Capítulo 0

Introducción

0.1 Proposiciones lógicas

Definición 1. *Una proposición lógica es una afirmación que puede ser verdadera o falsa.*

Ejemplo 2.

- La tierra es un planeta.
- El sol gira en torno a la tierra.

Estas dos, son afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas. Evidentemente la primera es verdadera y la segunda falsa. Hay, por otro lado, enunciados que no pueden ser clasificados como verdaderos o falsos. Así por ejemplo, la frase '¿Qué hora es?' no es ni verdadera ni falsa.

Las proposiciones lógicas sencillas pueden combinarse para formar otras más complicadas mediante el uso de los operadores o conectores lógicos. Estos son:

Denominación	**Símbolo**	**Lectura**
'y' lógico	$\wedge$	y
'o' lógico	$\vee$	o
implicación	$\Rightarrow$	implica que
equivalencia	$\Leftrightarrow$	equivale a que
negación	$\neg$	no

Ejemplos 3.
1) La afirmación

$$x \geq 3 \textbf{ y } x \text{ es par}$$

es correcta para, por ejemplo, $x = 4, 6, 8$, etc. pero es falsa para $x = 3$. Por contra

$$x \geq 3 \textbf{ ó } x \text{ es par}$$

es correcta para $x = 3$ y también para $x = 4, 5, 6, 7$, etc.

2) El símbolo de implicación $\Rightarrow$ se lee como 'implica que' o como 'si ... entonces... '. Así, por ejemplo,

$$\text{Me han tocado 100 millones en la lotería} \;\Rightarrow\; \text{soy millonario}$$

se leerá como 'Me han tocado 100 millones en la lotería **implica que** soy millonario' o bien como '**Si** me han tocado 100 millones en la lotería **entonces** soy millonario'.

Téngase en cuenta que, mientras la afirmación anterior parece, en principio, cierta, la expresión **recíproca**,

$$\text{Soy millonario} \Rightarrow \text{me han tocado 100 millones en la lotería}$$

no lo parece tanto ya que evidentemente se puede llegar a ser millonario sin nunca haber obtenido ningún premio en un sorteo.

3) La afirmación siguiente parece verdadera:

$$\text{Soy licenciado en matemáticas} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\text{he aprobado todas las asignaturas}\\ \text{de la licenciatura en matemáticas}\end{array}.$$

Sin embargo también es evidente la afirmación recíproca:

$$\begin{array}{l}\text{He aprobado todas las asignaturas}\\ \text{de la licenciatura en matemáticas}\end{array} \Rightarrow \text{soy licenciado en matemáticas}\ .$$

Cuando entre dos afirmaciones es correcta la implicación tanto en un sentido como en otro, se dice que estas afirmaciones son equivalentes. Para denotar este hecho se emplea el signo de equivalencia $\Leftrightarrow$ que se lee 'equivale a que' o también 'si y solo si'. De este modo podemos escribir

$$\begin{array}{l}\text{he aprobado todas las asignaturas}\\ \text{de la licenciatura en matemáticas}\end{array} \Leftrightarrow \text{soy licenciado en matemáticas}$$

y lo leeríamos como

$$\begin{array}{l}\text{he aprobado todas las asignaturas}\\ \text{de la licenciatura en matemáticas}\end{array} \quad \begin{array}{c}\textbf{equivale a que}\\ \text{ó}\\ \textbf{si y solo si}\end{array} \quad \text{soy licenciado en matemáticas}\ .$$

Otros símbolos que aparecen habitualmente en la notación matemática son los denominados cuantificadores:

Denominación	**Símbolo**	**Lectura**
cuantificador universal	$\forall$	para todo
cuantificador existencial	$\exists$	existe
cuantificador existencial (unicidad)	$\exists_1$, $\exists!$	existe un único

Así mismo se emplea también 'tq.' o el símbolo '/' como abreviaturas de la expresión 'tal que'.

Ejemplo 4. El siguiente enunciado está escrito en lenguaje matemático,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m \in \mathbb{N}/m > n.$$

Para entender la frase hemos de recordar que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales y el símbolo $\in$ significa 'pertenece a'. En tal caso la anterior afirmación podemos interpretarla como sigue:

$$\underbrace{\text{Para todo}}_{\forall}\ \underbrace{\text{número natural } n}_{n\in\mathbb{N}},\ \underbrace{\text{existe}}_{\exists}\ \underbrace{\text{un número natural } m}_{m\in\mathbb{N}}\ \underbrace{\text{tal que}}_{/}$$

$$\underbrace{m \text{ es mayor que } n}_{m>n}$$

La afirmación es a todas luces cierta ya que tomado cualquier número natural, por ejemplo $n = 20$, siempre podemos encontrar (siempre existe) algún número superior, por ejemplo $m = 21$.

Podríamos haber planteado esta otra afirmación, muy similar a la primera,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists_1\ m \in \mathbb{N}/m > n.$$

Aquí hemos empleado el símbolo $\exists_1$ ('existe un único') en lugar de $\exists$. Del mismo modo que hemos hecho antes, es fácil interpretar el nuevo enunciado, pero también es sencillo darse cuenta de que es incorrecto ya que tomado un número natural, por ejemplo $n = 20$, no existe un único número superior sino muchos, por ejemplo $m = 21$, $m = 30$, etc.

