Capítulo 2

Derivación e integración

La derivada es la formalización matemática del concepto de velocidad. Puesto que utilizamos funciones para representar fenómenos que evolucionan con respecto al tiempo, la derivada será fundamental para analizar distintos aspectos de esos fenómenos. En numerosas situaciones, es más fácil determinar la velocidad de crecimiento que el valor total que alcanza una magnitud. En esos casos debemos idear mecanismos para, a partir de la función de velocidad, poder deducir la función de valor total en cada instante. Aquí entran en juego los conceptos de integral indefinida y definida cuya interpretación geométrica como área delimitada por una función nos llevará también a distintas aplicaciones en distintos contextos.

En este tema exponemos los aspectos fundamentales del cálculo diferencial e integral.

2.1 Concepto de derivada

El modelo que ofrece una visión más clara del significado de la derivadas es probablemente el modelo físico de la velocidad de un cuerpo. Supongamos que nos desplazamos desde la ciudad A hasta la B utilizando un automóvil. Llamaremos $e(t)$ a la cantidad de kilómetros que hemos recorrido durante las primeras t horas. Si nuestro viaje viaje dura b horas, para cada instante de tiempo, t, entre 0 y b, dispondremos de un valor para la función e. Dicho de otro modo, tenemos una función

$$\begin{array}{rcl} e:[0,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e(t) = \text{ Kilómetros recorridos hasta la hora } t \end{array}$$

Tomemos un instante t_0 y supongamos que a partir de la información que proporciona la función e pretendemos calcular la velocidad a la que circulábamos justo en ese instante t_0. Si realizamos el cálculo

$$\frac{e(b)-e(t_0)}{b-t_0}$$

obtendremos la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_0, b]$. Pero esto no nos proporciona el dato que buscamos ya que durante ese espacio de tiempo la velocidad no ha sido constante. Podríamos tomar como referencia un período menor, digamos desde t_0 hasta cierto momento posterior, t. Sin embargo, por muy próximo que tomemos t a t_0, el cociente

$$\frac{e(t)-e(t_0)}{t-t_0}$$

no será más que la media de las velocidades en el intervalo (t_0, t) que a lo sumo nos servirá para aproximar el valor del dato exacto que buscamos. En realidad, a medida que t se aproxima a t_0 obtenemos respuestas cada vez más próximas a la real pero nunca exactas. La respuesta correcta la obtendríamos si pudiéramos tomar t_0 igual a t de modo que el intervalo de referencia (t_0, t) no introdujera errores. Es evidente que esto último no es posible pero, en su lugar, podemos calcular

$$\lim_{t\to t_0} \frac{e(t)-e(t_0)}{t-t_0}.$$

Este límite nos proporciona la velocidad instantánea justo en el instante t_0 que queríamos encontrar. Dicho límite es lo que llamaremos derivada de la función e en el punto t_0.

Con esta idea en mente veamos ya una definición formal de derivada para una función en un punto.

Definición 1. *Dada $f : D \to \mathbb{R}$:*

i) Dado $x_0 \in D$ en el que tiene sentido el límite, diremos que f es derivable en x_0 y que su derivada en tal punto es $L \in \mathbb{R}$ si se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L.$$

En tal caso escribiremos

$$f'(x_0) = L \quad \text{ó} \quad \frac{df}{dx}(x_0) = L.$$

Si el límite anterior no existe o es $\pm\infty$, diremos que la función f no es derivable en el punto x_0.

ii) Dado un subconjunto $H \subseteq D$, decimos que f es derivable en H si es derivable en todos los puntos de H. Si f es derivable en D (en todo su dominio) diremos que f es una función derivable.

iii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y sea

$$D_1 = \{x \in D : f \text{ es derivable en } x\}.$$

Si $D_1 \neq \emptyset$, llamaremos función derivada de la función f a la función

$$\begin{aligned} f' : D_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}.$$

Al igual que sucede para la continuidad, una función podrá ser derivable solo en aquellos puntos en los que esté definida. Es decir, en aquellos puntos x_0 en los que desconocemos el valor de la función, es decir $f(x_0)$, no podremos estudiar la derivabilidad incluso aunque sea posible calcular el límite.

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, si admitimos que es derivable en $x_0 \in D$ tendremos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L \in \mathbb{R}$$

Pero entonces,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x-x_0)}_{=0} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \cdot L = 0$$

De donde

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En otras palabras, tenemos la siguiente:

Propiedad 2. *Toda función derivable en un punto es también continua en ese punto.*

2.1.1 Interpretaciones del concepto de derivada

Son dos las interpretaciones fundamentales del concepto de derivada. La primera, como la velocidad de variación de cierta magnitud, ya ha sido anunciada en el ejemplo introductorio. La segunda interpretación que veremos es de tipo geométrico. Veámoslas:

La derivada como velocidad de variación: La derivada de una función en un punto es la velocidad de variación de la función en ese punto. Ya hemos justificado esta interpretación en el ejemplo inicial del modelo físico. Veremos a continuación dos modelos en los que la derivada se interpreta nuevamente como la velocidad de crecimiento de cierta magnitud representada por una función.

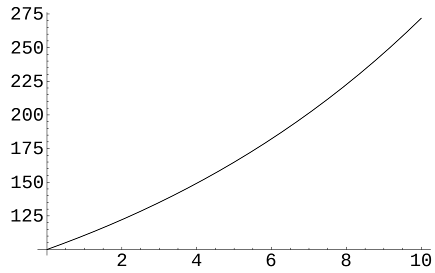
Ejemplos 3. **1)** El número de bacterias de cierto cultivo está determinado por la función

$$P(t) = 100e^{\frac{t}{10}},$$

donde t es el número de horas transcurridas desde el inicio del experimento.

Por ejemplo,

- En el instante inicial ($t = 0$) tenemos $P(0) = 100$ bacterias.
- Pasada una hora ($t = 1$) tenemos $P(1) = e^{\frac{1}{10}} = 110$.
- Pasadas dos horas ($t = 2$) tenemos $P(2) = e^{\frac{2}{10}} = 122$.



La derivada de esta función representa la velocidad de crecimiento de P respecto a t.

$$\left.\begin{array}{l} P(t) = \text{número de bacterias} \\ t = \text{horas} \end{array}\right\} \Rightarrow P'(t) = \frac{\text{bacterias}}{\text{hora}}.$$

Por tanto, $P'(t)$ es la velocidad con que se incrementan el número de bacterias en el instante t medida en bacterias/hora.

La derivada de $P(t)$ es

$$P'(t) = 10e^{\frac{t}{10}}.$$

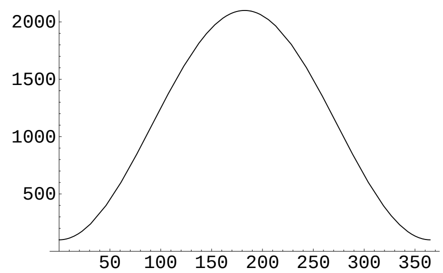
Entonces:

- $P'(0) = 10$. En la hora inicial la velocidad de crecimiento era de 10 bacterias/hora. Durante la hora inicial aparecieron aproximadamente 10 bacterias.
- $P'(1) = 10e^{\frac{1}{10}} = 11.05$. Al comienzo de la hora 1, la velocidad era de 11.05 bacterias/hora. En la hora 1 aparecieron aproximadamente 11.05 bacterias.

2) La cantidad de empleados de cierta empresa viene dada, en función del número de días pasados desde el comienzo del año, por la función:

$$\begin{array}{c} f : [0, 365] \to \mathbb{R} \\ f(x) = 1100 - 1000\cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right) \end{array}.$$

La gráfica correspondiente es,



Sabemos que la derivada de la función f es la velocidad de variación de $f(x)$ con respecto a x. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \text{número de empleados} \\ x = \text{días} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{\text{empleados}}{\text{día}}.$$

Por tanto $f'(x)$ es la variación de empleados (contratos o despidos) por día en el día x.

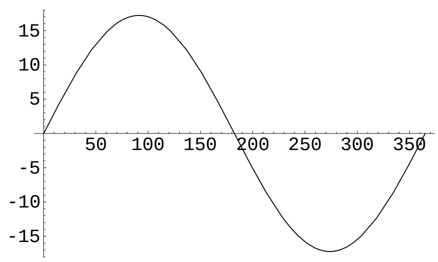
La función derivada de f es

$$f'(x) = \frac{400}{73}\pi \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right).$$

Entonces, por ejemplo:

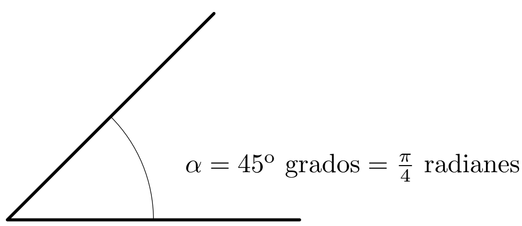
- $f'(50) = 13.0536 \Rightarrow$ En el día $x = 50$, la velocidad de contratación fue de 13.0536 empleados/día. Por tanto en el día 50 se contrataron aproximadamente 13.0536 empleados.
- $f'(182) = 0.148163 \Rightarrow$ En el día $x = 182$, la velocidad de contratación fue de 0.148163 empleados/día. Por tanto el día 182 se contrataron aproximadamente 0.148163 empleados.
- $f'(260) = -16.7342 \Rightarrow$ En el día $x = 260$, la velocidad de contratación fue de -16.7342 empleados/día. Por tanto el día 260 se produjeron aproximadamente 16.7342 despidos.

La gráfica de la función derivada nos permite tener una idea de la evolución del número de empleados contratados diariamente:



Véase que durante los primeros 182 días, la función derivada $f'(x)$ que mide las contrataciones diarias es positiva lo cual implica que cada día se realizan nuevos contratos y en consecuencia observamos que la función $f(x)$ es creciente en ese mismo período. Al mismo tiempo a partir del día 182 la función de contrataciones diarias dada por la derivada $f'(x)$ es negativa lo que supone que en ese espacio de tiempo se realizan despidos y podemos ver que en ese mismo tramo la función $f(x)$ es decreciente.

Interpretación geométrica de la derivada: Habitualmente un ángulo se mide en grados sexagesimales o en radianes. Así por ejemplo, en la gráfica siguiente observamos un ángulo de 45^0 o lo que es lo mismo de $\frac{\pi}{4}$ radianes:



Sin embargo en diferentes ocasiones se emplea el concepto de pendiente para indicar o medir el valor de una ángulo. Veamos su definición:

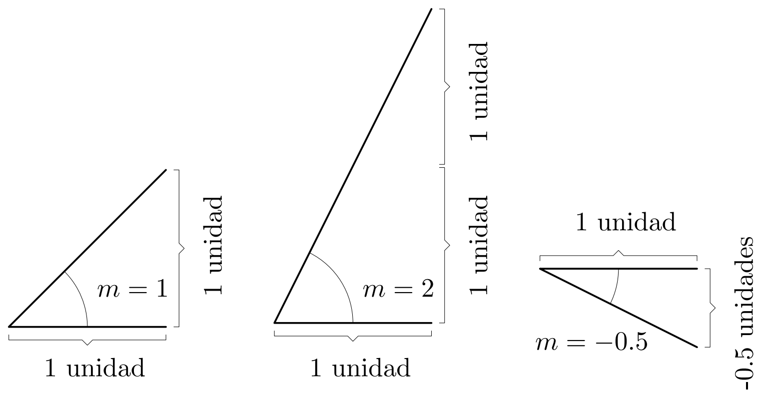
Definición 4. *Dado el ángulo α, llamamos pendiente de α al número*

$$m = \tan(\alpha).$$

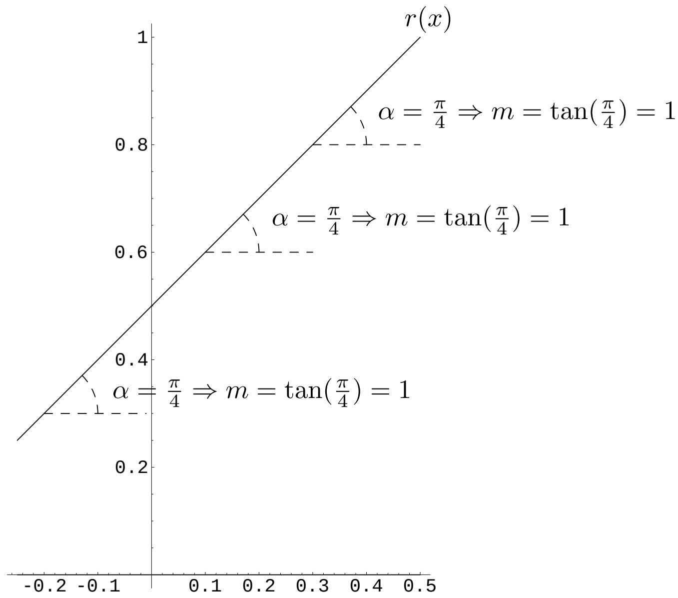
De este modo, la pendiente del ángulo de la gráfica será

$$m = \tan(45^{\circ}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

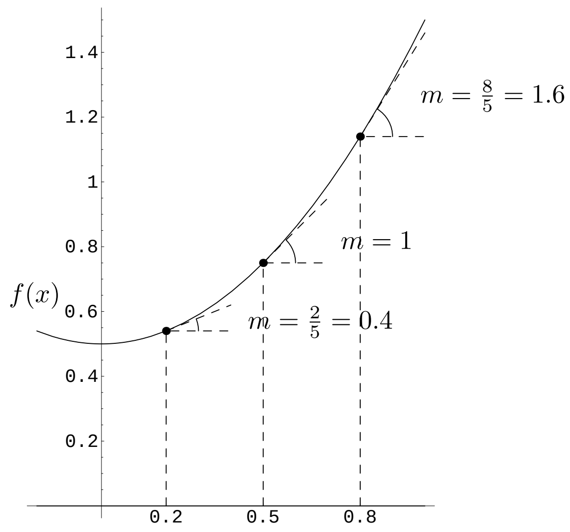
De forma más intuitiva, la pendiente de un ángulo nos indica las unidades que ascendemos por cada unidad que avanzamos si seguimos la dirección de ese ángulo. Por ejemplo, representamos a continuación los ángulos con pendientes $m = 1$, $m = 2$ y $m = -0.5$.



