2.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 Calcular la integral

$$I = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 y\,\mathrm{d}y,$$

intercambiando el orden de integración.

SOLUCIÓN: El recinto de integración D (ver figura 2.21) se puede considderar como un recinto de Tipo I dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\right\},$$

o como de Tipo II expresado de la siguiente forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}.$$

Por tanto,

$$I = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

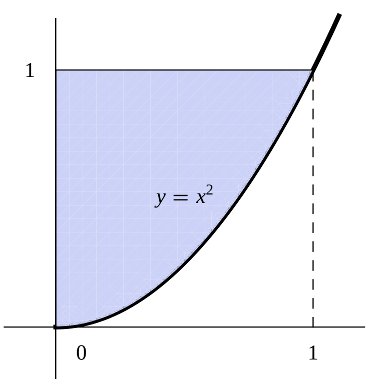
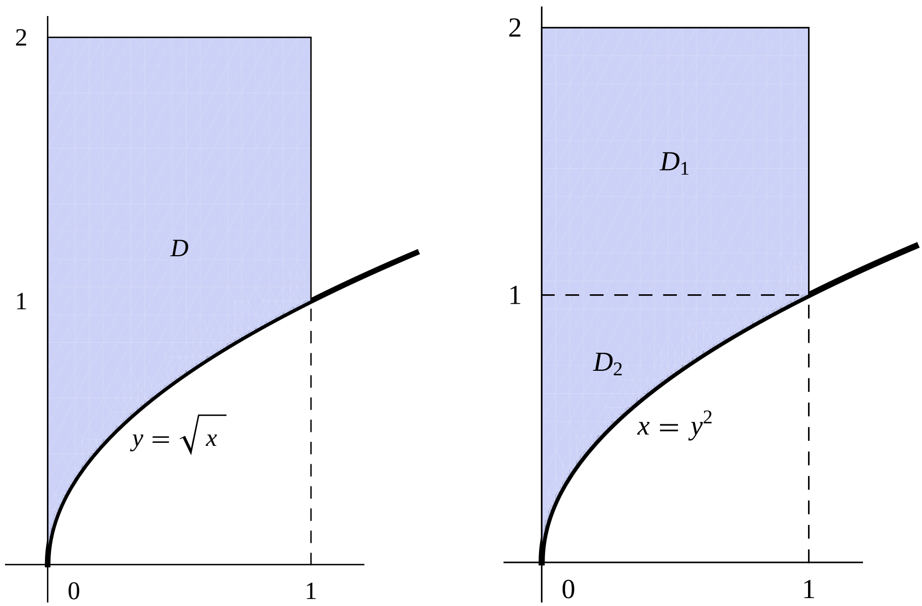


Figura 2.21: Representación gráfica del recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$.



(a) Representación gráfica del recinto D. (b) Descomposición en recintos de Tipo II.

Figura 2.22: Recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$.

Ejercicio 2.2 Intercambiar el orden de integración en la integral

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

SOLUCIÓN: El recinto de integración D (ver figura 2.22(a)) es el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\}.$$

Observamos que el recinto D (ver figura 2.22(b) puede descomponerse en la forma $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 es el recinto rectangular

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$$

y D_2 es un recinto de Tipo II, dado por

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Además, $\mathrm{int}(D_1 \cap D_2) = \emptyset$. Por tanto,

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Ejercicio 2.3 Calcular

$$I = \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \int_0^{\log x} \sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y.$$

SOLUCIÓN: El recinto de integración viene dado por (ver figura 2.23)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le \log x\right\}.$$

Intercambiando el orden de integración se tiene que D también puede escribirse como un recinto de Tipo II:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \log 2,\, e^y \le x \le 2\right\}.$$

Por tanto,

$$I = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y \int_{e^y}^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(e^y - \frac{e^{2y}}{2}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\log 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^{\log 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_1^2 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}\left[\left(1+e^{2y}\right)^{3/2}\right]_0^{\log 2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_1^2 - \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$$
$$= \frac{1}{6}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \log\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}}\right). \qquad \square$$