0.2 Conjuntos

Definición 5. *Un conjunto es una colección de objetos a los cuales llamamos elementos del conjunto. Los conjuntos se designan generalmente mediante letras mayúsculas. Dado un conjunto C denotamos:*

$a \in C$ si a es elemento de C (a pertenece a C).

$a \notin C$ si a no es elemento de C (a no pertenece a C).

Ejemplo 6. $C =$ conjunto de capitales europeas. Entonces

Madrid, París$\in C$
Peking, Bagdad $\notin C$

Un conjunto queda determinado si se conocen cuales son sus elementos. Podemos indicar los elementos de un conjunto mediante dos métodos diferentes:

a) <u>Enumerando</u> los elementos del conjunto. Generalmente esto se hace encerrando entre llaves los elementos de dicho conjunto separados por comas.

Por ejemplo,

$$A = \{1, 8, 9\},$$

$$8 \in A,\ 9 \in A,\ 10 \notin A.$$

b) Indicando las <u>propiedades</u> que han de cumplir los elementos x que pertenecen al conjunto. La manera genérica para indicar un conjunto formado por aquellos elementos x tales que cumplen las propiedades $p_1, p_2, \ldots, p_k$ es

$$\{x \underbrace{\text{ tal que }}_{:\ /\ \text{ tq.}} x \text{ cumple } p_1,\ x \text{ cumple } p_2, \ldots,\ x \text{ cumple } p_k\}.$$

Por ejemplo,

$$C = \{x :\ x \text{ es Español},\ x \text{ es de sexo fenemino}\}.$$

Operaciones entre conjuntos

Definición 7. *Dados dos conjuntos A y B definimos:*

- *la unión de A y B, y la notamos $A \cup B$, como*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\},$$

- *la intersección de A y B, y la notamos $A \cap B$, como*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\},$$

- *la diferencia de A y B, y la notamos $A - B$, como*

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Relaciones entre conjuntos

Definición 8.

- *Decimos que A es un subconjunto de B o también que A está incluido en B, y lo notamos $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también elemento de B. Es decir, cuando se verifica que*

$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$

- *Decimos que el conjunto A es igual que el conjunto B, y lo notamos $A = B$, cuando todos los elementos de A están en B y todos los de B están en A. Es decir, cuando*

$$A \subseteq B \quad y \quad B \subseteq A.$$

- *Llamamos conjunto vacío, y lo notamos $\emptyset$, al conjunto que no posee ningún elemento. Dado cualquier conjunto, A, siempre se verifica que $\emptyset \subseteq A$.*

Ejemplos 9.

1) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

3) $\{1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 6\} = \{6, 5, 3, 1\}$.

De los ejemplos anteriores se deduce que en un conjunto no tiene importancia el orden ni las repeticiones de los elementos.

0.3 Conjuntos numéricos

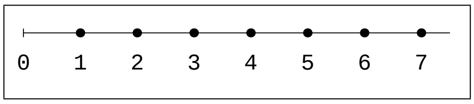
Son de fundamental importancia los siguientes conjuntos cuyos elementos son distintos tipos de números:

0.3.1 Conjunto de los número naturales, $\mathbb{N}$

El conjunto de los números naturales se denota $\mathbb{N}$ y está formado por todos los números enteros y positivos. Es decir,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, \}.$$

No consideramos, por tanto, al cero como un número natural.

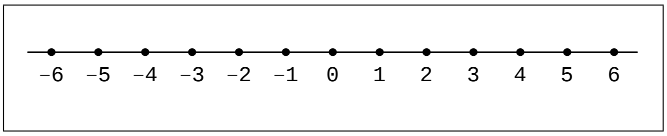


Representación decimal: Los números naturales son números sin decimales, no nulos y con signo positivo.

0.3.2 Conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros se denota como $\mathbb{Z}$ y está formado por todos los números enteros positivos, negativos o nulos. En tal caso,

$$\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}.$$



Representación decimal: Los números enteros son números sin decimales con signo positivo o negativo.

0.3.3 Conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$

El conjunto de los números racionales está formado por todos los números que se pueden obtener dividiendo dos números enteros. Es decir,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Por ejemplo tenemos que

$$\frac{3}{7},\ \frac{-9}{4},\ 5 = \frac{5}{1},\ -7 = \frac{-7}{1},\ 0 = \frac{0}{1}.$$

Es evidente, por tanto, que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

La representación gráfica de $\mathbb{Q}$ es más complicada que las que hemos visto antes para $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

Representación decimal: Los números racionales son numeros negativos o positivos en alguna de las siguientes situaciones:

1. no tienen cifras decimales,
2. tienen finitas cifras decimales,
3. tienen infinitas cifras decimales periódicas.

Tenemos los siguientes ejemplos:

- $1, 2, -4, -6 \in \mathbb{Q}$ son números racionales sin decimales.
- $3.456 = \frac{3456}{1000},\ 0.1123 = \frac{1123}{10000} \in \mathbb{Q}$ son números racionales con una cantidad finita de cifras decimales.