Si consideramos una recta, por ejemplo la función $r(x) = x + 1$, podemos también calcular el ángulo que forma esa recta con la horizontal y su pendiente. Además es evidente que ese ángulo será el mismo en cualquier punto de la recta:



En cambio, si en lugar de una recta consideramos una función cualquiera $f(x)$, podemos comprobar que, en cada punto, el ángulo que forma la función con la horizontal es diferente y por tanto tendremos también una pendiente diferente en cada punto. En la siguiente gráfica observamos cómo la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ tiene pendientes diferentes en distintos puntos:



Un razonamiento similar al que hemos realizado al inicio del tema permite demostrar que la pendiente del ángulo que forma la función con la horizontal en cada punto es igual al valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir, si f es derivable en x_0 tendremos,

$$\text{pendiente de } f \text{ en } x_0 = f'(x_0).$$

No es difícil comprobar que para la función del ejemplo anterior la derivada es

$$f'(x) = 2x.$$

En la gráfica observamos la pendiente de la función en los puntos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.5$ y $x_3 = 0.8$. Si calculamos la derivada en esos puntos comprobaremos que, en cada caso, coincide con la pendiente que vemos en la gráfica:

$$f'(0.2) = 0.4, \quad f'(0.5) = 1, \quad f'(0.8) = 1.6.$$

Si consideramos una recta cualquiera,

$$f(x) = ax + b,$$

sabemos que tiene la misma pendiente en todos los puntos y de hecho, si calculamos su derivada, observamos que tiene siempre el mismo valor,

$$f'(x) = a$$

que es la pendiente de la recta. De este modo, observamos directamente que la pendiente de cualquier recta es el coeficiente, a que acompaña a la variable x en la fórmula de la recta.

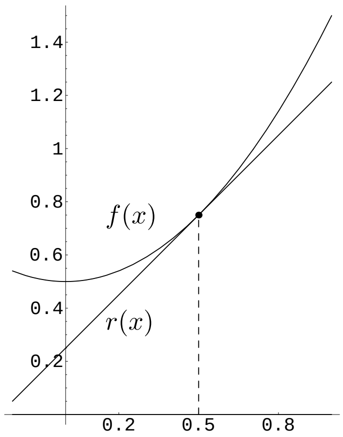
Ejemplo 5. La pendiente de la recta $f(x) = 3x - 10$ es $m = 3$ ya que el coeficiente que acompaña a la variable, x, es precisamente 3. De otro modo tenemos también que $f'(x) = 3$.

Se llama recta tangente a una función f en el punto x_0 a la recta que en el punto x_0 toma el mismo valor y tiene la misma pendiente que f. Dicho de otro modo la recta tangente es aquella que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ en la misma dirección que f. Puesto que sabemos que la pendiente de f en x_0 es $f'(x_0)$, es fácil comprobar que la ecuación de la recta tangente es

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Por ejemplo, la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ en el punto $x_0 = 0.5$ será

$$r(x) = f(0.5) + f'(0.5)(x - 0.5) \Rightarrow r(x) = 0.75 + 1 \cdot (x - 0.5) \Rightarrow r(x) = x + 0.25.$$



2.1.2 Cálculo de derivadas

En el tema anterior estudiamos una lista de funciones elementales y vimos que a partir de ellas podemos obtener otras funciones de dos maneras distintas:

a) funciones con una sola fórmula obtenidas por operación o composición de funciones elementales,

b) funciones definidas a trozos.

Ahora queremos calcular la derivada de los distintos tipos de funciones con los que trabajamos. En el tema anterior vimos que todas las funciones elementales son continuas y a partir de ello éramos capaces de estudiar límites y continuidad para cualquier otra función (de los tipos a) y b)). Igualmente ahora tenemos que todas las funciones tienen un buen comportamiento para la derivada. De hecho, todas las funciones elementales son derivables y para todas ellas conocemos su derivada según queda reflejado en la siguiente tabla:

1. Dado $k \in \mathbb{R}$ y $f(x) = k$ (función constante), $f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ es derivable en todos los puntos en los que está definida su función derivada,
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$
3. $(e^x)'(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Para $a > 0$, $(a^x)'(x) = \log(a) \cdot a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
5. $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
6. Para $a \neq 1$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\log(a)} \cdot \dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
7. $(\cos)'(x) = -\mathrm{sen}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
8. $(\mathrm{sen})'(x) = \cos(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
9. $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

10. $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$.

11. $(\text{arcsen})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$.

12. $(\text{arctg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

En resumen tenemos que todas las funciones elementales son derivables, es decir, son derivables en todos su dominio (en todos los puntos en los que cada una de ellas esté definida) y además conocemos cuál es su derivada. El único casos que requiere un comentario más detenido es el de las funciones potenciales tal y como se indica en el apartado 2 del cuadro anterior.

Ejemplos 6.

1) Determinar en qué puntos es derivable la función $f(x) = x^3$ y calcular su función derivada.

Se trata de una función potencial. Para ella el apartado 2 del cuadro indica que su función derivada es

$$f'(x) = 3x^2$$

que está definida para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

2) Estudiar la derivabilidad y calcular la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Para cálculos de derivación e integración, en general, es siempre mejor expresar un quebrado o raíz, si ello es posible, en forma de exponente. En este caso, podemos escribir la función como

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos entonces aplicar nuevamente el apartado 2 del cuadro para deducir que la función derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que está definida en todos los puntos excepto en $x = 0$, esto es, en $\mathbb{R} - \{0\}$. En consecuencia, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Así pues, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en el punto $x = 0$ aunque sí está definida y es continua en ese punto.

Derivada de funciones obtenidas por operación o composición de funciones elementales

Podemos combinar funciones elementales (sumándolas, dividiéndolas, componiéndolas, etc.) para obtener otras funciones. Las funciones que así conseguimos son las correspondientes al apartado a) de la página 67. Para calcular la derivada de estas funciones necesitamos saber como se comporta la derivada con respecto a esas operaciones. En la siguiente propiedad quedan recogida las reglas de derivación que precisamos.

Propiedades 7. *Sean f y g funciones reales de variable real. Entonces*

- *Si f y g son derivables en $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*

  1. $f+g$ es derivable en x y
  $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2. $k \cdot f$ es derivable en x para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$ y

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x).$$

3. $f \cdot g$ es derivable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

4. Si $g(x) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- *(Regla de la cadena) Si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x y se verifica que:*

  $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

  A la fórmula anterior se la conoce como regla de la cadena.

- *(Teorema de la función inversa) Si f es derivable en x, biyectiva sobre su imagen y verifica que $f'(x) \neq 0$ entonces la función inversa de f, f^{-1}, es derivable en $y = f(x)$ y se verifica que*

  $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, toda función que se obtenga por composición u operación de funciones derivables será una función derivable. En particular para todas las funciones del apartado a) de la página 2.1.2 tenemos:

Toda función obtenida por operación o composición de funciones elementales será derivable en todos los puntos de su dominio en los que esté definida su función derivada.

Además la función derivada se puede siempre calcular aplicado de forma sistemática y ordenada las reglas de derivación de esta propiedad.

Derivada de funciones definidas a trozos

Con lo anterior, podemos estudiar la derivada de funciones elementales u obtenidas por operación o composición de ellas. Queda pendiente el caso de las funciones definidas a trozos. Al igual que para estudiar la continuidad, el estudio y cálculo de la derivada de este tipo de funciones se hace también en dos pasos analizando primero el interior de los intervalos donde actúa cada fórmula y después los puntos de cambio de definición.

Dada

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } a_1 \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_2, \\ f_2(x) & \text{si } a_2 \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_3, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ f_{k-1}(x) & \text{si } a_{k-1} \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} a_k, \end{cases}$$

estudiaremos su derivada en los siguientes pasos:

1) En el interior de los intervalos de definición: Si las funciones $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_{k-1}(x)$ son respectivamente derivables en los intervalos $(a_1,a_2),\ (a_2,a_3),\ldots,(a_{k-1},a_k)$, entonces $f(x)$ será derivable en esos intervalos y su derivada será

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} f_1'(x) & \text{si} & a_1<x<a_2,\\ f_2'(x) & \text{si} & a_2<x<a_3,\\ \vdots & & \vdots \\ f_{k-1}'(x) & \text{si} & a_{k-1}<x<a_k.\end{array}\right.$$

Véase que en todos los casos escribimos "$<$" y nunca "$\leq$" ya que en este primer paso analizamos únicamente el interior de los intervalos de definición dejando los puntos de cambio de definición para el siguiente paso.

2) En los puntos de cambio de definición: Los puntos de cambió de definición son $a_2,a_3,\ldots,a_{k-1}$. En cada uno de ellos, a_i, $i=2,3,\ldots,k-1$, la función $f(x)$ será derivable si se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) $f(x)$ es continua en a_i,

b) existe el límite $\lim_{x\to a_i} f'(x)$ y es un número real (empleamos aquí $f'(x)$ tal y como ha sido calculada previamente en el punto **1)**).

Si se cumplen ambas condiciones entonces, además, tendremos que

$$f'(a_i)=\lim_{x\to a_i} f'(x).$$

Si tal límite no existe o toma valor $\pm\infty$, o si $f(x)$ no es continua en a_i, entonces $f(x)$ no es derivable en a_i.

Ejemplo 8. Calcular la derivada de la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} e^x-x & \text{si} & x\leq 0,\\ \cos(x) & \text{si} & 0<x\leq\frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2} & \text{si} & \frac{\pi}{2}\leq x.\end{array}\right.$$

Calculamos la derivada de esta función siguiendo los dos pasos antes expuestos.

1) En el interior de los intervalos de definición $(-\infty,0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2},\infty)$ la función $f(x)$ viene respectivamente determinada por las funciones e^x, $\cos(x)$ y $x-\frac{\pi}{2}$, todas ellas funciones elementales y derivables. Por tanto, en esos intervalos calculamos la derivada de $f(x)$ simplemente derivando la fórmula correspondiente:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} e^x-1 & \text{si} & x<0,\\ -\text{sen}(x) & \text{si} & 0<x\leq\frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{si} & \frac{\pi}{2}<x.\end{array}\right.$$

2) Estudiamos ahora los puntos de definición $x_0=0$ y $x_0=\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{x_0=0}$ Veamos las dos condiciones requeridas:

1. Continuidad de $f(x)$ en $x_0=0$: tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0)=e^0-0=1,\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x-x=e^0-0=1,\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos(x)=\cos(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\text{ es continua en } x_0=0.$$

2. Límite de $f'(x)$ en $x_0 = 0$: utilizando las fórmulas que hemos obtenido en el paso **1)** para $f'(x)$,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - 1 = e^0 - 1 = 0, \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Por tanto $f(x)$ es derivable en $x_0 = 0$ con

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

$\boxed{x_0 = \frac{\pi}{2}}$ Procedemos ahora igual que antes.

1. Continuidad de $f(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Límite de $f'(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} -\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = -1, \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no hay } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f'(x).$$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2.2 Derivación y propiedades de forma de una función

En la **Definicion 10** del Capítulo 1 presentábamos varias propiedades que afectan al aspecto de la representación gráfica de una función. Eran lo que llamamos propiedades de forma de la función. En esta sección añadiremos algunas propiedades de forma más y estudiaremos técnicas que permiten determinar cuáles de ellas verifica una función. Recordemos también que las propiedades de forma tienen carácter local con lo que es necesario determinar en qué intervalos se cumplen.

Definición 9. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $H \subseteq D$. Entonces:*

- *Decimos que f es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante) en H si $f|_H$ es creciente (respec. estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, constante).*
- *Decimos que f tiene un máximo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in D.$$

- *Decimos que f tiene un mínimo absoluto en el punto $x_0 \in D$ si*

$$f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in D.$$

- *Decimos que f tiene un máximo local en el punto $x_0 \in D$ si $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, tales que*

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in D \cap (a, b).$$

  Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto x_0 (la desigualdad se verifica no sólo para $\geq$ sino también para $>$), diremos que f tiene un máximo local estricto en x_0.

- *Decimos que f tiene un mínimo local en el punto $x_0 \in D$ si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, tales que*

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in D \cap (a, b).$$

Si la desigualdad de la definición tiene lugar de forma estricta salvo en el punto x_0 (la desigualdad se verifica no sólo para $\leq$ sino también para $<$), diremos que f tiene un mínimo local estricto en x_0.

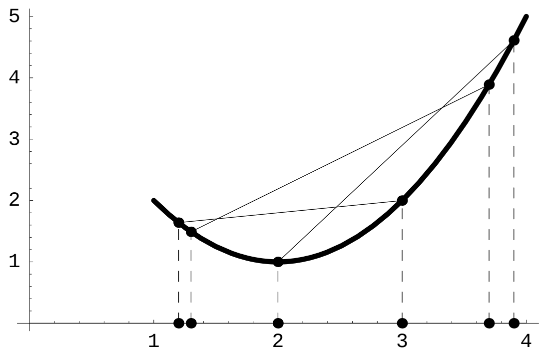
- *Decimos que f es convexa en H si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)),\ \forall x \in H \cap (a, b),$$

es decir, si se tiene que dentro del conjunto H, f está por debajo del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\leq$ sino además con $<$) entonces diremos que f es estrictamente convexa en H.

Ejemplo 10. La ecuación $r(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$ es la de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por tanto, una función es convexa si la recta que une dos puntos de su gráfica está siempre por encima de la función. En la gráfica siguiente representamos una función convexa. Puede observarse como independientemente de la elección que hagamos para los puntos a y b, la recta que los une está siempre por encima de la función.



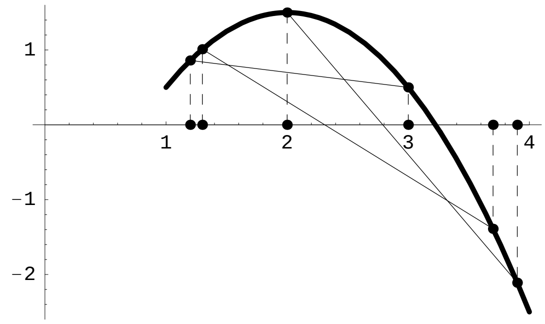
- *Decimos que f es cóncava en H si $\forall a, b \in H$, tales que $a < b$, se verifica que*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)),\ \forall x \in H \cap (a, b),$$

es decir, si se tiene que dentro del conjunto H, f está por encima del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Si la desigualdad de la definición se verifica de forma estricta (la desigualdad se verifica no sólo con $\geq$ sino además con $>$) entonces diremos que f es estrictamente cóncava en H.

Ejemplo 11. En el caso de la concavidad se exige que la recta que une dos puntos sobre la gráfica de la función esté por debajo de la función ($f(x) \geq r(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$). La situación gráfica es ahora

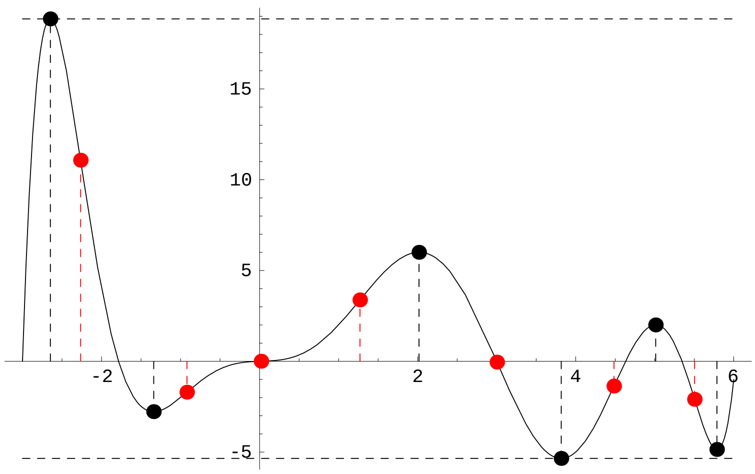


- *Decimos que f tiene un punto de inflexión en $x_0 \in D$ si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

  a) *f es estrictamente cóncava en $(a, x_0] \cap D$ y es estrictamente convexa en $[x_0, b) \cap D$.*
  b) *f es estrictamente convexa en $(a, x_0] \cap D$ y es estrictamente cóncava en $[x_0, b) \cap D$.*

Ejemplo 12.