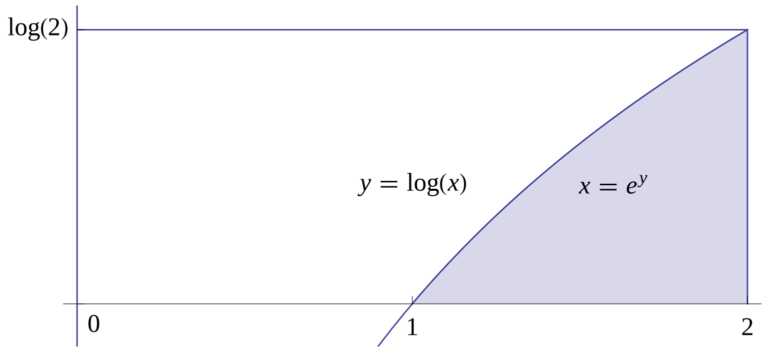


Figura 2.23: Región del plano limitada por la curva $y = \log x$ y el eje OY en el intervalo $[1,2]$.

Ejercicio 2.4 Calcular

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde D es la región del plano limitada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN: Hacemos el cambio de variables

$$\frac{x}{a} = \rho\cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \rho\operatorname{sen}\theta. \tag{2.3}$$

Mediante este cambio de variables la región

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

se transforma en la región

$$D^* = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.\}$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = ab\rho$. Por tanto,

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} ab\rho(1-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\pi ab. \qquad \square$$

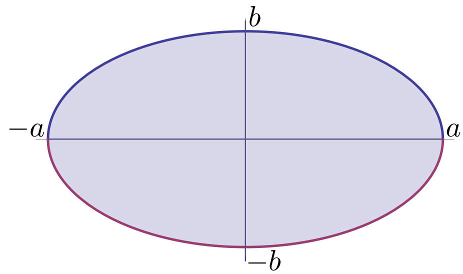


Figura 2.24: Recinto limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Observación 2.6.1 En realidad el cambio de variables dado en (2.3) puede entenderse como dos cambios de variables consecutivos:

1. El cambio de variables

$$u=\frac{x}{a}, \qquad v=\frac{y}{b},$$

transforma la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en la circunferencia $u^2+v^2=1$, siendo

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ab.$$

2. Ahora podemos hacer el cambio a coordenadas polares

$$u=\rho\cos\theta, \qquad v=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Ejercicio 2.5 Calcular el volumen de la esfera de radio R haciendo un cambio a coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN: Consideremos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, cuya ecuación vendrá dada por

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la integral

$$V=\iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

siendo $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$. Haciendo el cambio de variables a coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

la región W se transforma en

$$W^* = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$. Por tanto,

$$V = \iiint_{W^*} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{R}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \square$$

Ejercicio 2.6 Calcular el volumen del recinto limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

SOLUCIÓN: Hacemos el cambio de variables

$$\frac{x}{a} = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \frac{y}{b} = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \frac{z}{c} = \rho\cos\phi. \tag{2.4}$$

Mediante este nuevo cambio de variables, la región (representada en la figura 2.25)

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

se transforma en la región

$$W^* = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Además,

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\rho,\theta,\phi)}\right| = abc\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} abc\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{1}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned} \qquad \square$$

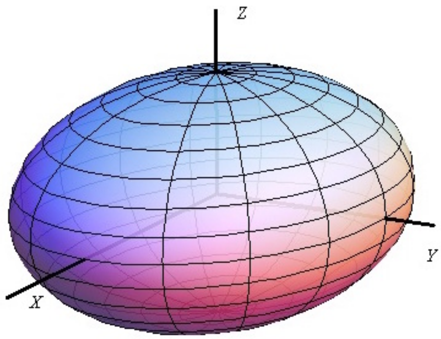


Figura 2.25: Recinto limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Observación 2.6.2 Al igual que en la observación 2.6.1, el cambio de variables (2.4) puede entenderse como dos cambios de variable consecutivos:

1. El cambio de variables

$$u=\frac{x}{a}, \qquad v=\frac{y}{b}, \qquad w=\frac{z}{c}$$

transforma el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en la esfera $u^2+v^2+w^2=1$, siendo

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=abc.$$

2. Ahora podemos hacer el cambio a coordenadas esféricas

$$u=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad v=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad w=\rho\cos\phi.$$

Ejercicio 2.7 Calcular el volumen limitado por el plano $z=0$, el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+(y-1)^2=1$.

SOLUCIÓN: El volumen dendrá dado por

$$V=\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$. Desarrollando la ecuación de la circunferencia $x^2+(y-1)^2=1$ se tiene

$$x^2+y^2-2y=0.$$

Por tanto, aplicando el cambio a coordenadas polares

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

en la expresión anterior, se tiene que $\rho^2-2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta=0$, luego la circunferencia en coordenadas polares viene dada por $\rho=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde $\theta\in[0,\pi]$ (ver la figura 2.26). Por tanto, la región D se transforma en

$$D^*=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0\le\theta\le\pi\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\rho$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D^*}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\ &=4\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4\,\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$ □

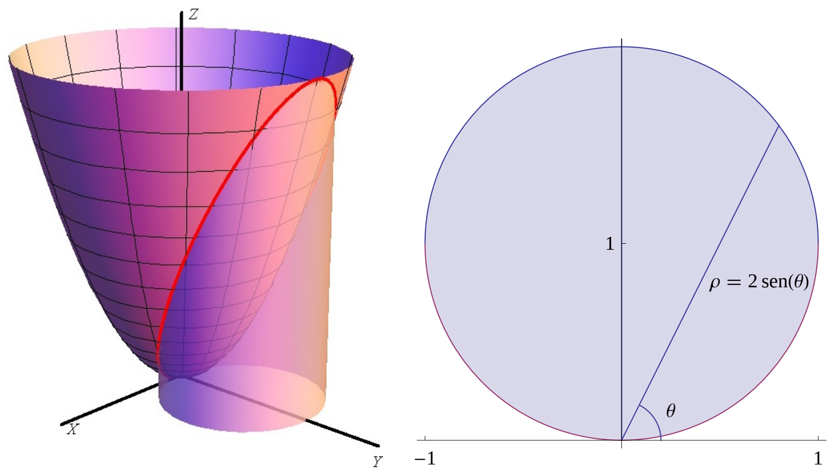


Figura 2.26: Recinto limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+(y-1)^2=1$. Recinto de integración sobre el plano XY.

Ejercicio 2.8 Calcular el volumen limitado por la parte común de los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$ situada en el primer octante.

SOLUCIÓN: El volumen vendrá dado por (ver figura 2.27)

$$V=\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$. Haciendo el cambio a coordenadas polares $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, la región D se transforma en

$$D^*=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le a, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\rho$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
V&=\iint_{D^*}\rho\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\rho\\
&=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{a^3}{3}\left[-\cos\theta+\frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}a^3.
\end{aligned}$$

□

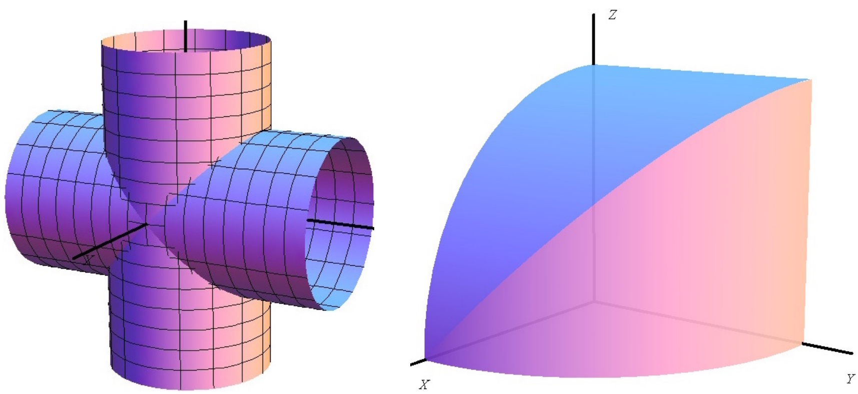


Figura 2.27: Intersección de los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $y^2+z^2=a^2$.