- $124.1633333\ldots = 124.16\overline{3} = \dfrac{37249}{3} \in \mathbb{Q}$ es un número racional con infinitas cifras decimales periódicas.

- $2.78490259402594025940259402594\ldots = 2.7849\overline{02594} = \dfrac{3431}{1232} \in \mathbb{Q}$ es un número racional con infinitas cifras decimales periódicas.

A la vista de la representación gráfica del conjunto $\mathbb{Q}$ cabe preguntarse si, una vez marcados todos los puntos de $\mathbb{Q}$, la recta queda completamente cubierta o si por el contrario, aún quedarán huecos sin cubrir.

0.3.4 El conjunto de los números irracionales, $\mathbb{I}$

Es posible demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es capaz de cubrir la recta completa. Existen puntos sobre la recta que no pertenecen a $\mathbb{Q}$. Estos puntos son los llamados números irracionales. El conjunto de todos los números irracionales se denota mediante

$$\mathbb{I} = \{\text{conjunto de los números irracionales}\}.$$

Representación decimal: Dado que los números de $\mathbb{I}$ no son racionales, su representación decimal estará caracterizada por el hecho de que poseen infinitas cifras decimales no periódicas.

Un ejemplo clásico de número racional es $\sqrt{2}$ ya que:

1. No es posible expresar $\sqrt{2}$ como una fracción de números enteros.

2. El número $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Otros ejemplos de números irracionales son

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \pi,\ e,$$

$$1.0100100010000100000100000001\ldots$$

En el último caso los puntos suspensivos indican que la expresión decimal continua de manera infinita siguiendo el mismo esquema (cada vez un cero más entre cada dos unos). Está claro que esta expresión decimal no es periódica.

0.3.5 El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$

El conjunto de los números reales se denota $\mathbb{R}$ y es la unión del conjunto de los números racionales con los iracionales,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Puesto que $\mathbb{I}$ está formado por los huecos que deja $\mathbb{Q}$ al ser representado, cuando unimos ambos conjuntos obtenemos la recta completa. La representación de $\mathbb{R}$ es la recta completa sin hueco alguno. Por este motivo, en ocasiones se denomina al conjunto $\mathbb{R}$ ‘recta real’.

Representación decimal: Los números reales tienen signo positivo o negativo y cualquier configuración de decimales, desde ninguno hasta infinitos periódicos o no periódicos.

Es fácil deducir de las definiciones de los conjuntos numéricos que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

El conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$

Ciertas ecuaciones no son verificadas por ningún número real. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2+1=0,$$
$$x^2+2x+2=0,$$
$$x^2-6x+11=0$$

carecen de solución en el sentido de que ningún número de $\mathbb{R}$ puede ser sustituido en ellas de forma que la igualdad resultante sea cierta. Es muy fácil verlo para la primera ya que la suma de números positivos no puede ser nunca cero salvo que todos ellos sean cero y para las dos últimas se deduce de la aplicación de la fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado. Sin embargo, en muchas situaciones que se plantean en las teorías matemáticas y en las aplicaciones científicas surge la necesidad de encontrar algo a lo que podamos llamar solución para ecuaciones como estas.

La clave para dar solución a este problema está en la ecuación $x^2+1=0$. Si podemos resolver esa ecuación, podremos resolver también cualquier otra ecuación algebraica.

En efecto, admitamos que es posible resolver la ecuación $x^2+1=0$ y llamemos a su solución i. Tendremos entonces que $i^2+1=0$ de donde deducimos que

$$i=\sqrt{-1}.$$

En realidad también podríamos haber tomado i como $-\sqrt{-1}$ pero la primera opción es la más sencilla. Una vez que aceptamos que existe i definido de este modo, podemos resolver las otras ecuaciones. Por ejemplo,

$$x^2-6x+11=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 11}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{8}\sqrt{-1}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{8}i}{2}=\begin{matrix}\frac{6+\sqrt{8}i}{2}\\ \frac{6-\sqrt{8}i}{2}\end{matrix}.$$

De esta forma, utilizando la constante i, hemos podido encontrar una expresión para las soluciones de $x^2-6x+11=0$.

Llamaremos a i constante o unidad imaginaria y a los números del tipo $a+bi$ que obtenemos resolviendo ecuaciones (que no tenían como solución a ningún número real) los llamaremos números complejos. El conjunto de todos los números complejos se denota mediante $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}=\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Llamaremos parte real del número complejo $a+bi$ al número real a y parte imaginaria al número real b. En general, es posible realizar con números complejos las mismas operaciones que con números reales (suma, producto, división, etc.) destaquemos aquí la definición de la exponencial compleja ya que es fundamental en muchas aplicaciones.

Definición 10. *Dado el número complejo $a+bi\in\mathbb{C}$,*

$$e^{a+bi}=e^a(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)).$$

Los números complejos se representan en un plano. Para representar el número complejo $a+bi$ representaremos en el plano el par (a,b) tal y como indicamos más tarde.