En la siguiente imagen representamos la gráfica de una función $f : [-3, 6] \to \mathbb{R}$.



Hemos marcado en la gráfica en color negro los puntos en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos y en color sombreado los puntos de inflexión. Es evidente que:

- Entre dos máximos/mínimos relativos siempre hay un intervalo en el que la función es monótona (es decir, en el que es creciente o decreciente). Dichos intervalos son lo que se denominan intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Entre cada dos puntos de inflexión, la función es o bien cóncava o bien convexa. Es decir, los puntos de inflexión separan los diferentes intervalos de convexidad y concavidad.

La propiedades de forma que verifica una función en cada intervalo dependerán de los signos de sus derivadas . Entra en juego aquí el concepto de derivada sucesiva de una función que definimos a continuación.

Definición 13.

Sea una función real, $f : D \to \mathbb{R}$. Entonces:

a) *Definimos la función derivada primera de f como la función derivada de f.*

b) *Dado $n \in \mathbb{N}$, si la función derivada n-ésima de f está definida y es derivable en algún punto, definimos la función derivada $(n+1)$-ésima de f como la función derivada de la función derivada n-ésima de f.*

Si está definida, notaremos a la función derivada n-ésima de f como

$$f^{n)} \qquad \text{ó} \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Si, para $n \in \mathbb{N}$, la función $f^{n)}$ está definida en el punto $x_0 \in D$, diremos que la función f es n veces derivable en x_0 y notamos al valor de la derivada n-ésima en tal punto como

$$f^{n)}(x_0), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \quad \text{ó} \quad \frac{d^n f}{dx^n}|_{x_0}.$$

Se suele aceptar que la derivada 0-ésima de una función es la propia función, es decir,

$$f^{0)} = f.$$

Las funciones derivada primera, segunda y tercera se suelen designar mediante f', f'' y f''', en lugar de $f^{1)}$, $f^{2)}$ y $f^{3)}$.

Definición 14. *Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$, diremos que f es de clase C^n en D si se cumple las dos condiciones siguientes:*

1. *La función $f^{n)}$ está definida en todo D.*
2. *La función $f^{n)}$ es continua en D.*

El conjunto de todas las funciones de clase C^n en D se denota mediante $C^n(D)$.

Dado $D \subseteq \mathbb{R}$ se denota mediante $C^0(D)$ o simplemente $C(D)$ al conjunto de todas las funciones continuas en D. Así mismo, una función que es de clase C^n en D para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una función de clase C^∞ en D. El conjunto de todas las funciones de clase C^∞ en D se denota mediante $C^\infty(D)$.

Veamos a continuación los criterios que permiten discernir cuáles de las propiedades de forma verifica una función y dónde las verifica. Como hemos indicado antes, dependerán de los signos de las tres primeras derivadas de la función.

Propiedades 15. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sea un intervalo $I = (a,b) \subseteq D$ y $x_0 \in (a,b)$. Se verifica que:*

i) *Si f es derivable en I se tiene que:*

1. *Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I.*
2. *Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I.*

ii) *Si f es derivable en x_0 y f tiene un máximo o un mínimo local en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.*

iii) *Si f es de clase C^2 en I y $f'(x_0) = 0$ entonces:*

1. *Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local estricto en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local estricto en x_0.*

iv) *Si dado $n \in \mathbb{N}$, f es de clase C^n y se cumple que*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-2)}(x_0) = f^{n-1)}(x_0) = 0$$

y que

$$f^{n)}(x_0) \neq 0,$$

entonces:

1. *Si $f^{n)}(x_0) > 0$ y n es par entonces x_0 es un mínimo local estricto de f.*
2. *Si $f^{n)}(x_0) < 0$ y n es par entonces x_0 es un máximo local estricto de f.*
3. *Si n es impar entonces f no tiene máximo ni mínimo local en x_0.*

v) *Si f es de clase C^2 en I entonces:*

1. *Si $f''(x) > 0, \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente convexa en I.*
2. *Si $f''(x) < 0, \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente cóncava en I.*

vi) *Si f es de clase C^2 en I y x_0 es un punto de inflexión de f entonces*

$$f''(x_0) = 0.$$

vii) *Si f es de clase C^3 en I y se verifica que*

$$f''(x_0) = 0 \qquad y \qquad f'''(x_0) \neq 0$$

entonces x_0 es un punto de inflexión de f.

Ejemplo 16. Determinemos las propiedades de forma de la función

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 18x + 1.$$

Para ello comenzamos averiguando cuándo se anula la primera derivada:

$$f'(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{array} \right. .$$

La función $f'(x)$ es un polinomio y por ello es continua en $\mathbb{R}$. Si comprobamos el signo del valor de $f'(x)$ en puntos cualesquiera de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, 6)$ y $(6, \infty)$, una aplicación directa del Teorema de Bolzano nos lleva a la conclusión de que estos signos determinarán el del resto de los puntos de cada intervalo. En definitiva, llegamos a que

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) < 0, \ \forall x \in (-\infty, -1). \\ f'(x) > 0, \ \forall x \in (-1, 3). \\ f'(x) < 0, \ \forall x \in (3, 6). \\ f'(x) > 0, \ \forall x \in (6, +\infty). \end{array}}$$

Para determinar los intervalos de convexidad y concavidad calculamos la segunda derivada,

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 9.$$

En este caso,

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right) \approx 0.639. \\[2ex] x = \dfrac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right) \approx 4.694. \end{cases}$$

y razonando como antes,

$$\boxed{\begin{array}{l} f''(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right). \\ f''(x) < 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right), \dfrac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right). \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (\dfrac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right), \infty). \\ \text{En particular, } f(-1) > 0,\ f(3) < 0 \text{ y } f(6) > 0. \end{array}}$$

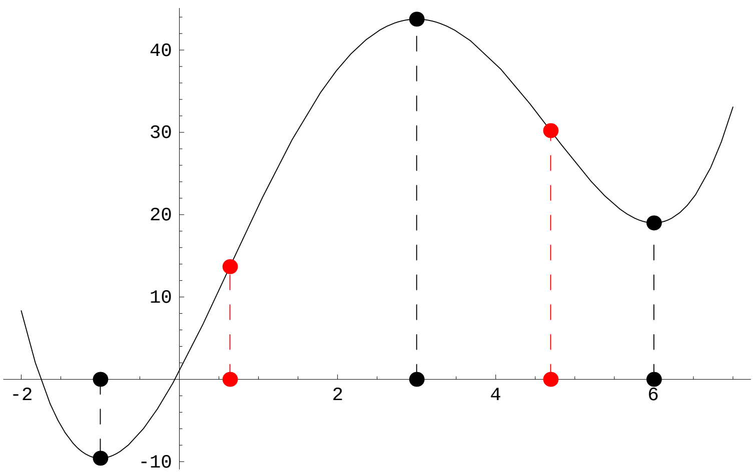
Finalmente, tenemos que $f'''(x) = 6x - 16$ con lo que

$$\boxed{f'''\left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right) \neq 0 \text{ y } f'''\left(\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right) \neq 0.}$$

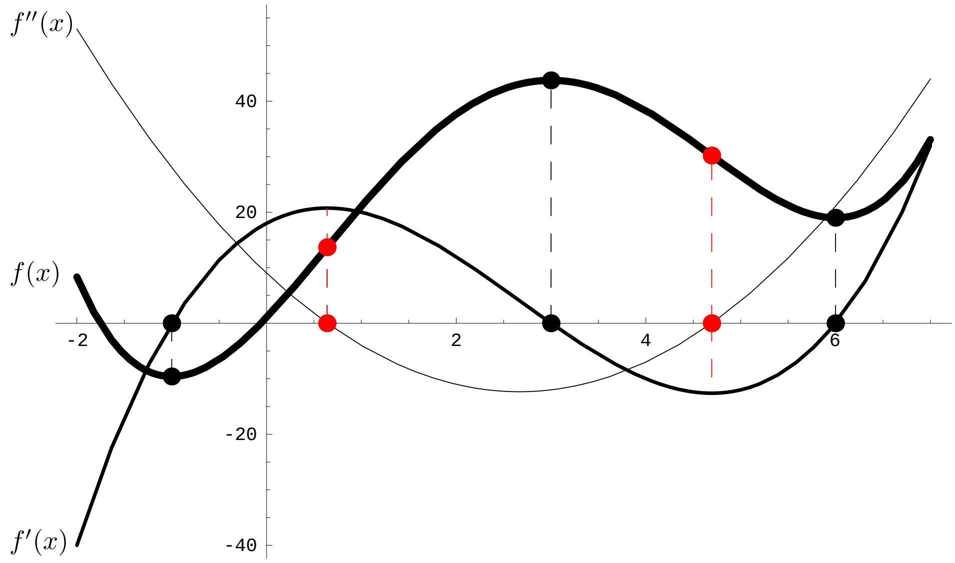
Teniendo en cuenta la información que hemos recuadrado y **Propiedades 15** tenemos que:

- La función f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(3, 6)$.
- La función f es creciente en los intervalos $(-1, 3)$ y $(6, \infty)$.
- La función f tiene mínimos relativos en los puntos $x = -1$ y $x = 6$.
- La función f tiene un máximo relativo en el punto $x = 3$.
- La función f es convexa en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)\right)$ y $\left(\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right), \infty\right)$.
- La función f es cóncava en el intervalo $\left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right), \frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)\right)$.
- La función f tiene puntos de inflexión en $\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{37}\right)$ y $\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{37}\right)$.

Si calculamos el valor de la función en los puntos máximos y mínimos relativos y en los puntos de inflexión, toda la información anterior nos conduce a la siguiente gráfica:



Representando de forma conjunta la función $f(x)$ y las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ observamos gráficamente cómo se corresponden los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad con los signos de f' y f''.



2.2.1 La regla de l'Hôpital

En el Capítulo 1 estudiamos el caso de diferentes límites que no podían ser calculados aplicando directamente las propiedades algebraicas del límite. Eran lo que llamábamos indeterminaciones. Dadas dos funciones, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ó $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que solamente sabemos resolver en un par de casos muy concretos. Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, podríamos modificar la forma en que hemos escrito el límite anterior y plantear la siguiente cadena de igualdades:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \boxed{=} \frac{\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Hemos recuadrado el segundo símbolo $\boxed{=}$ para indicar que ese paso debe ser justificado más cuidadosamente. En cualquier caso, esta es la idea de los resultados de l'Hôpital para el cálculo de límites de cocientes que formulamos con precisión en la siguiente propiedad.

Teorema 17 (Reglas de l'Hôpital). *Sean dos funciones reales f y g, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$ de manera que se verifican las siguientes condiciones*

1. *f y g son derivables en $I - \{x_0\}$.*
2. *$g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I - \{x_0\}$.*
3. *Se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:*
   a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
   b) $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

en donde L puede ser un número real, $+\infty$ ó $-\infty$. La propiedad también es correcta para el límite por la izquierda o por la derecha.

Ejemplos 18.
1) Si calculamos el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ de forma directa,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0},$$

obtenemos una indeterminación. Las funciones en el numerador y denominados están en las condiciones del la Regla de l'Hôpital por lo que podemos evitar la indeterminación derivando ambas funciones en el numerador y en el denominador,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

2) Calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. De entrada tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0.$$

Pero 0^0 es una indeterminación y no podemos decidir el valor que alcanzará el límite de esta manera. Utilizando las propiedades del logaritmo sabemos que

$$x^x = e^{x\log(x)},$$

en cuyo caso, empleando las propiedades del límite respecto a la potenciación, podemos escribir,

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log(x)} = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)}.$$

Ahora, en lugar del límite inicial, debemos calcular $\lim_{x\to 0} x\log(x)$. Pero si escribiendo ese producto en forma de cociente y aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log'(x)}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim_{x\to 0} x\log(x)} = e^0 = 1.$$

2.3 Integración indefinida

La integración es el proceso inverso a la derivación. Dada una función $f(x)$, podemos calcular su derivada $f'(x)$. Ahora lo que pretendemos es calcular una función $F(x)$ cuya derivada coincida con $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Es lo que en la siguiente definición llamamos primitiva de $f(x)$.

Definición 19. *Dado un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : D \to \mathbb{R}$, llamamos primitiva de f a cualquier función derivable, $F : D \to \mathbb{R}$, tal que*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in D.$$

Ejemplo 20. Dada la función $f(x) = x$, podemos calcular distintas primitivas:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 3, \quad F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 10.$$

Es evidente que $F'(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = x^2$.

Una misma función tiene infinidad de primitivas pero todas ellas deben seguir un patrón común. Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la misma función, $f(x)$, entonces en todo punto tendremos

$$G'(x) = f(x) = F'(x) \Rightarrow (G - F)'(x) = 0.$$

Pero si una función tiene derivada cero, debe ser una constante así que

$$G(x) - F(x) = C \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x) = F(x) + C.$$

De este modo, fijada una primitiva $F(x)$, todas las demás se obtiene añadiéndole una constante. De hecho ya hemos visto un caso de esto en el ejemplo anterior. Esto mismo aparece reflejado con más precisión a continuación.

Propiedad 21. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y una función $f : I \to \mathbb{R}$, entonces, si la función $F : I \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, se tiene que*

$$G : I \to \mathbb{R} \text{ es una primitiva de } f \Leftrightarrow G = F + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Dada $f(x)$, la representación de todas sus primitivas será de la forma

$$F(x) + C,$$

donde C es una constante que puede tomar cualquier valor. A esa representación uniparamétrica (aparece un único parámetro) es lo que llamamos integral indefinida en la próxima definición.

Definición 22. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f : I \to \mathbb{R}$, llamamos integral indefinida de f y la notamos*

$$\int f \, dx \quad \text{ó} \quad \int f(x) \, dx$$

a cualquier fórmula uniparamétrica que nos permite, dando valores a su parámetro, al cual llamaremos constante de integración, obtener todas las primitivas de la función f.

Obsérvese que, para una función $f : I \to \mathbb{R}$, si conocemos una de sus primitivas, F, entonces teniendo en cuenta la propiedad anterior la integral indefinida de f será

$$\int f \, dx = F + C.$$

siendo C la constante de integración.