Ejercicio 2.9 Calcular el volumen del cuerpo limitado por la semiesfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=a^2$, con $z\geq 0$, el cilindro $\rho = a\cos\theta$ y el plano $z=0$.

SOLUCIÓN: El cilindro $\rho = a\cos\theta$ viene dado en coordenadas polares. Para obtener sus coordenadas cartesianas, multiplicamos a ambos lados de la igualdad por ρ, es decir, $\rho^2 = a\rho\cos\theta$. Teniendo en cuenta que $x^2+y^2=\rho^2$ y $x=\rho\cos\theta$ se tiene que

$$x^2+y^2=ax.$$

Por último, completando cuadrados, el cilindro viene dado por

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Se trata por tanto del cilindro que tiene por base la circunferencia situada sobre el plano $z=0$, de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$. El volumen vendrá dado por

$$V=\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

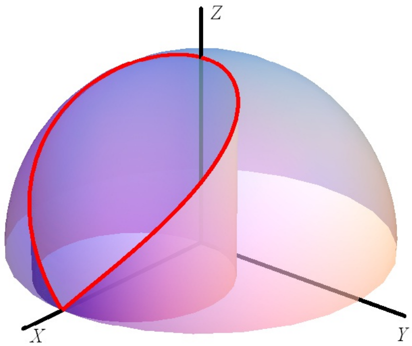
donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{a^2}{4}\right\}$ es la región del plano limitada por la circunferencia. Cambiando a coordenadas polares, D se transforma en (ver figura 2.28(b))

$$D^*=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2:0\leq\rho\leq a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}.$$

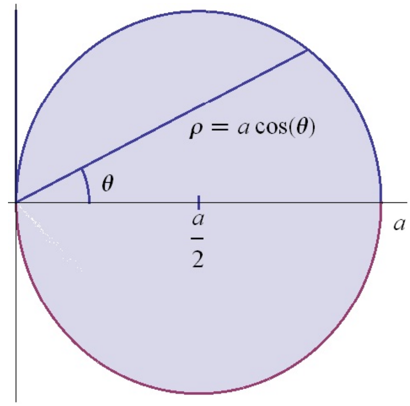
Además, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\rho$. Por tanto,

$$\begin{aligned}V&=\iint_{D^*}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\\&=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(a^2-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}^3\theta-1\right)=\frac{a^3}{3}\pi.\end{aligned}$$ □

Ejercicio 2.10 Calcular $\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siendo D la región limitada por las hipérbolas $xy=1$ y $xy=2$ y las rectas $y=x$ e $y=4x$, en el primer cuadrante.



(a) Intersección de la semiesfera y el cilindro.



(b) Región de integración en el plano XY.

Figura 2.28: Intersección de $x^2+y^2+z^2=a^2$ con $z \geq 0$ y el cilindro $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

SOLUCIÓN: La región D (ver figura 2.29) es el conjunto

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2,\ x \leq y \leq 4x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\right\}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x},$$

la región D se transforma en la región

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2v}.$$

Por tanto,

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} u^2\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 u^2\,\mathrm{d}u \int_1^4 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{7}{3}\log 2. \qquad \square$$

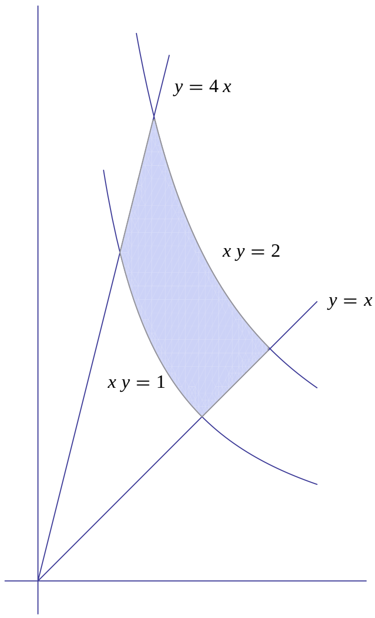


Figura 2.29: Región limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4x$.