0.4 Producto cartesiano de conjuntos

Definición 11. *Dados dos conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano de A y B, y lo denotamos $A\times B$, al conjunto de todos los pares ordenados de elementos de A y B, es decir,*

$$A\times B=\{(a,b) : a\in A, b\in B\}.$$

Ejemplo 12. Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{\alpha, \beta\},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) : a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{\alpha, \beta\}\} \\ &= \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\} \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} A \times A &= \{(a, b) : a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \end{aligned}$$

Nota. Cuando estudiamos los conjuntos vimos que

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} \quad \text{o que} \quad \{1, 1\} = \{1\}.$$

En el ejemplo anterior hemos construido el conjunto $A \times A$. Dentro de este conjunto aparecen los elementos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Cabría preguntarse si podemos considerar que ambos son iguales (es decir, ¿$(1, 2) = (2, 1)$?) dado que los dos poseen los mismos elementos (el 1 y el 2). La respuesta es que $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son pares ordenados lo que implica que en ellos son relevantes los elementos que los componen, pero también el orden. Ambos tienen los mismos elementos pero en distinto orden así que $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Por otro lado la igualdad de conjuntos $\{1, 1\} = \{1\}$ no tiene sentido en el caso de pares ordenados ya que (1) ni siquiera es un par así que $(1, 1) \neq (1)$.

En general podemos afirmar que dados los pares (a_1, b_1) y (a_2, b_2),

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{array} \right. .$$

El concepto de producto cartesiano de dos conjuntos puede extenderse de la siguiente manera:

Definición 13.

- *Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, definimos su producto cartesiano, y lo notamos $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, como el conjunto de todas las k-uplas ordenadas de elementos de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, es decir,*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k\}.$$

- *Dado un conjunto A, definimos*

$$A^k = A \times \overset{k)}{\cdots} \times A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1, a_2, \ldots, a_k \in A\}.$$

0.4.1 Los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Ya hemos visto la definición del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y hemos comprobado que su representación es una recta completa en la que no aparece ningún hueco (recta real).

Dado que podemos realizar el producto cartesiano de un conjunto por si mismo, podremos construir los conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y en general $\mathbb{R}^n$. Todos ellos son de importancia fundamental en matemáticas, especialmente los dos primeros. Estudiémoslos más detenidamente.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (el plano real)

Sabemos que
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ son
$$(1, 2), (0, 0), (1.23, 6), (\sqrt{2}, \pi), \text{ etc.}$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ puede ser representado mediante un plano de manera que cada punto de dicho plano corresponde a un elemento de $\mathbb{R}^2$ y cada par de $\mathbb{R}^2$ representa un elemento del plano.

El conjunto $\mathbb{R}^3$ (el espacio real)

Sabemos que
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$
Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^3$ son
$$(1, 2, 1), (0, 0, 0), (1.23, 6, -4), (\sqrt{2}, \pi, -12), \text{ etc.}$$

El conjunto $\mathbb{R}^3$ puede ser representado mediante un espacio tridimensional de manera que cada punto de dicho espacio corresponde a un elemento de $\mathbb{R}^3$ y cada trío de $\mathbb{R}^3$ representa un elemento del espacio.

El conjunto $\mathbb{R}^n$

Sabemos que
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$
Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^n$ son
$$(1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4, (0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5, (1.23, 6, -4, 3, 2, 1.5) \in \mathbb{R}^6, \text{ etc.}$$

Los conjuntos $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$, no son fácilmente representables de forma visual. Sin embargo, poseen importantes interpretaciones de tipo físico y matemático.

Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son de la forma (a, b) y se denominan pares ordenados, los elementos de $\mathbb{R}^3$ son del tipo (a, b, c) y se denominan trios ordenados. Sin embargo, los elementos de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$, etc. no tienen en castellano una denominación clara. Nosotros los denominaremos uplas o n-uplas. Así por ejemplo

$$\begin{array}{lll}
(1, 2, 1, 1) & \text{es un elemento de } \mathbb{R}^4 & \Rightarrow \text{ es una 4-upla.} \\
(0, 0, 0, 0, 0) & \text{es un elemento de } \mathbb{R}^5 & \Rightarrow \text{ es una 5-upla.} \\
(1.23, 6, -4, 3, 2, 1.5) & \text{es un elemento de } \mathbb{R}^6 & \Rightarrow \text{ es una 6-upla.}
\end{array}$$

0.5 Aplicaciones

Definición 14. *Dados dos conjuntos A y B, llamamos aplicación de A hasta B a cualquier correspondencia, f, que asocia un único elemento de B a todo elemento de A y la notamos*
$$\begin{array}{rl} f: & A \to B \\ & a \mapsto f(a). \end{array}$$
Dada la aplicación $f : A \to B$, al único elemento de B que corresponde mediante f al elemento $a \in A$ lo llamamos imagen de a y lo notamos $f(a)$. Al conjunto A lo llamamos dominio de la aplicación f y a B conjunto final de f.

Dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son iguales cuando tienen el mismo dominio, tienen el mismo conjunto final y todos los elementos tienen las mismas imágenes. Es decir, cuando

$$\begin{cases} A = C, \\ B = D, \\ \forall x \in A = C, \ f(x) = g(x). \end{cases}$$

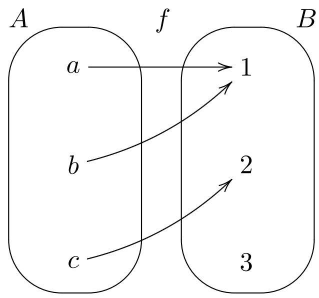
Para definir una aplicación hemos de indicar los siguientes elementos:

1. El nombre de la aplicación (generalmente f, g ó h).
2. Los conjuntos dominio y final de la aplicación (de donde sale y a donde llega la aplicación).
3. Cuál es la imagen de cada elemento. Para ello disponemos de dos métodos:
   a) **Por enumeración:** Indicando una a una la imagen de cada elemento.
   b) **Mediante una fórmula o propiedad:** Indicando la imagen de cada elemento mediante una ley general que usualmente será una fórmula matemática.

Ejemplos 15. **1)** Tomemos los conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Para definir una aplicación de A hasta B debemos indicar cuál es la imagen de cada elemento de A. Puesto que los conjuntos A y B tiene un número reducido de elementos, es posible definir una aplicación mediante un esquema de flechas que señalen cada imagen. Por ejemplo, podemos considerar la aplicación f dada mediante el esquema:



Observando el gráfico deducimos fácilmente que f es una aplicación del conjunto A hasta el B, abreviadamente denotamos esto escribiendo $f : A \to B$. Además observamos que:

- La flecha que sale de a llega a 1 por tanto, la imagen de a es 1 y tenemos entonces que $f(a) = 1$.
- La flecha que sale de b llega a 1 por tanto, la imagen de a es 1 y tenemos entonces que $f(b) = 1$.
- La flecha que sale de c llega a 2 por tanto, la imagen de a es 1 y tenemos entonces que $f(c) = 2$.

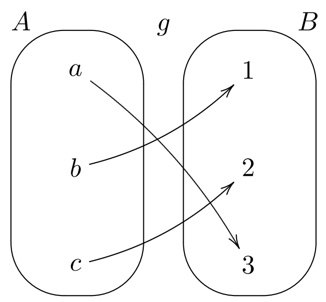
Toda esta información podemos escribirla resumidamente de la siguiente manera:

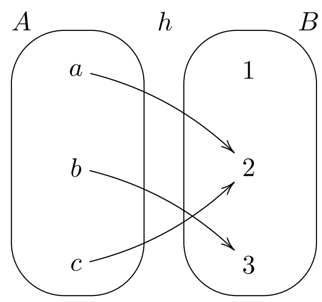
$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \mapsto & f(a) = 1 \\ & b & \mapsto & f(b) = 1 \\ & c & \mapsto & f(b) = 2 \end{array}$$

Tanto de esta última manera como a través del esquema gráfico, identificamos claramente cuál es el conjunto del que sale la aplicación (conjunto dominio), en este caso A, cuál es el conjunto al que llega (conjunto final), B, y las imágenes de cada elemento. Es decir, la aplicación f queda definida completamente.

El método gráfico es un método enumerativo de definición de aplicaciones ya que indica una a una la imagen de cada elemento utilizando para ello las flechas del esquema. Es evidente que si el conjunto A tuviera un número grande de elementos no sería posible representar todas las flechas necesarias y este método sería inútil.

Por supuesto, existe muchas otras aplicaciones del conjunto A en el B. Como ejemplo, podríamos mostrar estas otras dos a las que hemos llamado g y h:





Observando los esquemas es evidente que $g(a) = 3$, $g(c) = 2$ ó que $h(b) = 3$.

2) Los siguientes son ejemplos de aplicaciones definidas mediante una fórmula

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto g(n) = \sqrt{n} \end{array}, \qquad f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} \end{array}, \qquad h: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto h(z) = 3z+1 \end{array}.$$

En estos tres ejemplos, para escribir la fórmula que define la aplicación hemos empleado una variable auxiliar (n en el primer caso, x en el segundo y z en el tercero). La variable auxiliar puede ser modificada sin que varíe la aplicación.

Definición 16. *Dadas dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, llamamos composición de f y g, y la notamos $g \circ f$, a la aplicación*

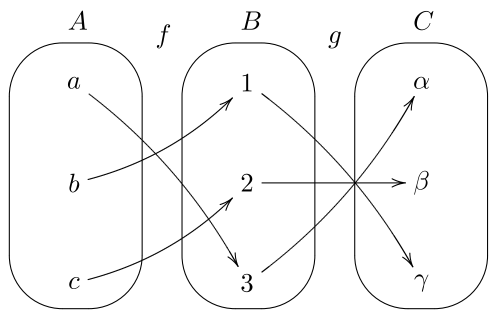
$$g \circ f: \begin{array}{l} A \to C \\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}.$$

Véase que no se puede realizar la composición de dos aplicaciones cualesquiera. Según la definición anterior es preciso que el conjunto final de la aplicación f sea igual que el dominio de la aplicación g.