Ejemplo 23. Consideremos la función $f(x) = x$ definida en todo $\mathbb{R}$. Es evidente que la función

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

es una primitiva de f. Entonces la integral indefinida de f será de la forma

$$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Si en la expresión anterior damos valores reales al parámetro C podemos obtener todas las primitivas de la función $f(x) = x$.

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I, es evidente que

$$\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$$

2.3.1 Cálculo de la integral indefinida

El cálculo de la integral indefinida de una función es un problema complicado que exige el conocimiento, en primer lugar, de las derivadas de todas las funciones elementales y de las reglas de derivación y, en segundo lugar, de métodos específicos para la integración de funciones más complicadas. El conocimiento de las propiedades de derivación y de las funciones elementales nos permite obtener las siguientes reglas de integración que, a fin de cuentas son la traducción directa de las propiedades vistas en la primera parte de este capítulo:

- Dadas las funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$, definidas en el tinervalo I, se cumple que:
  - $\displaystyle\int (f+g)dx = \int f\ dx + \int g\ dx.$
  - $\displaystyle\int k \cdot f\ dx = k \cdot \int f\ dx.$
- Dadas $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ tales que $f(I) \subseteq J$, se tiene que
$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\ dx = (g \circ f)(x).$$
- $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ \forall n \in \mathbb{N}.$
- $\displaystyle\int x^\alpha\ dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}.$
- $\displaystyle\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}.$
- $\displaystyle\int a^{kx}\ dx = \frac{1}{k\log(a)}a^{kx} + C,\ \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}, a \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \log(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cos(x)\ dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \tan(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen}(x) + C, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \cosh(x)\ dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\ dx = \cosh(x) + C.$

Es evidente que no toda función se ajusta a alguna de las que aparecen en la lista anterior. Para esos casos hemos de idear métodos que permitan reducir la integral de cualquier función a la integral de las funciones que acabamos de ver. Para ello emplearemos fundamentalmente dos métodos: La integración por cambio de variable y la integración por partes.

Integración por cambio de variable

Consideremos la integral indefinida de la función f,

$$\int f(x)\ dx.$$

Esta integral aparece expresada en términos de la variable x. Sin embargo podría ser interesante expresarla en función de otra variable que esté relacionada con x mediante cierta fórmula. Supongamos que la variable t está relacionada con la variable x mediante la ecuación

$$\varphi(t) = \phi(x).$$

Derivemos esta expresión mediante la siguiente regla mnemotécnica en la que introducimos el diferencial con respecto a t, dt, y el diferencial con respecto a x, dx,

$$\varphi'(t)dt = \phi'(x)dx.$$

Si reunimos estas dos igualdades obtenemos dos ecuaciones,

$$\begin{cases} \varphi(t) = \phi(x), \\ \varphi'(t)\ dt = \phi'(x)\ dx, \end{cases}$$

a través de las cuales podemos despejar x en función de t y dx en función de dt y t para posteriormente sustituir los resultados obtenidos en la integral que pretendemos calcular. Se resuelve la integral en función de la variable t y luego se deshace el cambio.

Ejemplo 24. Calcular $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2+x}\ dx$.

$$\begin{aligned} \int (2x+1)e^{x^2+x}\ dx &= \begin{pmatrix} t = x^2+x \\ dt = (2x+1)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x+1} \end{pmatrix} \\ &= \int e^t\ dt = e^t + C \\ &= \begin{pmatrix} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{pmatrix} = e^{x^2+x} + C. \end{aligned}$$

3) Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\mathrm{Ln}^2(x)}}\ dx$.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x\sqrt{1-\mathrm{Ln}^2(x)}}\ dx = \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) = \mathrm{Ln}(x) & \Rightarrow & t = \mathrm{arcsen}\big(\mathrm{Ln}(x)\big) \\ \cos(t)\ dt = \frac{1}{x}\ dx & \Rightarrow & dx = x\cos(t)\ dt \end{pmatrix} = \int \frac{x\cos(t)\ dt}{x\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(x)}} \\ &= \int \frac{\cos(t)\ dt}{\sqrt{\cos^2(x)}} = \int \frac{\cos(t)dt}{\cos(t)} = \int dt = t + C = \begin{pmatrix} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{pmatrix} = \mathrm{arcsen}(\mathrm{Ln}(x)) + C. \end{aligned}$$

Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la propiedades de derivación del producto de funciones. Sabemos que

$$\int (f(x)\cdot g(x))'\ dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

y además

$$\int (f(x)\cdot g(x))'\ dx = \int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))\ dx = \int f'(x)\cdot g(x)\ dx + \int f(x)\cdot g'(x)\ dx$$

de manera que uniendo las dos igualdades

$$\int f'(x)\cdot g(x)\ dx + \int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

de donde

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx + C$$

y finalmente, incluyendo el parámetro de integración, C, en la integral indefinida del segundo miembro, hemos demostrado la siguiente:

Propiedad 25. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en el intervalo I, entonces*

$$\int f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\ dx$$

La propiedad anterior no se utiliza directamente sino a través del siguiente esquema que se denomina **método de integración por partes** para el cálculo de la integral $\int f(x)g(x)dx$:

$$\int (\underbrace{f(x)}_{=u(x)}\cdot\underbrace{g(x)}_{=v'(x)})\ dx = \int (u(x)\cdot v'(x))\ dx = \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = f(x) & \Rightarrow & u'(x) = f'(x) \\ v'(x) = g(x) & & v(x) = \int g(x)\ dx \end{array}\right\}$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{usando la}\\ \text{propiedad}\end{array}\right) = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ dx.$$

Ejemplo 26.

$$\int x\log(x)\ dx = \left\{\begin{array}{lcl} u = \log(x) & & u' = (\log(x))' = \frac{1}{x} \\ & \Rightarrow & \\ v' = x & & v = \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(x) - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

El método de integración por partes se puede aplicar para obtener la integral de funciones del tipo

$$p(x)\cdot f(x),$$

donde $p(x)$ es un polinomio y $f(x)$ es una función logarítmica, exponencial o trigonométrica. En tales casos es posible que sea necesario aplicar la integración por partes sucesivamente para obtener el resultado. También es indicado el uso del método de integración por partes para el cálculo de la integral del producto de una función trigonométrica por una exponencial.

Ejemplos 27.

1) Calcular $\displaystyle\int (x^2+x-1)e^x\ dx$.

$$\begin{aligned}
&\int (x^2+x-1)e^x\ dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2+x-1 & \\ v' = e^x & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2x+1 \\ v = \int e^x\ dx = e^x \end{array} \right\} = (x^2+x-1)e^x \\
&\quad - \int (2x+1)e^x\ dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+1 \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2 \\ v = \int e^x\ dx = e^x \end{array} \right\} \\
&= (x^2+x-1)e^x - \left((2x+1)e^x - \int 2e^x\ dx \right) \\
&= (x^2+x-1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = (x^2-x)e^x + C.
\end{aligned}$$

2) Calcular $\displaystyle\int \log(x)\ dx$.

Véase que

$$\log(x) = 1 \cdot \log(x)$$

y tenemos el producto de un polinomio de grado 0 ($p(x) = 1$) por una función logarítmica ($f(x) = \log(x)$), con lo que aplicaremos integración por partes como sigue:

$$\begin{aligned}
&\int \log(x)\ dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \log(x) \\ \\ v' = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ \\ v = \int 1\ dx = x \end{array} \right\} = x\log(x) - \int \frac{1}{x} x\ dx \\
&= x\log(x) - x + C.
\end{aligned}$$

3) Calcular $\displaystyle\int x\cos(x)dx$. Tenemos el producto de un polinomio, $p(x) = x$, por una función trigonométrica, $f(x) = \cos(x)$. Resolveremos integrando por partes:

$$\int x\cos(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ \\ v' = \cos(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 1 \\ \\ v = \int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\}$$

$$= x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C.$$

4) También podemos emplear el método de integración por partes para calcular la integral del producto de una función exponencial por una trigonométrica. En este caso será necesario aplicar integración por partes dos veces para poder despejar la integral deseada. Veamos un ejemplo.

$$\begin{aligned}
&\int e^x\cos(x)dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = -\operatorname{sen}(x) \\ \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x\cos(x) + \int e^x\operatorname{sen}(x)dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(x) \\ \\ v' = e^x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = \cos(x) \\ \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$= e^x \cos(x) + e^x \mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

En definitiva, tenemos que

$$\underline{\int e^x \cos(x) dx} = e^x \cos(x) + e^x \mathrm{sen}(x) - \underline{\int e^x \cos(x) dx}$$

y observamos que en ambos miembros de la igualdad hemos obtenido la integral que pretendíamos calcular. Entonces, será suficiente despejar para obtener

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} \left(e^x \cos(x) + e^x \mathrm{sen}(x) \right) + C.$$

Veremos a continuación una relación de técnicas que nos permiten resolver ciertos tipos específicos de integrales usando para ello los dos métodos que acabamos de ver, cambios de variable e integración por partes, en diferentes puntos.

Integrales inmediatas

Cuando, para la resolución de una integral, podemos aplicar directamente alguna regla de integración procedente de la tabla que hemos visto en la página 80, decimos que tal integral es una integral inmediata. A continuación enumeramos algunos tipos de integrales inmediatas de interés:

Integrales inmediatas de tipo potencial

Son integrales que pueden fácilmente transformarse hasta la forma

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C.$$

Ejemplos 28.

1) Calcular $\displaystyle\int \frac{x-1}{\left((x-1)^2+4\right)^2}\, dx$. En este caso procederemos como sigue

$$\begin{aligned} &\int \frac{x-1}{\left((x-1)^2+4\right)^2}\, dx \\ &\quad = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\left((x-1)^2+4\right)^{-2}\, dx = \begin{pmatrix} f(x) = (x-1)^2+4 \\ f'(x) = 2(x-1) \end{pmatrix} \\ &\quad = \frac{1}{2}\frac{1}{-1}\left((x-1)^2+4\right)^{-1} = \frac{-1}{2\left((x-1)^2+4\right)} + C. \end{aligned}$$

2) Una integral del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(Ax+B)^n} dx$ con $n > 1$ puede resolverse como sigue:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(Ax+B)^n} dx &= \frac{1}{A}\int A(Ax+B)^{-n} dx = \begin{pmatrix} f(x) = Ax+B \\ f'(x) = A \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{A}\frac{(Ax+B)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{A(-n+1)}\frac{1}{(Ax+B)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{(9x-1)^7} dx = \frac{1}{9\cdot(-6)}\frac{1}{(9x-1)^6} = \frac{-1}{54(9x-1)^6} + C.$$

Cuando $n = 1$ la integral no puede resolverse empleando este método y hay que recurrir al último apartado de esta sección en el que se tratan las integrales inmediatas de tipo logarítmico.

3) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx$ con $n > 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(Ax+B)^n}dx &= \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B-B}{(Ax+B)^n}dx \\ &= \frac{1}{A}\int \frac{1}{(Ax+B)^{n-1}}dx - \frac{B}{A}\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx.\end{aligned}$$

Ahora, la integral $\int \frac{1}{(Ax+B)^n}dx$ puede resolverse siguiendo el ejemplo anterior y podemos hacer los mismo para $\int \frac{1}{(Ax+B)^{n-1}}$ siempre que $n-1 > 1$. Cuando $n-1 = 1$ (es decir, cuando $n = 2$), como hemos mencionado antes, tendremos que resolver como se indica en el apartado dedicado a integrales logarítmicas.

Integrales inmediatas de tipo logarítmico

Son integrales en las que aparece una función dividiendo a su derivada. Son del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(x)) + C.$$

Ejemplos 29.

1) Calcular $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$.

$$\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = \cos(x) \\ f'(x) = -\mathrm{sen}(x)\end{array}\right) = -\log(\cos(x)) + C.$$

2) Calculemos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{Ax+B}dx$ para ciertas constantes$A, B \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{Ax+B}\,dx = \frac{1}{A}\int \frac{A}{Ax+B}\,dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = Ax+B \\ f'(x) = A\end{array}\right) = \frac{1}{A}\log(Ax+B) + C.$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{3x+6}dx = \frac{1}{3}\mathrm{Ln}(3x+6) + C.$$

3) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{Ax+B}dx$.

$$\int \frac{x}{Ax+B}dx = \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B-B}{Ax+B}dx = \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B}{Ax+B}dx - \frac{B}{A}\int \frac{1}{Ax+B}dx$$

$$= \frac{x}{A} - \frac{B}{A^2}\mathrm{Ln}(Ax+B).$$

Integración de funciones racionales

Una función racional es una función del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios.

Comenzamos viendo varios casos de funciones racionales que pueden ser integradas de forma sencilla:

1) Integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(Ax+B)^n} dx, \quad \int \frac{x}{(Ax+B)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ya hemos visto que estas integrales pueden resolverse como integrales inmediatas de tipo potencial o logarítmico.

2) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx$. Resolveremos haciendo un cambio de variable para transformala en la integral inmediata $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$ (está en la tabla de la página 80). Veámoslo:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\, dx = \\
&\quad = \int \frac{1}{b^2\left(\frac{(x-a)^2}{b^2}+1\right)}\, dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\, dx \\
&\quad = \left(\begin{array}{l} t = \frac{x-a}{b} \\ dt = \frac{1}{b}\, dx \Rightarrow dx = b\; dt \end{array}\right) = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{t^2+1} b\; dt = \frac{1}{b}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&\quad = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}(t) = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right).
\end{aligned}$$

3) Integral del tipo $\displaystyle\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2} dx$. Puede resolverse utilizando el apartado anterior y los métodos para integrales inmediatas de tipo logarítmico. Para ello hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2} dx = \\
&\quad = \int \frac{x-a+a}{(x-a)^2+b^2} dx = \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx - a\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, la integral $\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$ puede calcularse como en el apartado **2)** y la integral $\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx$ es de tipo logarítmico ya que,

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx = \left(\begin{array}{l} f(x) = (x-a)^2+b^2 \\ f'(x) = 2(x-a) \end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left((x-a)^2+b^2\right) + C.$$

A partir de estas integrales sencillas podemos intentar resolver otras integrales racionales más complejas. Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la idea es expresar la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ como la suma de fracciones simples de las que aparecen en los apartados **1)**, **2)** y **3)** que acabamos de ver. Ello lo hacemos siguiendo los pasos que indicamos a continuación en dos casos distintos:

a) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ cuando $\text{grado}(p(x)) \geq \text{grado}(q(x))$.

Si $\text{grado}(p(x)) \geq \text{grado}(q(x))$ efectuamos la división de $p(x)$ entre $q(x)$ de manera que obtengamos un resto $r(x)$ de grado inferior al de $q(x)$. Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{array}{ll} p(x) & \underline{|\, q(x)} \\ r(x) & \;\; s(x) \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)} \\ \\ \text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x)) \end{array}\right. .$$

Posteriormente efectuaremos la integral de la expresión obtenida,

$$\int \left(s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) \, dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Vemos que aparece la integral del polinomio $s(x)$ que es fácil de calcular. También aparece la integral de la función racional $\frac{r(x)}{q(x)}$ pero ahora tenemos que el grado del numerador (grado de $r(x)$) es menor que el grado del denominador (grado de $q(x)$). Para resolver esta última integral procedemos como se indica en el caso **b)**.

