Tema 2. Ejercicios propuestos

1.- ✍ Calcular $\iint_D x^2y^2dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2,\ x \leq y \leq 4x\}$.

2.- ✍ Calcular $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2y, x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}$.

3.- ✍ Sea $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1-x}{2} \leq y \leq 1-x^2\right\}$.

a) Calcular la integral $\iint_R x\,dxdy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

4.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x\}$.

a) Calcular la integral $\iint_R (x+y)dxdy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

5.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

a) Calcular la integral $\iint_R x\,dxdy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

6.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 1,\ 2y-2 \leq x \leq y^2\}$.

a) Calcular la integral $\iint_R (x+y)dxdy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

7.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ y \geq 2x-1,\ y \leq 2-x^2\}$.

a) Calcular la integral $\iint_R 2xy\,dxdy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

8.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ y \leq x+2, \ y \leq 4-x^2\}$.

a) Calcular la integral $\displaystyle\iint_R x\,dx\,dy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

9.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y-x+2 \geq 0, \ x^2+y \leq 4\}$.

a) Calcular la integral $\displaystyle\iint_R 2xy\,dx\,dy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

10.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x, \ x+y \leq 2, \ y \leq 2x\}$.

a) Calcular la integral $\displaystyle\iint_R x\,dx\,dy$.

b) Resolver la integral anterior, intercambiando el orden de integración.

11.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4, \ x \geq y, \ x \geq 0\}$.

a) Calcular la integral $\displaystyle\iint_R xy\,dx\,dy$.

b) Resolver la integral anterior intercambiando el orden de integración.

2.2) ✍ Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}, \ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$. Calcular

$$\iint_D x\,dx\,dy\,dz$$

como una integral iterada, integrando primero respecto de x, después respecto de y y, finalmente, respecto de z.

12.- ✍ Calcular

$$\iiint_W z\,dx\,dy\,dz$$

siendo W la región del primer octante interior a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y exterior al cilindro $x^2+y^2 = 1$. (octante means that x>=0, y>=0, z>=0)

13.- ✍ Calcular

$$\iiint_W z\,dx\,dy\,dz,$$

siendo $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq z^2, \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$.

14.- Calcular

$$\iint_D \frac{1}{x^3}\,dx\,dy,$$

donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, x^2 \leq y \leq 4x^2\right\}$.

15.- ✍ Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x+y \leq 2,\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcular la integral

$$\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

mediante el cambio de variable $u = x+y$, $v = x-y$.
Observación: Se trata de una transformación lineal.

16.- ✍ Resolver la integral

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y)dy$$

haciendo el cambio de variable $u = 2x-y$, $v = -x+y$.
Observación: Se trata de una transformación lineal.

17.- ✍ Resolver la integral

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x+y)dy$$

haciendo el cambio de variable $u = x$, $v = y/x$.

18.- ✍ Sea D la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y las circunferencias $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Resolver la integral

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\,dx\,dy.$$

a) Haciendo un cambio a coordenadas polares.
b) Haciendo el cambio de variable $u = x^2+y^2$, $v = y/x$.

19.- ✍ Calcular, mediante un apropiado cambio de variable, la integral

$$\iint_D (x+y)dx\,dy,$$

siendo D la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x+y = 2$, $x+y = 6$.

20.- ✍Sea D la región limitada por las rectas $y = x$, $y = x+1$, $y = 2x-2$ e $y = 2x$. Resolver la integral

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

mediante un apropiado cambio de variable.

21.- ✍ Sea D la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y las circunferencias $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Resolver la integral

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\,dx\,dy,$$

a) Haciendo un cambio a coordenadas polares.
b) Haciendo el cambio de variable $u = x^2 + y^2$, $v = y/x$.

22.- ✍ Sea R el recinto limitado por las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2$. Resolver la integral

$$\iint_R xy\,dx\,dy,$$

mediante un apropiado cambio de variable.

23.- ✍ Sea R el recinto del primer cuadrante limitado por las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 4$. Resolver la integral

$$\iint_R \frac{y^2}{x}\,dx\,dy,$$

mediante un apropiado cambio de variable.

24.- ✍ Calcular el área del recinto limitado por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 1$ y $x + y = 2$, mediante el cambio de variable $u = y/x$, $v = x + y$.

25.- ✍ Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0,\ y \geq x,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la región D alrededor del eje OY.

26.- ✍ Sea R el recinto en el primer cuadrante limitado las rectas $y = 0$, $x + y = 1$ y la parábola $y = x^2$. Calcular el volumen de revolución obtenido al girar la región R alrededor del eje OY.

27.- ✍ Sea R el recinto limitado las rectas $x = 0$, $x + y = 1$ y la parábola $y = x^2$. Calcular el volumen de revolución obtenido al girar la región R alrededor del eje OY.

28.- ✍ Sea R el recinto limitado en el primer cuadrante por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $x = 0$ e $y = 0$. Calcular el volumen de revolución obtenido al girar la región R alrededor del eje OY.

29.- ✍ Sea R el recinto limitado en el primer cuadrante por las rectas $x + y = 1$ y $x + y = 2$. Calcular el volumen de revolución obtenido al girar la región R alrededor del eje OY.

30.- ✍ Calcular el volumen limitado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y el plano $y + z = 9$ en el primer octante.

31.- ✍ Calcular el volumen limitado por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 1$ en el primer octante.

32.- ✍ Calcular el volumen limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y = 4$ en el primer octante.

33.- ✍ Calcular el volumen limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $x + y = 8$ en el primer octante.

34.- ✍ Calcular el volumen del recinto W limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $y + z = 1$ que contiene al punto $(0,0,1/2)$ en su interior.

35.- ✍ Calcular el volumen limitado por los planos $y + z = 1$ y $x + 2y = 1$ en el primer octante.

36.- ✍ Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

37.- Calcular el volumen del conjunto W dado por

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

38.- Calcular el volumen del conjunto W dado por

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leq 2y\right\}.$$

39.- ✍ Calcular el volumen del recinto limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

40.- ✍ Calcular el volumen del sólido limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la semiesfera $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ que contiene al punto (0, 0, 1) en su interior.

a) Haciendo un cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

b) Haciendo un cambio de variable a coordenadas esféricas.

41.- ✍ Calcular el volumen del sólido W limitado por el cilindro $z = 4 - y^2$ y el plano $y = 2x$ en el primer octante.

42.- ✍ Calcular el volumen del sólido $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 1\}$

a) Haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas.

b) Haciendo un cambio a coordenadas esféricas.