Ejemplos 17. 1) Consideremos los conjuntos

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

y las aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definidas mediante los siguientes esquemas



Puesto que la aplicación f termina en el mismo conjunto (el conjunto B) en que comienza g, es posible encadenar ambas aplicaciones tal y como hemos hecho en el esquema. Observamos que podemos seguir las flechas de las aplicaciones f y g que parten del conjunto A a través del conjunto B hasta llegar a C. Ello nos lleva a preguntarnos si existirá una aplicación que vaya directamente de A a C y cuyas flechas tengan el mismo efecto que las de f y g aplicadas consecutivamente. Esa aplicación que hace el recorrido de f y g en un solo tramo es precisamente la composición $g \circ f$.

Según la **Definición 16**, la composición $g \circ f$ será la aplicación

$$\begin{array}{rl} g \circ f : & A \to C \\ & x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array} .$$

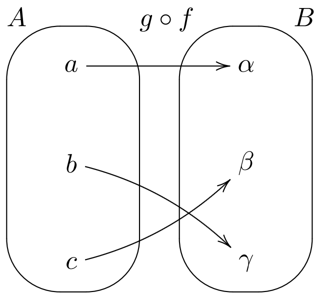
Por tanto, para calcular la imagen de cada elemento debemos aplicar la fórmula $g \circ f(x) = g(f(x))$ que a fin de cuentas indica que apliquemos primero f y luego g. Puesto que conocemos, mediante los diagramas de flechas, cómo funcionan las aplicaciones f y g es fácil que

- $g \circ f(a) = g(\underbrace{f(a)}_{=3}) = g(3) = \alpha$,
- $g \circ f(b) = g(\underbrace{f(b)}_{=1}) = g(1) = \gamma$,
- $g \circ f(c) = g(\underbrace{f(c)}_{=2}) = g(2) = \beta$.

En consecuencia, la aplicación compuesta $g \circ f$ será

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \longrightarrow & B \\ & a & \mapsto & g \circ f(a) = \alpha \\ & b & \mapsto & g \circ f(b) = \gamma \\ & c & \mapsto & g \circ f(b) = \beta \end{array}$$

El diagrama de flechas correspondiente es



Si observamos los diagramas de las aplicaciones f y g podemos comprobar que, efectivamente, las flechas de la composición $g \circ f$ son las que se obtienen siguiendo en un solo paso las de g tras las de f.

2) Dadas las aplicaciones

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(y) = \frac{y}{1+y^2} \end{array}$$

es posible calcular la composición $g \circ f$ dado que el conjunto final de f es igual al dominio de g. Debido a que f y g están definidas mediante fórmulas, no disponemos de diagramas de flechas para ellas y no será posible calcular su composición siguiendo las flechas. En este caso, para obtener la fórmula de la aplicación composición, deberemos emplear la formula definitoria de composición de la siguiente manera,

$$\begin{array}{c} g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{3x+2}{1+(3x+2)^2} \end{array} .$$

0.5.1 Clasificación de aplicaciones

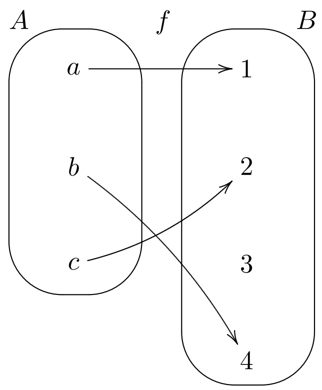
Podemos distinguir los siguientes tipos de aplicaciones:

Aplicaciones inyectivas

Definición 18. *Una aplicación, $f : A \to B$ se dice que es inyectiva si cada elemento de B es la imagen de a lo sumo un elemento de A.*

Como consecuencia de la definición, en el diagrama de flechas de una aplicación inyectiva, a cada elemento del conjunto final puede llegar una o ninguna flecha.

Ejemplo 19. La aplicación



es inyectiva ya que a cada elemento del conjunto final B llega una o ninguna flecha.

En el ejemplo anterior, dado que los conjuntos A y B tienen un número reducido de elementos, deducimos que f es inyectiva observando directamente el diagrama de flechas. En cambio, si el número de elementos en juego fuera mayor y la aplicación f estuviera definida mediante una fórmula, no dispondríamos del diagrama gráfico y necesitaría algún otro tipo de argumento para determinar si la aplicación f es inyectiva.

Con objeto de disponer de una técnica alternativa para el estudio de la inyectividad de una aplicación, realizaremos el siguiente razonamiento: si $f : A \to B$ es inyectiva y para algunos elementos $a, b \in A$ se cumple que $f(a) = f(b)$, si tuviéramos $a \neq b$ entonces un solo elemento de B sería imagen de dos elementos diferentes de A (a un elemento de B llegarían dos flechas distintas, las que salen de a y de b). Concluimos que forzosamente, siempre que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. Es decir, tenemos la siguiente definición alternativa de aplicación inyectiva:

Propiedad 20. *La aplicación $f : A \to B$ es inyectiva si y solamente si se cumple que*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Ejemplos 21.

1) Estudiemos si la aplicación $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 2 \end{array}$ es inyectiva.

Para ello, tomemos dos elementos cualesquiera del dominio $x, y \in \mathbb{R}$ y supongamos que $f(x) = f(y)$. Entonces, si utilizamos la definición de f,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 2 = 3y + 2 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

En resumidas cuentas tenemos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Es suficiente aplicar la Propiedad 20 para llegar a la conclusión de que f es inyectiva.