Ejemplo 30. Calcular la integral

$$\int \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20}dx.$$

Se trata de la integral de una función racional. Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador dividiremos ambos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28 & x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20 \\ \cline{2-2} x^4 - 15x^3 + 27x - 8 & \qquad\qquad x + 1 \end{array}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &\frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} = \\ &\qquad = x + 1 + \frac{x^4 - 15x^3 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 33x^3 - 25x^2 + 69x - 28}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20} = \\ &\quad = \int (x+1)dx + \int \frac{x^4 - 15x^3 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20}dx \\ &\quad = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^4 - 15x^3 + 27x - 8}{x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20}dx. \end{aligned}$$

Queda pendiente de resolver la última integral en la que aparece una función racional paro ahora con grado del numerador inferior al grado del denominador.

---

b) Cálculo de $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ cuando grado$(p(x)) <$ grado$(q(x))$.

Si grado$(p(x)) <$ grado$(q(x))$ descompondremos la función racional en una suma de fracciones simples en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = S_1 + S_2 + \cdots + S_k,$$

donde las expresiones S_1, S_2 y S_k son del tipo indicado en los apartados **1)**, **2)** y **3)** de esta sección. Para determinar cuáles son las fracciones S_1, S_2 y S_k seguimos los siguientes pasos:

1. Calcularemos todas las soluciones reales y complejas de la ecuación polinómica

$$q(x) = 0.$$

Ejemplo 31. Siguiendo con el **Ejemplo 30**, para resolver la integral que quedó pendiente, igualaremos a cero el denominador
$$x^5 - 10x^4 + 39x^3 - 72x^2 + 62x - 20 = 0$$
y calcularemos las soluciones de la ecuación así obtenida. El cálculo de estas soluciones lo hacemos empleando el método de Ruffini como sigue:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -10 & 39 & -72 & 62 & -20 \\
1 & & 1 & -9 & 40 & -42 & 20 \\
\hline
 & 1 & -9 & 30 & -42 & 20 & \lfloor 0 \\
1 & & 1 & -8 & 22 & -20 & \\
\hline
 & 1 & -8 & 22 & -20 & \lfloor 0 & \\
2 & & 2 & -12 & 20 & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 10 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

Obtenemos la solución $x = 1$ dos veces (es decir $x = 1$ con multiplicidad 2) y la solución $x = 2$ una vez ($x = 2$ con multiplicidad 1), quedando sin resolver el tramo de la ecuación que corresponde al polinomio $x^2 - 6x + 10$. Por tanto, para encontrar todas las soluciones, debemos resolver por último,
$$x^2 - 6x + 10 = 0.$$
Aquí podemos aplicar directamente la fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado y obtendremos las soluciones complejas $x = 3 \pm i$ con multiplicidad 1 (es decir $x = 3+i$ y $x = 3-i$ ambas aparecen una sola vez). En definitiva hemos obtenido las siguientes soluciones:
$$\begin{cases} x = 1, & \text{con multiplicidad 2,} \\ x = 2, & \text{con multiplicidad 1,} \\ x = 3 \pm i, & \text{con multiplicidad 1.} \end{cases}$$

---

2. Por cada solución real, $\alpha \in \mathbb{R}$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición de la función racional el siguiente grupo de fracciones simples
$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$
Véase que si hay multiplicidad de k añadiremos k fracciones simples para la solución α.
Los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son, en principio, desconocidos y deberán ser calculados una vez sepamos todas las fracciones simples que intervienen en la descomposición de la función que estamos integrando.
3. Por cada par se soluciones complejas, $a \pm bi$ con multiplicidad $k \in \mathbb{N}$, añadiremos a la descomposición los sumandos
$$\frac{M_1 + N_1x}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{M_2 + N_2x}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^2} + \cdots + \frac{M_k + N_kx}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^k},$$
otra vez, tantos sumandos como indique la multiplicidad de la solución.
Nuevamente los coeficientes $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ son desconocidos y se calculan después de haber añadido las fracciones simples correspondientes a todas las soluciones.

Ejemplo 32. Continuando con el ejemplo 31, veamos qué fracciones simples añadiremos para cada solución:

- La solución $\alpha = 1$ tiene multiplicidad 2. Para ella añadiremos dos fracciones simples,
$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}.$$

- La solución $\alpha = 2$ tiene multiplicidad 1. Para ella añadimos una sola fracción simple,

$$\frac{A_3}{x-2}.$$

- La pareja de soluciones complejas $\alpha = 3 \pm i$ tiene multiplicidad 1. Todo número complejo es de la forma $a+bi$. En este caso $a=3$ y $b=1$. Añadiremos una fracción del tipo $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, es decir,

$$\frac{Mx+N}{(x-3)^2+1}.$$

Hemos estudiado las fracciones a añadir para cada solución. Reuniremos todas ella para obtener la descomposición en fracciones simples de la función que intentábamos integrar:

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-15x^3+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20} = \\ &\quad = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x-3)^2+1}.\end{aligned}$$

Los coeficientes A_1, A_2, A_3, N y M han de ser calculados ahora. Para ello daremos distintos valores a la variable x para obtener un sistema de ecuaciones del que despejaremos dichos coeficientes.

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \Rightarrow & -A_1 + A_2 - \frac{A_3}{2} + \frac{N}{10} = \frac{2}{5} \\ x=-1 \Rightarrow & -\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{3} + \frac{N-M}{17} = \frac{49}{204} \\ x=-2 \Rightarrow & -\frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{9} - \frac{A_3}{4} + \frac{N-2M}{26} = \frac{53}{468} \\ x=3 \Rightarrow & \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{4} + A_3 + 3M + N = \frac{19}{4} \\ x=-3 \Rightarrow & -\frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{16} - \frac{A_3}{5} + \frac{N-3M}{37} = \frac{143}{2960} \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$A_1 = -2, \; A_2 = -1, \; A_3 = 1, \; M = 2, \; N = -1.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, la descomposición en fracciones simples es

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-15x^3+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20} = \\ &\quad = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{2x-1}{(x-3)^2+1}.\end{aligned}$$

La integral de todas la fracciones simples que aparecieron puede realizase empleando métodos indicados anteriormente. Así, la primera y la tercera son inmediatas de tipo logarítmico, la segunda es inmediata de tipo potencial y la última se ajusta a los casos **2)** y **3)** que vimos al principio de esta sección. Así pues,

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^4-15x^3+27x-8}{x^5-10x^4+39x^3-72x^2+62x-20} = \\ &= \; -2\int \frac{1}{x-1} - \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x-2} + 2\int \frac{x}{(x-3)^2+1} \\ &\quad\; - \int \frac{1}{(x-3)^2+1}. \\ &= \; -2\log(x-1) + (x-1)^{-1} + \log(x-2) + 5\arctan(x-3) \\ &\quad\; + \log\big((x-3)^2+1\big) + C.\end{aligned}$$

2.4 Integral definida

La integral indefinida de una función $f(x)$ es, mas una constante de integración, una primitiva de la función $F(x)$. Si tomamos un intervalo (a, b) en el que está definida la función $f(x)$ definiremos en esta sección lo que se denomina integral definida de $f(x)$ entre a y b. Mientras que la integral indefinida es una función (la función primitiva), la integral definida será un número.

Por sus importantes aplicaciones la integral definida es una herramienta fundamental en matemáticas y otras disciplinas. La relación entre la integral definida y la indefinida queda establecida en algunos de los resultados más importantes del análisis matemático como el Teorema Fundamental del Cálculo, regla de Barrow, etc. El estudio de esos resultados se escapa de los objetivos del curso pero nos basaremos en ellos para dar una definición sencilla de integral definida.

Veamos a continuación la definición precisa de integral definida.

Definición 33.

i) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$. Supongamos que f es continua y acotada en (a, b) y que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que es derivable en (a, b) y que $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x),$$

es decir, F es una primitiva de f en (a, b). Entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

ii) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$ y supongamos que f es acotada en (a, b) y continua en (a, b) excepto a lo sumo en los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ entonces llamamos integral definida de f entre a y b al número real dado mediante

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx.$$

Definimos la integral definida de f entre b y a como

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ acotada y dado $a \in \mathbb{R}$ definimos la integral definida de f entre a y a como

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

La diferencia $F(b) - F(a)$ suele denotarse como $[F(x)]_a^b$ con lo que tenemos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

Con esta definición las propiedades clásicas de la integral definida surgen de forma inmediata. En particular el Teorema Fundamental del cálculo será consecuencia de la definición y de la **Propiedad ??** para la derivación de funciones definidas a trozos. Asimismo, la fórmula del cambio de variable es una consecuencia directa de la regla de la cadena para la derivación de funciones.

Propiedades 34.

i) Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que $(a, b) \subseteq D$, de modo que f y g están en las condiciones del apartado ii) de la **Definición 33** *para dicho intervalo, entonces:*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b f(x)\ dx.$

2. $\forall c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$

3. *(Teorema fundamental del cálculo) Si consideramos la función*

$$\begin{array}{c} F : [a,b] \to \mathbb{R} \\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array},$$

entonces F es una función continua en $[a,b]$ y derivable en todos aquellos puntos $x \in (a,b)$ en los que f es continua, teniéndose en tales casos que

$$F'(x) = f(x).$$

4. *Si modificamos la función f en un conjunto finito de puntos, el valor de su integral entre a y b no varía.*

ii) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

iii) (Fórmula del cambio de variable) Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to [a,b]$ en las condiciones del apartado ii) de la **Definición 33** *para sus respectivos dominios. Supongamos que g es derivable en $[c,d]$, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.$$

2.4.1 El área como integral definida

Del mismo modo que tenemos una interpretación geométrica de la derivada como pendiente puntual, la integral definida posee también una interpretación geométrica. Sabemos que la integral definida de una función entre unos límites concretos de integración es un número. Ese número determina el área encerrada por la función. Veámoslo en la siguiente propiedad.

Propiedad 35. *Dada la función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en las condiciones del apartado ii) de la* **Definición 33** *y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, el área comprendida entre el eje x, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función f se calcula mediante la integral definida*

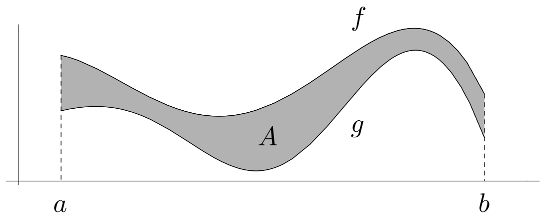
$$\int_a^b f(x)dx.$$

Como se indica en la propiedad, puesto que $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, si la función f es negativa, la integral definida entre a y b proporcionará el valor del área pero con signo negativo. Ello debe ser tenido en cuenta a la hora de trabajar con funciones que cambian de signo.

Dadas dos funciones $f, g : [a,b] \to$ tales que

$$f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b],$$

podemos hacer uso de la última propiedad para calcular el área, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones.

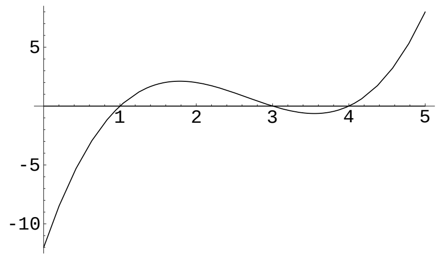


Es claro que A será la diferencia entre el área que queda bajo f y la que queda bajo g. Por tanto,

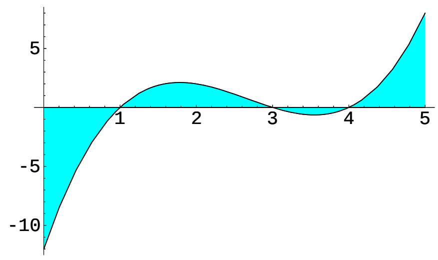
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

A este respecto, nuevamente es preciso tener en cuenta los posibles puntos de corte entre las funciones f y g que podrían hacer variar el signo de la integral anterior.

Ejemplos 36. 1) Calculemos el área encerrada entre la función $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ y el eje x sobre el intervalo $[0, 5]$. Si representamos la función $f(x)$ en el intervalo indicado obtenemos la gráfica



El área encerrada por la función será por tanto la región que aparece sombreada en la siguiente figura:



Sabemos que el área encerrada por una función en un intervalo se calcula realizando la integral definida de la función en ese intervalo. Sin embargo, observamos en ambas gráficas que la función $f(x)$ presenta varios cambios de signo en el intervalo $[0, 5]$ por lo que no podremos calcular el área directamente realizando la integral

$$\int_0^5 f(x)dx.$$

Debemos determinar en primer lugar en qué intervalos es positiva o negativa la función. Si bien en este caso es posible observar a simple vista en la representación gráfica de $f(x)$ los intervalos en los que es positiva o negativa, no siempre dispondremos la gráfica de la función por lo que procederemos como si no contáramos con ella.