Ejercicio 2.11 Sea D la región limitada por las parábolas $x^2 = a^3y$, $x^2 = b^3y$, $y^2 = c^3x$, $y^2 = d^3x$ con $a < b$ y $c < d$. Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la región D alrededor del eje OY.

SOLUCIÓN: Puesto que la región D no atraviesa el eje OY (ver figura 2.30), por el teorema de Guldin, el volumen de la superficie de revolución vendrá dado por

$$V = 2\pi \iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Por otra parte, la región D es el conjunto de puntos (ver figura 2.30)

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^3y \le x^2 \le b^3y,\ c^3x \le y^2 \le d^3x\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^3 \le \frac{x^2}{y} \le b^3,\ c^3 \le \frac{y^2}{x} \le d^3\right\}. \end{aligned}$$

Esto nos sugiere realizar el cambio de variables

$$u = \frac{x^2}{y}, \qquad v = \frac{y^2}{x}, \tag{2.5}$$

que transforma la región D en la región

$$D^* = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : a^3 \leq u \leq b^3, c^3 \leq v \leq d^3\right\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3}.$$

Observemos que de (2.5) se tiene $u^2v = x^3$, luego $x = u^{2/3}v^{1/3}$. Así,

$$V = 2\pi \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint_{D^*} u^{2/3}v^{1/3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2\pi}{3}\int_{a^3}^{b^3} u^{2/3}\,\mathrm{d}u \int_{c^3}^{d^3} v^{1/3}\,\mathrm{d}v$$
$$= \frac{3\pi}{10}(b^5 - a^5)(d^4 - c^4). \qquad \square$$

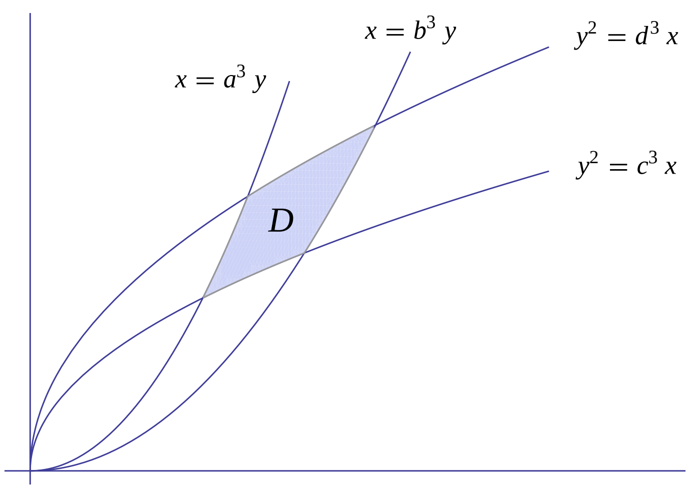


Figura 2.30: Región del plano limitada por las parábolas $x^2 = a^3y$, $x^2 = b^3y$, $y^2 = c^3x$, $y^2 = d^3x$.

Ejercicio 2.12 Calcular la integral

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde R es la región comprendida por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$.

SOLUCIÓN: La región R es el conjunto de puntos (ver figura 2.31)

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x+y\le 4,\ -1\le x-y\le 1\right\},$$

lo que sugiere el cambio de variables

$$u=x+y, \qquad v=x-y,$$

que transforma el recinto R en el recinto

$$R^*=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 1\le u\le 4,\ -1\le v\le 1\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{R^*} ue^v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^4 u^2\,\mathrm{d}u\int_{-1}^1 e^v\,\mathrm{d}v=\frac{21}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).\ \square$$

Ejercicio 2.13 Calcular la integral

$$\iint_R x^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde R es la región limitada por las parábolas $y=x^2$, $y=2x^2$, $y^2=x$ e $y^2=3x$.