2) Estudiar si la aplicación $\begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{array}$ es inyectiva.

Seguiremos el mismo esquema del ejemplo anterior. Tomamos como antes $x, y \in \mathbb{R}$ y suponemos que $g(x) = g(y)$. Entonces,

$$g(x) = g(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y.$$

Es decir, si $g(x) = g(y)$ no necesariamente $x = y$ ya que podríamos tener $x = -y$. Por ejemplo $g(2) = 4 = g(-2)$ pero $2 \neq -2$ y la Propiedad 20 no se cumple. La aplicación g no es inyectiva.

Aplicaciones sobreyectivas

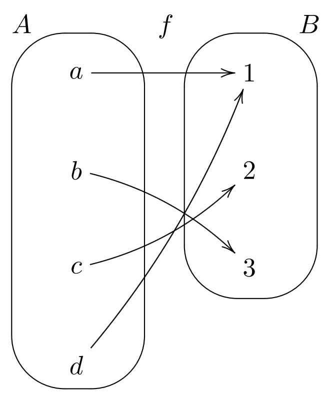
Definición 22. *Una aplicación $f : A \to B$ se dice que es sobreyectiva si cada elemento de B es imagen de al menos un elemento de A. Es decir,*

$$\forall b \in B,\ \exists\ a \in A \ \textit{t.q.}\ f(a) = b.$$

De la definición anterior se desprende que una aplicación es sobreyectiva cuando en el diagrama de la aplicación se cumple que a cada elemento del conjunto final llega una o más flechas.

El comentario anterior hace sencillo identificar una aplicación sobreyectiva a partir de su diagrama de flechas. En el caso de una aplicación definida mediante una fórmula será preciso utilizar con mayor precisión la Definición 22.

Ejemplos 23. **1)** La aplicación



es sobreyectiva ya que a cada elemento del conjunto final, B, llega por lo menos una flecha.

2) Comprobemos si la aplicación $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 2 \end{array}$ es sobreyectiva.

En este caso, tenemos una aplicación definida mediante una fórmula y no podemos examinar el diagrama de flechas como en el ejemplo anterior. Ahora debemos emplear de forma más precisa la **Definición 22**. Siguiendo la misma notación de dicha definición, en nuestro caso tenemos que $A = B = \mathbb{R}$ y hemos de comprobar que

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists\ a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(a) = b.$$

Tomemos entonces un elemento $b \in \mathbb{R}$ arbitrario y veamos si es posible encontrar el número $a \in \mathbb{R}$ que según la afirmación anterior debería existir. Para encontrar a solo conocemos que debe cumplir $f(a) = b$. Empleando esta igualdad tenemos que,

$$f(a) = b \Rightarrow 3a + 2 = b \Rightarrow a = \frac{b-2}{3}.$$

Por tanto, una vez conocido b hemos encontrado una fórmula para calcular a. Esta fórmula se puede aplicar fácilmente para cualquier valor de b y es evidente que

$$f(a) = f(\frac{b-2}{3}) = 3\frac{b-2}{3} + 2 = b.$$

Queda demostrado que f es sobreyectiva.

3) Veamos si $\begin{array}{c} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{array}$ es sobreyectiva.

Nuevamente hemos de comprobar que

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists\ a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(a) = b.$$

Razonando como antes, hemos de calcular a sabiendo que $f(a) = b$. Para ello,

$$f(a) = b \Rightarrow a^2 = b.$$

Ahora bien, de la igualdad $a^2 = b$ no se puede despejar a cuando b es un número negativo. Por tanto si $b < 0$ entonces no es posible calcular a. Por ejemplo, si $b = -4$, no existe ningún a tal que $a^2 = -4$ (es decir, tal que $f(a) = -4$) y como consecuencia -4 no es la imagen de ningún elemento $a \in \mathbb{R}$ (a -4 no le llega ninguna flecha). Por tanto, la aplicación no es sobreyectiva.

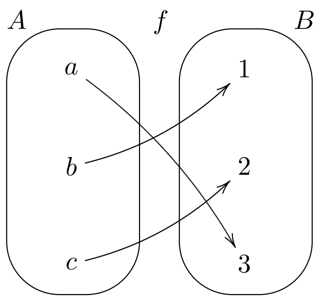
Aplicaciones biyectivas

Definición 24. *Una aplicación $f : A \to B$ se dice que es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Si recordamos lo dicho para aplicaciones inyectivas y sobreyectivas en cuanto a los correspondientes diagramas, podemos afirmar que la aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si y solamente si en su diagrama de flechas a cada elemento de B llega una y solamente una flecha.

Esto último permite identificar fácilmente una aplicación biyectiva mediante su diagrama. En el caso de que la aplicación venga dada mediante una fórmula habremos de demostrar separadamente que es inyectiva y sobreyectiva tal y como hemos hecho en los dos apartados anteriores.

Ejemplos 25.
1) La aplicación f, cuyo diagrama aparece abajo, es biyectiva ya que a cada elemento del conjunto final, B, llega exactamente una flecha.



2) Comprobar si la aplicación $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3x+2 \end{array}$ es biyectiva.