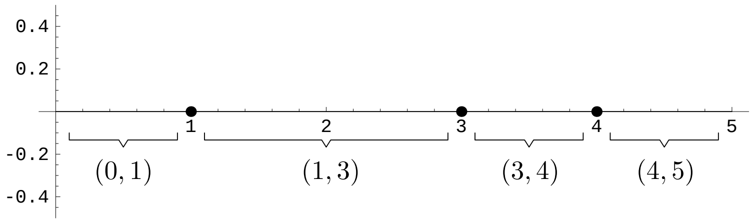
De este modo, debemos determinar cuándo

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) < 0.$$

Para ello comenzamos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, es decir,

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0.$$

Si aplicamos el método de Ruffini es fácil comprobar que las soluciones de esta ecuación son $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$ que dividen al intervalo $[0, 5]$ en cuatro subintervalos



y sabemos, como consecuencia del Teorema de Bolzano (véase la página 36), que dentro de cada uno de esos intervalos la función $f(x)$ no puede cambiar de signo. Basta entonces comprobar el signo de la función en un punto de cada intervalo para deducir que

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (0,1). \\ f(x) > 0 \text{ en } (1,3). \\ f(x) < 0 \text{ en } (3,4). \\ f(x) > 0 \text{ en } (4,5). \end{cases}$$

Por tanto, en los intervalos $(0,1)$ y $(3,4)$ la integral definida proporcionará el área encerrada por la función f pero con signo negativo. Para calcular el área correctamente debemos cambiar el signo al resultado de la integral definida sobre estos dos intervalos. De este modo obtendremos el valor exacto del área encerrada por $f(x)$ sobre el intervalo $[0,5]$ como sigue

$$\text{área} = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx.$$

Puesto que la integral indefinida de $f(x)$ es

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 8x^2 + 19x - 12)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x + C,$$

finalmente tenemos

$$\text{área} = -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_1^3 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_3^4$$

$$+ \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x\right]_4^5 = \frac{133}{12} = \frac{59}{12} + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = 11.0833.$$

2) Calculemos el área comprendida entre las funciones $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$ y $f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$ sobre el intervalo $[1,3]$. Sabemos que el área comprendida entre ambas funciones se obtiene mediante la integral definida

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Sin embargo, nuevamente hemos de tener en cuenta los posibles cambios de signo que vendrán determinados por los cruces entre las dos funciones. En este caso hemos de determinar si

$$f_1(x) - f_2(x) < 0 \quad \text{ó} \quad f_1(x) - f_2(x) > 0$$

y para ello comenzamos resolviendo la ecuación $f_1(x) - f_2(x) = 0$, es decir,

$$x^2 - 2x + 2 - (-x^2 + 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0.$$

Aplicando la fórmula para la ecuación de segundo grado comprobamos que las soluciones de esta ecuación son

$$\begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0.6339 \\ x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 2.3660 \end{cases}.$$

De estas dos soluciones solamente la segunda está en el intervalo $[1,3]$ que nos interesa dividiéndolo en dos subintervalos, $(1,\frac{3+\sqrt{3}}{2})$ y $(\frac{3+\sqrt{3}}{2},3)$. Nuevamente es suficiente comprobar un punto de cada uno de estos intervalos para deducir que

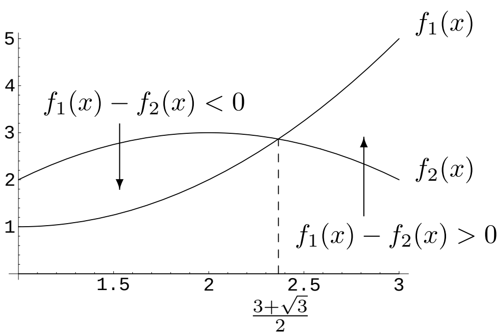
$$\begin{cases} f_1(x)-f_2(x)<0 \text{ en } (1,\frac{3+\sqrt{3}}{2}). \\ f_1(x)-f_2(x)>0 \text{ en } (\frac{3+\sqrt{3}}{2},3). \end{cases}$$

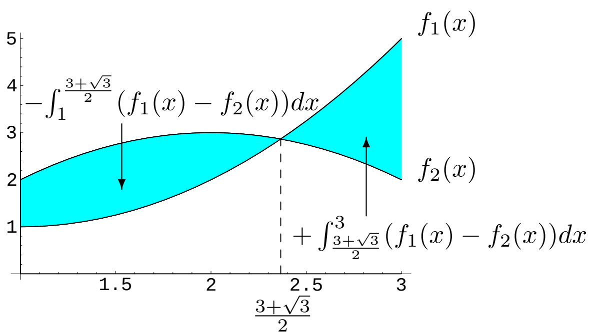
De modo que obtendremos al área deseada compensando el signo negativo de la integral definida en el primer intervalo como sigue:

$$\text{área} = -\int_1^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} (f_1(x)-f_2(x))dx + \int_{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}^{3} (f_1(x)-f_2(x))dx$$

$$= -\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2+3x\right]_1^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} + \left[\frac{2}{3}x^3-3x^2+3x\right]_{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}^{3} = \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}+\sqrt{3} = 2.3987.$$

Si observamos la gráfica de ambas funciones en el intervalo $[1,3]$ y la región que ellas delimitan, podemos comprobar que efectivamente se cortan en el punto $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ del intervalo $[1,3]$ con lo que es necesario cambiar el signo de la integral definida en el primer subintervalo tal y como aparece en la gráfica.





2.4.2 Aplicaciones de la integral definida

Repasemos aquí brevemente algunas aplicaciones de la integral definida. De partida, los resultados de la sección anterior hacen posible el cálculo de áreas a través de la integral definida lo cual de por sí constituye un importante campo de aplicaciones. Veamos algunas otras:

Cálculo de la función de valor total a partir de la función de velocidad

Ya comentábamos al principio de este Capítulo que en muchas ocasiones se dispone de la función que determina la velocidad de cierto fenómeno pero no de la función de valor total o acumulado. En tales circunstancias el apartado *ii)* de la **Propiedad 34** permite recuperar la función de valor acumulado si disponemos de algún dato inicial.

Supongamos que cierto fenómeno que evoluciona a lo largo del tiempo está determinado por una magnitud, $M(t)$, de la cual conocemos su velocidad de variación, $v(t)$, en cada instante. Supongamos además que sabemos que en el instante t_0 dicha magnitud tomaba un valor M_0. Tratamos de determinar quién es la función $M(t)$ a partir de la siguiente información:

$$\begin{cases} v(t) = M'(t), \\ M(t_0) = M_0. \end{cases}$$

Utilizando el apartado *ii)* de la **Definición 34** tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} M'(t)dt = M(t) - M(t_0) \Rightarrow M(t) - M_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\Rightarrow M(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt. \tag{2.1}$$

Esta última identidad nos proporciona el dato, en principio desconocido, del valor $M(t)$ en cualquier instante.

Ejemplos 37. 1) La velocidad de crecimiento de cierta población viene determinada por la función $v(t) = 100e^{\frac{t}{10}} - 7t - t^2$ expresada en individuos/día. Supongamos también que la población inicial es de 2000 individuos. En estas condiciones, debemos determinar la función $P(t)$ que proporciona el número de individuos que componen la población en el día t.

Para ello, hemos de tener en cuanta que la velocidad de crecimiento de la función $P(t)$ (de la población) está determinada por su derivada y además conocemos la población inicial (es decir, el valor de $P(0)$) por lo tanto, disponemos de la siguiente información:

$$\begin{cases} v(t) = P'(t) = 100e^{\frac{t}{10}} - 7t - t^2, \\ P(0) = 2000. \end{cases}$$

Si aplicamos la definición de la integral definida tal y como hemos visto en (2.1),

$$P(t) = P(0) + \int_0^t P'(t)dt = 2000 + \int_0^t v(t)dt$$

y por tanto

$$P(t) = 2000 + \int_0^t \left(100e^{\frac{t}{10}} - 7t - t^2\right) dt =$$

$$= 2000 + \left[1000e^{\frac{t}{10}} - \frac{7t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^t = 2000 + 1000e^{\frac{t}{10}} - \frac{7t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - 1000,$$

así que finalmente

$$P(t) = 1000 + 1000e^{\frac{t}{10}} - \frac{7t^2}{2} - \frac{t^3}{3}.$$

En particular, si necesitamos conocer el tamaño de la población pasados 10 días tendremos que

$$P(10) = 1000 + 1000e^{\frac{10}{10}} - \frac{7 \cdot 10^2}{2} - \frac{10^3}{3} = 3034.95.$$

2) En el **Ejemplo 42** de la página 99 en la sección dedicada a funciones spline, dentro del apartado dedicado a material adicional, calculamos la función $B(t)$ que para cada día, t, proporciona la cantidad de basuras producidas en cierta ciudad. Tenemos entonces que $B(t)$ expresa en toneladas/día la velocidad de producción de basura que varía de un día a otro. Supongamos que inicialmente ($t_0 = 0$) la cantidad de basuras acumuladas en el vertedero público era de 3200 toneladas. Pretendemos calcular ahora la función $M(t)$ que nos indique de qué forma se fue llenando el vertedero durante el mes en que se realizó el estudio que nos llevó al cálculo de $B(t)$. A raíz de los comentarios anteriores tenemos que

$$M(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)dt = 3200 + \int_0^t B(t)dt.$$

Calculamos $B(t)$ como un spline cúbico de la forma (aquí admitiremos que la fórmula que obtuvimos para $B(t)$ es válida también desde $t_0 = 0$)

$$B(t) = \begin{cases} p_1(t), \text{si } 0 \leq t \leq 5, \\ p_2(t), \text{si } 5 \leq t \leq 17, \\ p_3(t), \text{si } 17 \leq t \leq 30. \end{cases}$$

Puesto que se trata de una función definida a trozos, para calcular su integral definida utilizaremos el apartado *ii)* de la **Definición 33**. Distinguiremos tres casos, uno para cada intervalo de definición de $B(t)$:

Caso 1 $(0 \le t \le 5)$ En este caso tenemos que

$$\int_0^t B(t)dt = \int_0^t (31-t)dt = \left[31t - \frac{t^2}{2}\right]_0^t = 31t - \frac{t^2}{2}.$$

En particular, $\int_0^5 B(t)dt = \frac{285}{2}$.

Caso 2 $(5 \le t \le 17)$ Ahora dividiremos la integral en dos partes.

$$\int_0^t B(t)dt = \int_0^5 B(t)dt + \int_5^t B(t)dt = \frac{285}{2} + \int_5^t \left(\frac{6571}{216} - \frac{47}{72}t - \frac{5}{72}t^2 + \frac{1}{216}t^3\right) dt$$

$$= \frac{285}{2} + \frac{6571}{216}t - \frac{47}{144}t^2 - \frac{5}{216}t^3 + \frac{1}{864}t^4.$$

En particular, $\int_0^{17} B(t)dt = \frac{285}{2} + 264 = \frac{813}{2}$.

Caso 3 $(17 \le t \le 30)$ Procediendo como en el caso anterior,

$$\int_0^t B(t)dt = \int_0^{17} B(t)dt + \int_{17}^t B(t)dt = \frac{813}{2} + \int_{17}^t \left(\frac{284668}{2197} - \frac{239251}{13182}t + \frac{6326}{6591}t^2 - \frac{205}{13182}t^3\right) dt$$

$$= \frac{813}{2} + \frac{284668}{2197}t - \frac{239251}{26364}t^2 + \frac{6326}{19773}t^3 - \frac{205}{52728}t^4.$$

Reuniendo todos estos cálculo, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} M(t) &= 3200 + \begin{cases} 31t - \frac{t^2}{2}, & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ \frac{285}{2} + \frac{6571}{216}t - \frac{47}{144}t^2 - \frac{5}{216}t^3 + \frac{1}{864}t^4, & \text{si } 5 \le t \le 17, \\ \frac{813}{2} + \frac{284668}{2197}t - \frac{239251}{26364}t^2 + \frac{6326}{19773}t^3 - \frac{205}{52728}t^4, & \text{si } 17 \le t \le 30 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3200 + 31t - \frac{t^2}{2}, & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ \frac{6685}{2} + \frac{6571}{216}t - \frac{47}{144}t^2 - \frac{5}{216}t^3 + \frac{1}{864}t^4, & \text{si } 5 \le t \le 17, \\ \frac{7213}{2} + \frac{284668}{2197}t - \frac{239251}{26364}t^2 + \frac{6326}{19773}t^3 - \frac{205}{52728}t^4, & \text{si } 17 \le t \le 30 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta es finalmente la función de basuras acumuladas a lo lardo del tiempo. En cada instante t nos proporciona la cantidad de deshechos almacenados en el vertedero público.

Véase que la función $M(t)$ es un spline de grado cuatro y como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, puesto que $B(t)$ es continua, $M(t)$ es derivable en todos los puntos y $M'(t) = B(t)$. Además, $B(t)$ es un spline cúbico de grado tres y clase 2 por lo que, en realidad, $M(t)$ es una función tres veces derivable, es un spline de grado cuatro y clase tres.

Cálculo del valor medio de una función

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en principio positiva, sabemos que la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área que encierra la función sobre el intervalo $[a, b]$. Podemos preguntarnos si es posible encontrar una función constante $g(x) = k$ que encierre en el mismo intervalo la misma área que la función f. Tenemos que el área para g es

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b kdx = [kt]_a^b = k(b-a).$$

Si queremos que encierre la misma área que f debe cumplirse que

$$k(b-a) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Por tanto la función constante $g(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, encierra la misma área que $f(x)$. Dicha constante es lo que suele llamarse valor medio de la función f.

Definición 38. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, llamamos valor medio de la función a la cantidad*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Ejemplo 39. Durante los 365 día de un año, la cantidad de centímetros cúbicos de lluvia recogidos cada día en cierta región viene dada por la función

$$\begin{array}{c} L : [0,365] \to \mathbb{R} \\ L(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right) \end{array}$$

de modo que $L(t)$ son los centímetros cúbicos recogidos el día t. El promedio de lluvia diaria durante ese año será el valor medio de la función $L(t)$ en el intervalo $[0,365]$ que calculamos del siguiente modo:

$$\text{Promedio de } L = \frac{1}{365-0}\int_0^{365} L(t)dt = \frac{1}{365}\int_0^{365}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right)\right)dt = \frac{1}{365}\left[t + \frac{365}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right)\right]_0^{365} = 1.$$

En media habrá llovido un centímetro cúbico diario en esta región.

2.5 Material adicional

2.5.1 Splines de clase superior

En el Capítulo 1 introdujimos el concepto de función spline. Recordemos que un spline es una función definida a trozos de modo que las funciones que intervienen en ella son todas polinomios. Cuando el spline es una función continua (en cada punto de cambio de definición los polinomios a izquierda y derecha alcanzan el mismo valor en dicho punto) dijimos que era un spline de clase cero. Ahora podemos hablar de splines de clase superior.

Definición 40. *Un spline de grado r y clase k es una función definida a trozos en la que las funciones que intervienen son todas polinomios de grado a lo sumo r y que además es de clase k.*

Supongamos que disponemos de la lista de datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_k, f_k)$. Nos planteamos el siguiente problema:

a) ¿Existe una función spline de clase k fijada que interpole esos datos?

b) ¿De qué grado hemos de tomar la función spline para poder resolver la pregunta **a)**?

La siguiente propiedad da respuesta a ambos problemas:

Propiedad 41. *Dado cualquier conjunto de datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_k, f_k)$ y los valores $f_0^1, f_0^2, \ldots, f_0^n \in \mathbb{R}$, existe una única función spline, $f(x)$, de clase n y grado $n+1$ con nodos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ que interpola en esos datos y tal que $f^{i)}(x_0) = f_0^i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

En la propiedad anterior hemos añadido las condiciones $f^{i)}(x_0) = f_0^i$, $i = 1, \ldots, n$ que hacen que tengamos unicidad. Usualmente, en lugar de estas condiciones se fijan los valores de ciertas derivadas en el primer y último nodo. Aquí nos hemos decidido por esta opción debido a que estas condiciones permiten un cálculo más sencillo del spline correspondiente.

Si bien la propiedad anterior garantiza la posibilidad de encontrar funciones splines de cualquier clase, se puede demostrar que las funciones spline de grado impar tienen propiedades de suavidad en sus gráficas, siendo las menos oscilantes en un cierto sentido, lo que las hace preferibles frente a otras elecciones. Asimismo, ya vimos en el Capítulo 1 los efectos perniciosos del uso de polinomios de interpolación con grado alto. Todo ello hace que la opción más utilizada en la práctica sea la del spline de grado 3 y clase 2 que se suele denominar **spline cubico**.