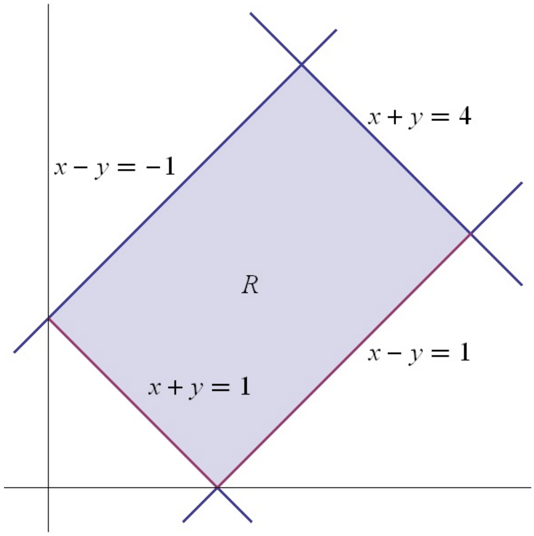


Figura 2.31: Región del plano limitada por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$.

SOLUCIÓN: La región R (ver figura 2.32) es el conjunto de puntos

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 2x^2,\, x\le y^2\le 3x\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le\frac{y}{x^2}\le 2,\, 1\le\frac{y^2}{x}\le 3\right\},$$

lo que sugiere el cambio de variables

$$u=\frac{y}{x^2},\qquad v=\frac{y^2}{x},$$

que transforma el recinto R en el recinto

$$R^*=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 1\le u\le 2,\, 1\le v\le 3\right\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}=-\frac{3y^2}{x^4}=-3u^2\neq 0\Rightarrow\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{3u^2}.$$

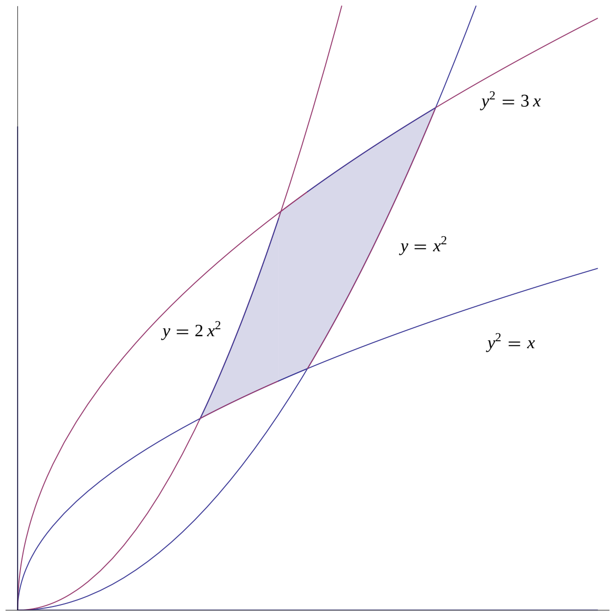


Figura 2.32: Región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y^2 = x$ e $y^2 = 3x$.

Por otra parte,

$$\frac{u^2}{v} = \frac{y^2}{x^4}\frac{x}{y^2} = x^{-3}.$$

Por tanto,

$$\iint_R x^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R^*} \frac{u^2}{v}\frac{1}{3u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_1^2 \mathrm{d}u \int_1^3 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\log 3. \qquad \square$$

Ejercicio 2.14 Realizar en cada caso una representación de la región D y un cambio de variables que la convierta en un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

a) D es la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, situada en el primer cuadrante.

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 \leq 0\}$.