Puesto que la aplicación está dada mediante una fórmula, hemos de demostrar por un lado que es inyectiva y por otro que es sobreyectiva. Sin embargo, ambas cosas ya las hemos hecho para esta aplicación en ejemplos anteriores y deducimos por tanto que es biyectiva.

0.5.2 Aplicación inversa

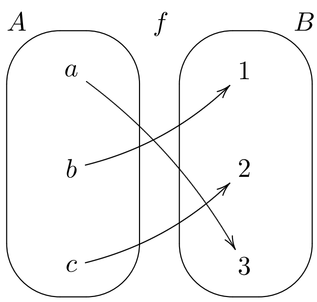
Definición 26. *Dada una aplicación biyectiva $f : A \to B$, llamamos aplicación inversa de f, y la notamos f^{-1}, a la aplicación*

$$\begin{array}{rl} f^{-1}: & B \to A \\ & y \mapsto f^{-1}(y) = x \ tq. \ f(x) = y \end{array}.$$

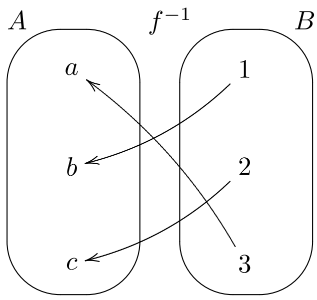
Véase que, según la definición anterior, solamente es posible calcular la inversa de una aplicación biyectiva.

En resumidas cuentas, la aplicación inversa de f es otra aplicación que tiene el efecto contrario al de f. Así, si f va desde A hasta B ($f : A \to B$) la aplicación inversa irá desde B hasta A ($f^{-1} : B \to A$), si f lleva x en y (es decir, $f(x) = y$) entonces f^{-1} llevará y en x (o lo que es lo mismo, $f^{-1}(y) = x$).

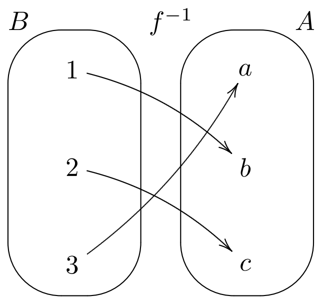
Ejemplos 27.
1) La aplicación f del siguiente diagrama es biyectiva



En tal caso podemos calcular su inversa. Para ello debemos tener en cuenta que las flechas de f^{-1} deben tener el recorrido contrario a las de f. Por tanto, es fácil, a partir del diagrama de flechas, obtener la función inversa, ya que basta con cambiar el sentido de la flecha de la aplicación inicial f,



o lo que es lo mismo, poniendo los conjunto inicial y final de f^{-1} en el orden habitual,



2) La aplicación $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3x+2 \end{array}$ es biyectiva tal y como hemos visto en ejemplos anteriores. Podemos por tanto calcular su aplicación inversa.

Nuevamente, al estar la aplicación definida mediante una fórmula, carecemos de diagrama de flechas y debemos recurrir a la definición para realizar el cálculo de la inversa. Si empleamos la definición tenemos que

$$\begin{array}{rl} f^{-1}: & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & y\mapsto f^{-1}(y)=x \text{ tq. } f(x)=y \end{array}.$$

Sin embargo, nos gustaría disponer de una fórmula explícita para $f^{-1}(y)$. Ahora bien, sabemos que $f^{-1}(y)=x$ siendo x el número real que verifica $f(x)=y$. Puesto que conocemos como funciona f, tenemos que

$$f(x)=y\Rightarrow 3x+2=y\Rightarrow x=\frac{y-2}{3}.$$

La fórmula encontrada para calcular x nos permite dar la siguiente escritura explícita de la inversa:

$$\begin{array}{c} f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f^{-1}(y)=\frac{y-2}{3} \end{array}.$$

Todo este proceso puede resumirse de la siguiente manera. Si la fórmula de la aplicación es $f(x)=3x+2$ hemos escrito y en lugar de $f(x)$ obteniendo $y=3x+2$. Entonces, basta despejar x en esta ecuación ($x=\frac{y-2}{3}$) para obtener la fórmula de la aplicación inversa.

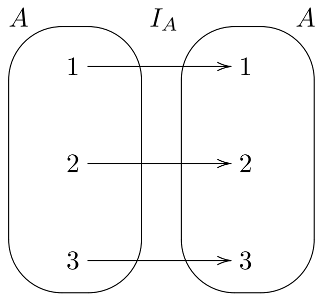
Dado un conjunto cualquiera, el ejemplo más sencillo de aplicación biyectiva lo constituye la aplicación identidad que definimos a continuación.

Definición 28. *Dado un conjunto cualquiera A, llamamos aplicación identidad en A, y la notamos I_A, a la aplicación*

$$\begin{array}{c} I_A:A\to A \\ I_A(x)=x \end{array}.$$

Ejemplos 29.

1) La aplicación identidad del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ es



Es evidente que $I_A(1) = 1$, $I_A(2) = 2$ y $I_A(3) = 3$.

2) La aplicación identidad del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es

$$\begin{array}{c} I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ I_{\mathbb{R}}(x) = x \end{array}.$$