Supongamos que queremos calcular un spline cubico, $f(x)$, que interpola en los datos (x_0, f_0), (x_1, f_1), $\ldots$, (x_k, f_k) y tal que $f'(x_0) = f_0'$ y $f''(x_0) = f_0''$. Puesto que el spline cúbico es de grado tres, tendrá que ser de la forma

$$f : [x_0, x_k] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ p_2(x), & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \vdots & \\ p_k(x), & \text{si } x_{k-1} \leq x \leq x_k, \end{cases}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son todos ellos polinomios de grado tres que habrá que determinar. Si aplicamos la **Propiedad ??** sabemos que se puede calcular las derivadas de $f(x)$ derivando cada uno de los polinomios que intervienen en su definición. De este modo,

$$f' : [x_0, x_k] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f'' : [x_0, x_k] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} p_1'(x), & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ p_2'(x), & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \vdots & \\ p_k'(x), & \text{si } x_{k-1} \leq x \leq x_k. \end{cases} \quad \text{y} \quad f''(x) = \begin{cases} p_1''(x), & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ p_2''(x), & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \vdots & \\ p_k''(x), & \text{si } x_{k-1} \leq x \leq x_k. \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea un spline cúbico que interpola en los datos dados, debe cumplir tres condiciones:

- $f(x)$ debe interpolar en los datos iniciales y por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1(x_0) = f_0, \\ p_i(x_i) = f_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \end{array}}$$

- $f(x)$ debe ser una función de clase 1. Aplicando la **Propiedad ??** sabemos que entonces es necesario que en cada nodo, x_i, los límites por la derecha y por la izquierda de la función derivada coincidan. Es decir,

$$\boxed{p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i), \ \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}}$$

- $f(x)$ debe ser de clase 2. Nuevamente la **Propiedad ??** garantiza que esto es cierto cuando en cada nodo x_i las segunda derivadas a izquierda y derecha sean las misma. En otras palabras,

$$\boxed{p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i), \ \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}.}$$

- Deben cumplirse las dos condiciones adicionales,

$$\boxed{p'(x_0) = f_0', \quad p''(x_0) = f_0''.}$$

Reorganizando todo esto tenemos que para cada uno de los polinomios $p_1, p_2, \ldots, p_k$ hemos de imponer las siguientes condiciones:

- p_1 es un polinomio de grado tres que debe cumplir:

$$\begin{cases} p_1(x_0) = f_0, \\ p_1(x_1) = f_1, \\ p_1'(x_0) = f_0', \\ p_1''(x_0) = f_0''. \end{cases} \tag{2.2}$$

- Para $i = 2, \ldots, k$, p_i es un polinomio de grado k que ha de cumplir:

$$\begin{cases} p_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, \\ p_i(x_i) = f_i, \\ p_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}'(x_{i-1}), \\ p_1''(x_{i_1}) = p_{i-1}''(x_{i-1}). \end{cases} \tag{2.3}$$

El método para calcular esos polinomios $p_1, p_2, \ldots, p_k$ será el siguiente

Paso 1: Calculamos el polinomio p_1 a partir de las condiciones (2.2).

Paso i: Las condiciones (2.3) que ha de cumplir p_i están escritas en términos de p_{i-1}. Una vez calculado p_{i-1} podemos utilizar estas condiciones para calcular p_i.

Ejemplo 42. A lo largo de un mes se realiza el recuento de la cantidad de residuos que se generan diariamente en cierta ciudad. Tenemos los datos de algunos días que exponemos en la siguiente tabla:

Día	**Basuras en toneladas/día**
1	30
5	26
17	22
30	29

Utilizaremos un spline cúbico para reconstruir la función $B(t)$ que proporciona las toneladas de basuras producidas el día t. Supondremos, en principio de forma arbitraria, que $B'(0) = -1$ y $B''(0) = 0$. Puesto que tenemos cuatro datos utilizaremos un spline con cuatro nodos de la forma

$$B(t) = \begin{cases} p_1(t), \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ p_2(t), \text{si } 5 \leq t \leq 17 \\ p_3(t), \text{si } 17 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

Calculemos los polinomios p_1, p_2, p_3 de forma iterativa:

Paso 1: p_1 será un polinomio de grado tres y por tanto de la forma $p_1(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$. Además p_1 estará sometido a las condiciones dadas en (2.2) por lo que

$$\begin{cases} p_1(1) = 30 \\ p_1(5) = 26 \\ p_1'(0) = -1 \\ p_1''(0) = 0 \end{cases} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Sustituyendo} \\ \text{y calculando} \\ \text{las derivadas.} \end{array} \begin{cases} a + b + c + d = 30 \\ a + 5b + 25c + 125d = 26 \\ b + 2c + 3d = -1 \\ 2c + 6d = 0 \end{cases} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Resolviendo} \\ \text{el sistema} \end{array} \begin{cases} a = 31 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Por tanto $p_1(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 = 31 - t$.

Paso 2: Una vez que conocemos p_1 podemos calcular p_2 que nuevamente será un polinomio de grado dos y por tanto de la forma $p_2(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$. En este caso, p_2 estará sometido a las restricciones dadas por (2.3). En esas restricciones será necesario calcular el valor en los nodos de las derivadas del polinomio anterior p_1:

$$\left\{\begin{array}{l} p_2(5)=26 \\ p_2(17)=21 \\ p_2'(5)=p_1'(5) \\ p_2''(5)=p_1''(5) \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Sustituyendo} \\ \text{y calculando} \\ \text{las derivadas.} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} a+5b+25c+125d=26 \\ a+17b+289c+4913d=22 \\ b+10c+75d=-1 \\ 2c+30d=0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Resolviendo} \\ \text{el sistema} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} a=\frac{6571}{216} \\ b=-\frac{47}{72} \\ c=-\frac{5}{72} \\ d=\frac{1}{216} \end{array}\right.$$

con lo que $p_2(t)=\frac{6571}{216}-\frac{47}{72}t-\frac{5}{72}t^2+\frac{1}{216}t^3$.

Paso 3: Finalmente calcularemos p_3 nuevamente utilizando las condiciones (2.3) y el hecho de que p_2 ya es conocido:

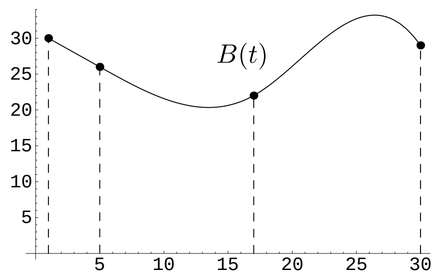
$$\left\{\begin{array}{l} p_3(17)=22 \\ p_3(30)=21 \\ p_3'(17)=p_2'(17) \\ p_3''(17)=p_2''(17) \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Sustituyendo} \\ \text{y calculando} \\ \text{las derivadas.} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} a+17b+289c+4913d=22 \\ a+30b+900c+27000d=29 \\ b+34c+867d=1 \\ 2c+102d=\frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{Resolviendo} \\ \text{el sistema} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} a=\frac{284668}{2197} \\ b=-\frac{239251}{13182} \\ c=\frac{6326}{6591} \\ d=\frac{205}{13182} \end{array}\right.$$

Así que $p_3=\frac{284668}{2197}-\frac{239251}{13182}t+\frac{6326}{6591}t^2-\frac{205}{13182}t^3$.

En definitiva, la función $B(t)$ que interpola en los datos dados y que utilizaremos como reconstrucción de la función $B(t)$ es

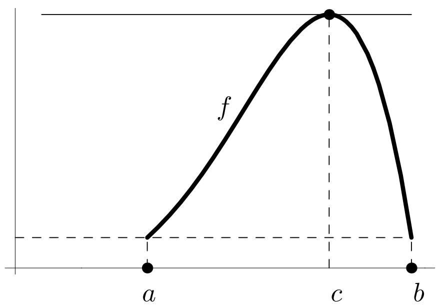
$$B(t)=\left\{\begin{array}{ll} 31-t, & \text{si } 1\le t\le 5, \\ \frac{6571}{216}-\frac{47}{72}t-\frac{5}{72}t^2+\frac{1}{216}t^3, & \text{si } 5\le t\le 17, \\ \frac{284668}{2197}-\frac{239251}{13182}t+\frac{6326}{6591}t^2-\frac{205}{13182}t^3, & \text{si } 17\le t\le 30. \end{array}\right.$$

En la gráfica de $B(t)$ podemos observar como efectivamente interpola en los datos iniciales.



2.5.2 Teoremas clásicos de derivación

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si $f(a)=f(b)$, su gráfica será algo del tipo



La intuición nos indica que, forzosamente, en algún punto intermedio entre a y b la tangente a la función debe ser horizontal. El Teorema de Rolle afirma que esto efectivamente es así.

Teorema 43 (Teorema de Rolle)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces si $f(a) = f(b)$ se verifica que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Cuando $f(a) \neq f(b)$ el razonamiento anterior no es válido pero es fácil formular una versión del Teorema de Rolle para esta situación. Si $f(a) = f(b)$, la recta que une $(a, f(a))$, con $(b, f(b))$ es horizontal y la recta cuya existencia postula el Teorema de Rolle también debe serlo. Lo que tenemos es que la tangente en algún punto es paralela a la recta que une los puntos inicial y final de la gráfica de la función. El teorema del valor medio pone de manifiesto que esta afirmación es cierta incluso cuando $f(a) \neq f(b)$.

Teorema 44 (Teorema del valor medio)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

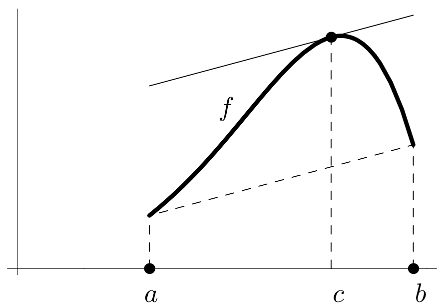
Sabemos que la pendiente, m, de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la tangente del ángulo que forma con la horizontal y por tanto

$$m = \tan\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

Por otro lado en el punto $c \in (a, b)$, la pendiente, m_1, de la recta tangente será $f'(c)$ y si despejamos en la igualdad del Teorema del valor medio tenemos que

$$m_1 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

En tal caso, la pendiente, m, de la recta que une los puntos inicial y final de la gráfica de f y la pendiente de la recta tangente en el punto c coinciden y ambas rectas son paralelas. Como hemos visto antes esto constituye una generalización del Teorema de Rolle al caso en que $f(a) \neq f(b)$.



Se suele utilizar el Teorema de Rolle para demostrar que una ecuación tiene solución única en cierto intervalo. Supongamos que estamos resolviendo la ecuación

$$f(x) = 0$$

y que hemos encontrado dos soluciones a y b para esta ecuación. En tal caso tendremos que

$$f(a) = f(b) = 0$$

y si la función satisface las hipótesis del Teorema de Rolle tendremos que existirá un punto intermedio entre a y b de modo que

$$f'(c) = 0.$$

Ahora bien, si previamente, por algún medio, hemos comprobado que la función f' nunca se anula, la última identidad no podrá ser cierta en cuyo caso la conjetura inicial de que tenemos dos soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ no puede ser correcta de modo que debe haber una única solución.

Ejemplo 45. Veamos que la ecuación $e^x + x = 2$ tiene una única solución. Para ello tomemos la función $f(x) = e^x + x - 2$ y probemos de forma equivalente que $f(x) = 0$ tiene solución única.

Existencia de solución (Teorema de Bolzano): La función $f(x)$ es continua. Si encontramos dos puntos a y b en los que la función alcance valores con distinto signo, el Teorema de Bolzano garantizará la existencia de solución. Ahora bien, es fácil comprobar que

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = 1 - 2 < 0, \quad \text{y} \quad f(2) = e^2 + 2 - 2 = e^2 > 0.$$

Por tanto debe existir una solución, c, de $f(x) = 0$ que además estará en el intervalo $(0, 2)$ (podríamos aproximarla por el método de bisección).

Unicidad de solución (Teorema de Rolle): Ya sabemos que $f(x) = 0$ tiene al menos una solución a la que hemos llamado c. Supongamos que tenemos otra solución $c_1 \neq c$. Razonando como antes hemos indicado, puesto que $f(c) = 0 = f(c_1)$, podemos aplicar el Teorema de Rolle y afirmar que existe ξ entre c y c_1 tal que

$$f'(\xi) = 0.$$

Sin embargo, $f'(x) = e^x + 1$ y es evidente que

$$f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia no puede existir esa segunda solución c_1. La única solución es la que hemos localizado antes, c.

2.5.3 Desarrollo de Taylor y McLaurin

Supongamos que queremos encontrar una función de forma que en cierto punto x_0 sus derivadas tomen sucesivamente los valores $f_0, f_1, \ldots, f_k$, es decir,

$$f(x_0) = f_0, \ f'(x_0) = f_1, \ f''(x_0) = f_2, \ldots, f^{n)}(x_0) = f_n.$$

Hay muchas maneras de resolver este problema pero la forma más sencilla consiste en considerar el siguiente polinomio:

$$p_n(x) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(x - x_0) + \frac{f_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f_n}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.4}$$

es una solución a este problema, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ es lo que se denomina número factorial. Es fácil comprobar que

$$p(x_0) = f_0, \ p'(x_0) = f_1, \ p''(x_0) = f_2, \ldots, p^{n)}(x_0) = f_n.$$

Tomemos ahora una función $f : D \to \mathbb{R}$, n veces derivable en cierto punto x_0. Supongamos que únicamente tenemos información de la función en el punto x_0 en el conocemos el valor de la función, $f(x_0)$, y el de sus n primeras derivadas, $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{n)}(x_0)$ ¿Será posible reconstruir la función f a partir de esta información? Es evidente que esto es imposible pero al menos podemos intentar buscar una función los más parecida posible a f. Como de f solamente conocemos sus primeras derivadas, lo único que podemos hacer es conseguir una función que coincida con f en esas primeras derivadas y para ello podemos utilizar el polinomio $p_n(x)$ de (2.4) para $f_0 = f(x_0), f_1 = f'(x_0), \ldots, f_n = f^{n)}(x_0)$. Lo que obtendremos es, en cierto sentido, la mejor aproximación de f que podemos calcular conociendo solamente sus primeras derivadas en el punto x_0. Ese polinomio es lo que se denomina Polinomio de Taylor de la función f en x_0.

Definición 46. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n en D y sea $x_0 \in D$. Llamamos polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al polinomio*

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

El polinomio de Taylor de grado n en $x_0 = 0$ se denomina también polinomio de McLaurin de grado n.

El polinomio de Taylor de una función constituye una aproximación de dicha función que presenta la ventaja de un más fácil manejo. La función de partida, $f(x)$, podría tener una expresión complicada pero $p_n(x)$ es siempre un polinomio sobre el que se pueden realizar de forma sencilla la mayoría de los cálculos. En ocasiones será posible sustituir una función por su polinomio de Taylor. Sin embargo al tomar el polinomio de Taylor en lugar de la función cometemos un error ya que el polinomio no es exactamente igual que ella. La siguiente propiedad nos da una expresión del error cometido al realizar esa sustitución.

