no} \\ \text{corresponde a ningún} \\ \text{parámetro y la que corres-} \\ \text{ponden a cada parámetro} \end{array} \right) &= \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)}_{\text{Parte sin parámetros}} + \underbrace{(-\alpha, 0, \alpha, 0)}_{\text{Parte para } \alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\beta, -\frac{3}{2}\beta, 0, 1 \right)}_{\text{Parte para } \beta} \\ \left(\begin{array}{l} \text{Sacamos factor común en} \\ \text{la upla de cada parámetro} \end{array} \right) &= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) + \alpha(-1, 0, 1, 0) + \beta\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right) \end{aligned}$$

En definitiva tenemos que

$$\left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)}_{\text{Upla fija}} + \underbrace{\alpha(-1, 0, 1, 0) + \beta\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right)}_{\text{Combinación lineal de } (-1, 0, 1, 0) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right)}$$

Observamos entonces que todas las soluciones del sistema se obtienen sumando la upla fija $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ a una combinación lineal de las uplas $(-1, 0, 1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)$. Ahora bien, el conjunto de soluciones del sistema lo obtenemos dando distintos valores a los parámetros α y β por lo que la solución del sistema podrá expresarse como

$$\left\{ \underbrace{\left(\frac{3-2\alpha+\beta}{2}, \frac{1-3\beta}{2}, \alpha, \beta \right)}_{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \text{ más un elemento de } \langle (-1, 0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right) \rangle} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) + \langle (-1, 0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right) \rangle.$$

Esta última expresión,

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) + \langle (-1, 0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right) \rangle,$$

es la representación del conjunto de soluciones del sistema mediante combinaciones lineales.

2) Calculemos la solución del siguiente sistema expresándola en su forma paramétrica y mediante combinaciones lineales,

$$H \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

Nuevamente comenzamos resolviendo el sistema. Ello podemos hacerlo mediante cualquiera de las técnicas del Capítulo ?? obteniéndose como resultado que el sistema es de solución 1-dimensional. En función del parámetro α , todas las soluciones del sistema se escriben como

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha).$$

Esta sería la solución del sistema expresada en forma paramétrica. A partir de ella, separando las uplas correspondientes a cada parámetro (en este caso tenemos un único parámetro α) y a los términos sin parámetro, tenemos,

$$(0, \frac{1}{9}\alpha, -\frac{1}{9}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha) = (0, 0, 0, 0, 0) + \alpha(0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Por tanto, la expresión de la solución del sistema mediante combinaciones lineales es

$$(0, 0, 0, 0, 0) + \langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\langle (0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 1) \rangle.$$

Véase que cuando el sistema es homogéneo la upla fija que aparece en la representación mediante combinaciones lineales es la upla nula y podemos eliminarla fácilmente. Sin embargo, esto no sucede en el caso de los sistemas completos para los que la upla fija nunca será nula.