Propiedad 47. *Sea un intervalo $I = (a, b)$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} en I y sea $x_0 \in I$. Entonces para cualquier $x \in I$ existe un punto real ξ situado entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

A la fórmula anterior se la conoce como fórmula de Taylor de grado n de la función f en el punto x_0.

La formula de Taylor nos proporciona el error cometido al tomar el polinomio de Taylor en lugar de la función. Véase que si llamamos $p_n(x)$ al polinomio de Taylor de grado n de f en x_0, utilizando la fórmula de Taylor, podemos escribir

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

y por lo tanto el error cometido será

$$E_n(x) = \left| \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$

2.5.4 Integración por cambio hasta una integral racional

Denotaremos mediante $\mathbf{R}(a)$ y $\mathbf{R}(a, b)$ a cualquier expresión que se obtiene mediante suma producto y división de las expresiones a y/ó b y de constantes.

Ejemplo 48.
• La expresión

$$\frac{\log^3(x) + 2\log^2(x) + 1}{\log^3(x) - 1}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(\log(x))$ ya que se obtiene mediante operaciones de suma, producto y división en las que intervienen $\log(x)$ y valores constantes.

• La expresión

$$\frac{\cos^2(x) + 2x\cos(x) + x}{1 + x^2 + 2\cos^3(x)}$$

es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x, \cos(x))$ ya que se obtiene sumando multiplicando o dividiendo las expresiones x, $\cos(x)$ y valores constantes. Sin embargo no es una expresión de tipo $\mathbf{R}(x)$ ni de tipo $\mathbf{R}(\cos(x))$.

Para resolver la integral

$$\int \mathbf{R}(h(x))h'(x)\, dx,$$

donde $h(x)$ puede ser alguna de entre

$$\begin{cases} a^x, \ a > 0 \\ e^x \\ \log(x) \\ \arccos(x) \\ \operatorname{arcsen}(x) \\ \operatorname{arctg}(x) \end{cases}$$

efectuaremos el cambio

$$t = h(x).$$

Nota. Una integral del tipo $\int \mathbf{R}(e^x)\ dx$ también se puede resolver utilizando el método anterior.

Ejemplos 49.

1) Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x - 1}\ dx.$

Se trata de la integral de una expresión del tipo $\mathbf{R}(e^x)$ y por lo tanto tomaremos el cambio $t = e^x$ en el siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x - 1}\ dx = \\
&\quad = \int \frac{e^x + (e^x)^2}{e^x - 1}\ dx = \left(\begin{array}{l} t = e^x \Rightarrow x = \log(t) \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right) = \int \frac{t + t^2}{t - 1} \frac{1}{t} dt \\
&\quad = \int \frac{1 + t}{t - 1}\ dt = \int \left(1 + \frac{2}{t - 1} \right)\ dt = t + 2\log(t - 1) + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array} \right) = e^x + 2\log(e^x - 1) + C.
\end{aligned}$$

2) Obténgase $\displaystyle\int \frac{1 - 2\mathrm{arcsen}(x) - \mathrm{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}\big(1 + \mathrm{arcsen}^2(x)\big)^2}\ dx$

En la integral anterior aparece una función del tipo $\mathbf{R}(\mathrm{arcsen}(x))$ por lo que haremos el cambio $t = \mathrm{arcsen}(x)$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1 - 2\mathrm{arcsen}(x) - \mathrm{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}\big(1 + \mathrm{arcsen}^2(x)\big)^2}\ dx = \\
&\quad = \left(\begin{array}{l} t = \mathrm{arcsen}(x) \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \Rightarrow dx = \sqrt{1 - x^2}\ dt \end{array} \right) = \int \frac{1 - 2t - t^2}{\sqrt{1 - x^2}(1 + t^2)^2} \sqrt{1 - x^2}\ dt \\
&\quad = \int \frac{1 - 2t - t^2}{(1 + t^2)^2}\ dt = \int \left(-\frac{2(t - 1)}{(1 + t^2)^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right)\ dt \\
&\quad = \int \frac{-2t}{(1 + t^2)^2}\ dt + 2\int \frac{1}{(1 + t^2)^2}\ dt - \int \frac{1}{1 + t^2}\ dt \\
&\quad = (t^2 + 1)^{-1} + 2\left(\frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x) \right) - \mathrm{arctg}(x) + C = \frac{t + 1}{t^2 + 1} + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array} \right) = \frac{\mathrm{arcsen}(x) + 1}{1 + \mathrm{arcsen}^2(x)} + C.
\end{aligned}$$

2.5.5 Integración de funciones trigonométricas

Estudiaremos en esta sección el cálculo integrales del tipo

$$\int \mathbf{R}(\cos(x), \mathrm{sen}(x))\ dx,$$

donde la expresión $\mathbf{R}$ tiene el significado que se indica en la página 103. Para resolver esta integral tenemos tres opciones posibles en función de las propiedades que tenga la expresión $\mathbf{R}$:

i) Se dice que la expresión $\mathbf{R}$ es impar en $\text{sen}(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(\cos(x), -\text{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \text{sen}(x)),$$

lo cual se produce generalmente cuando en $\mathbf{R}$ aparecen potencias impares de $\text{sen}(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\begin{cases} \cos(x) = t \Rightarrow x = \arccos(t) \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{cases}}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} \Rightarrow \boxed{\text{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}}.$$

Ejemplo 50. Calcúlese $\displaystyle\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)\ dx$.

Tenemos la integral de una expresión del tipo

$$\mathbf{R}(\text{sen}(x), \cos(x))$$

que es impar en $\text{sen}(x)$ (las potencias de $\text{sen}(x)$ que aparecen son impares). Aplicando el cambio anterior conseguimos:

$$\begin{aligned}
&\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)\ dx = \\
&\quad = (\cos(x) = t) = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^4 \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^4\ dt \\
&\quad = -\int (1-t^2)t^4\ dt = -\int (t^4 - t^6)\ dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c} \text{deshaciendo el} \\ \text{cambio} \end{array}\right) = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C.
\end{aligned}$$

---

ii) Se dice que la expresión $\mathbf{R}$ es impar en $\cos(x)$ si se verifica que

$$\mathbf{R}(-\cos(x), \text{sen}(x)) = -\mathbf{R}(\cos(x), \text{sen}(x))$$

lo cual se produce generalmente cuando en $\mathbf{R}$ aparecen potencias impares de $\cos(x)$. Entonces utilizaremos el cambio:

$$\boxed{\begin{cases} \text{sen}(x) = t \Rightarrow x = \text{arcsen}(t) \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{cases}}$$

y además tendremos que

$$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\text{sen}^2(x)} \Rightarrow \boxed{\cos(x) = \sqrt{1-t^2}}.$$

Ejemplo 51. Resolver la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\ dx$.

Tenemos que

$$\frac{1}{\cos(x)}$$

es una expresión del tipo $\mathbf{R}(\cos(x), \mathrm{sen}(x))$ impar en $\cos(x)$ (las potencias de $\cos(x)$ que aparecen son impares) y por lo tanto utilizaremos el cambio $\mathrm{sen}(x) = t$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \\
&\quad = (\mathrm{sen}(x) = t) = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&\quad = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\log(t+1) - \frac{1}{2}\log(t-1) + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c}\text{deshaciendo el} \\ \text{cambio}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{sen}(x)+1}{\mathrm{sen}(x)-1}\right) + C.
\end{aligned}$$

iii) Independientemente de que la expresión $\mathbf{R}$ sea par o impar en $\mathrm{sen}(x)$ ó en $\cos(x)$ siempre podremos aplicar el siguiente cambio que se denomina usualmente **cambio general**

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}(t) \\ \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right.}$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales, de las ecuaciones del cambio se deducen las siguientes expresiones para $\cos(x)$ y $\mathrm{sen}(x)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \\ \boxed{\mathrm{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}} \end{array}\right.$$

Ejemplo 52. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)+2\mathrm{sen}(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\cos(x)+2\mathrm{sen}(x)}\,dx = \\
&\quad = \left(t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2+4t} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&\quad = \int \frac{2dt}{2+4t} = \int \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\log(1+2t) + C \\
&\quad = \left(\begin{array}{c}\text{deshaciendo el} \\ \text{cambio}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

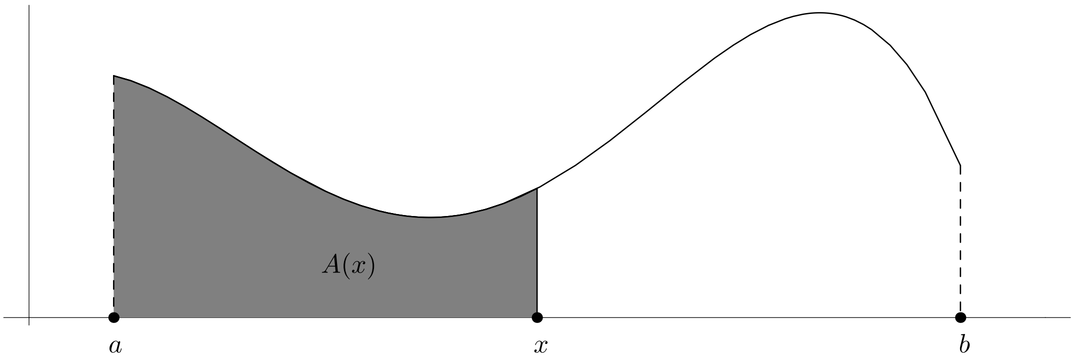
2.5.6 Interpretación geométrica de la integral definida: el área

La definición del concepto de área ha constituido un problema de envergadura a lo largo de la historia de las matemáticas. Nosotros no profundizaremos en el aspecto matemático de esa cuestión y nos contentaremos con admitir que existen ciertos subconjuntos, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, para los cuales puede ser calculada su área que denotaremos como área(A) y que cumple las siguientes propiedades básicas:

- El área del recinto encerrado por un rectángulo cuyos lados miden l_1 y l_2 es el producto $l_1 \cdot l_2$.

- Si $A \subseteq B$, área$(A) \leq$ área(B).
- Si $A \cap B = \emptyset$, área$(A \cup B) =$ área$(A) +$ área(B).

Consideremos la función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en las mismas condiciones del apartado *i)* de la **Definición 33**. Admitiremos que la función $f(x)$ es positiva en todo el intervalo (a, b). Para cada punto $x \in (a, b)$, llamemos $A(x)$ al área encerrada por la función y las rectas verticales que pasan por el punto inicial a y por x.



Es evidente que para cada valor de $x \in [a, b)$, el área $A(x)$ será diferente, además, podemos aceptar que $A(a) = 0$ ya que cuando $x = a$ la anchura de la banda considerada será nula y que $A(b)$ es el área total sobre el tramo (a, b). En definitiva, A es una función que depende de x definida en el intervalo $[a, b]$,

$$A : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$A(x) = \text{área encerrada por } f \text{ en el tramo } [a, x].$$

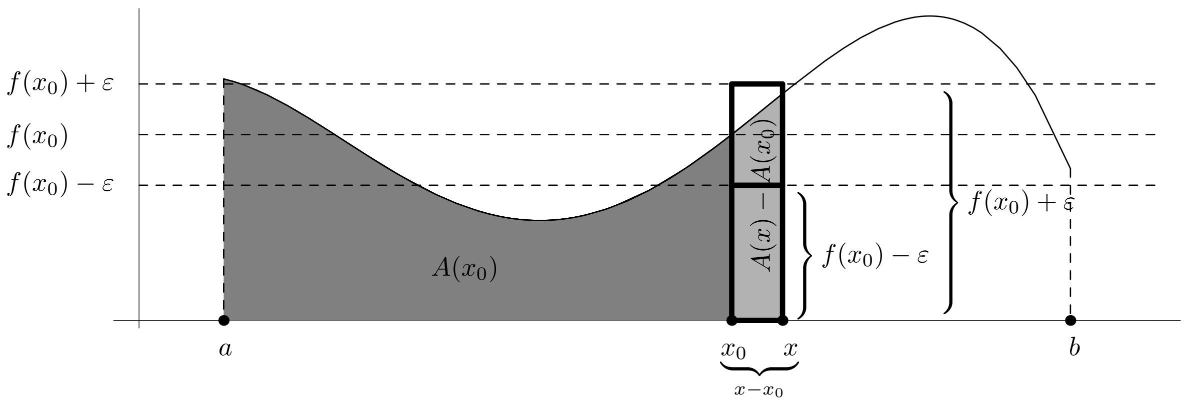
Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$ y comprobemos si la función $A(x)$ es derivable en ese punto. Para ello, debemos estudiar el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$

Puesto que la función f es continua, tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Entonces, elegido $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, es posible encontrar un tramo a izquierda y derecha de x_0, digamos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, en el que los valores de la función no se salen de la banda marcada por el intervalo $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Tomemos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dentro de ese tramo y observemos la gráfica correspondiente,



Es evidente que $A(x_0)$ es el área del tramo de la gráfica con sombreado más oscuro. Por su lado, $A(x)$ corresponde al área del tramo oscuro junto con el área del tramo sombreado en color más claro. La diferencia entre $A(x)$ y $A(x_0)$ es justamente ese tramo sombreado en color claro que por tanto tendrá área igual a

$A(x)-A(x_0)$. Es inmediato que dicho tramo está contenido en el rectángulo de base el intervalo (x_0,x) y de altura $f(x_0)+\varepsilon$ y que al mismo tiempo contiene al rectángulo con base (x_0,x) y altura $f(x_0)-\varepsilon$. Aplicando las propiedades que antes hemos fijado para el área tendremos que

$$\text{área}\begin{pmatrix}\text{rectángulo de}\\ \text{base } (x_0,x) \text{ y}\\ \text{altura } f(x_0)-\varepsilon\end{pmatrix} \leq \text{área}\begin{pmatrix}\text{zona de}\\ \text{sombreado}\\ \text{claro}\end{pmatrix} \leq \text{área}\begin{pmatrix}\text{rectángulo de}\\ \text{base } (x_0,x) \text{ y}\\ \text{altura } f(x_0)+\varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0) \leq A(x)-A(x_0) \leq (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0)-\varepsilon \leq \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)+\varepsilon.$$

Puesto que esta misma demostración es válida para ε tan pequeño como deseemos, no es difícil deducir de aquí que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}=f(x_0).$$

Puesto que x_0 es cualquier punto de $[a,b]$, obtenemos dos conclusiones:

- La función $A(x)$, que mide el área en el tramo desde el punto a hasta el punto x, es derivable en $[a,b]$.
- La derivada de la función $A(x)$ es

$$A'(x)=f(x),\ \ x\in[a,b].$$

Por tanto, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Si aplicamos la **Definición 33**, sabemos que

$$\int_a^x f(x)dx = A(x)-A(a).$$

Puesto que $A(a)=0$ finalmente deducimos que

$$A(x)=\int_a^x f(x)dx$$

y la integra definida entre dos puntos proporciona el área encerrada por la función sobre el intervalo determinado por ellos.