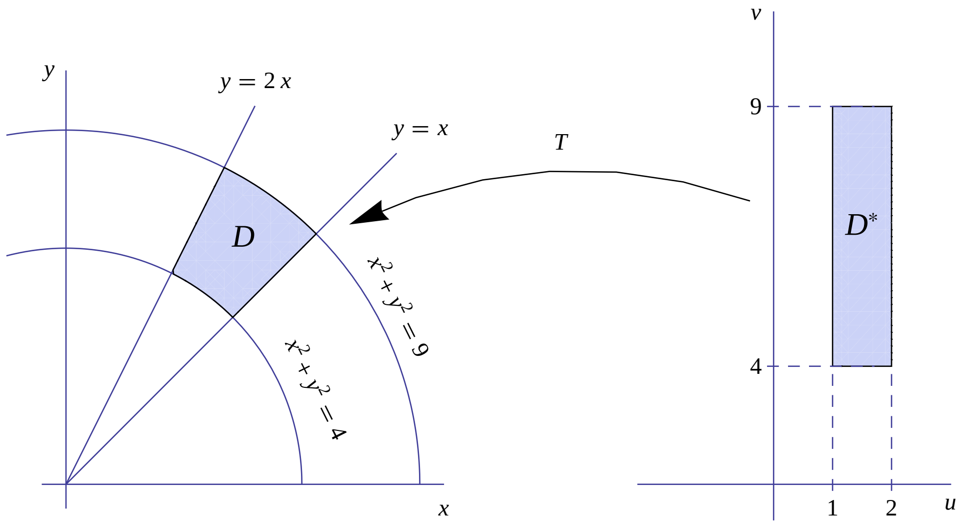


Figura 2.33: Región del plano limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCIÓN:

a) La región D puede escribirse como

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2,\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\},$$

lo que sugiere el cambio de variables

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = x^2 + y^2,$$

que transforma el dominio D en el dominio D^* (ver figura 2.33) dado por

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2,\, 4 \leq v \leq 9\}.$$

b) En primer lugar, observemos que

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1.$$

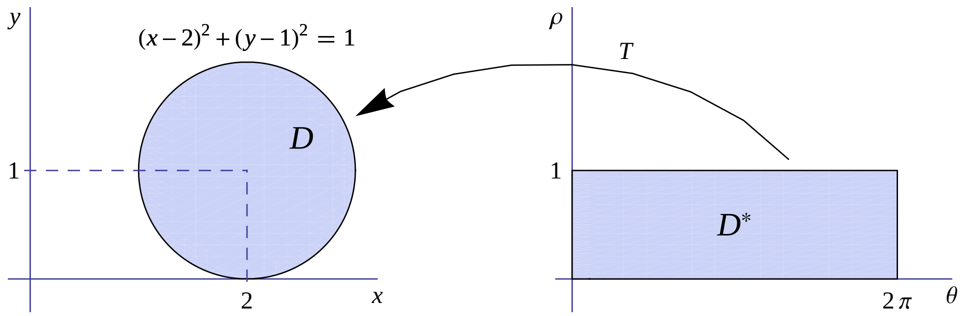


Figura 2.34: Región del plano limitada por la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y+4=0$.

Por lo que la región D viene dada por el conjunto de puntos

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\},$$

es decir, es el círculo de centro $(2,1)$ y radio 1.

En este caso, podemos hacer (ver figura 2.34) el siguiente cambio a coordenadas polares con centro el punto $(2,1)$:

$$x = 2+\rho\cos\theta, \qquad y = 1+\rho\cos\theta,$$

que transforma la región D en la región

$$D^* = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}. \qquad \square$$

Ejercicio 2.15 Sea D la región comprendida dentro de $x^2+y^2=1$ pero fuera de $x^2+y^2=2y$. Determinar la región transformada D^* mediante un cambio a coordenadas polares centradas en el punto $(0,1)$.

SOLUCIÓN: La ecuación $x^2+y^2=2y$ puede escribirse como

$$x^2+(y-1)^2=1,$$

por lo que su gráfica será una circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1. La región D viene representada en la figura 2.35.

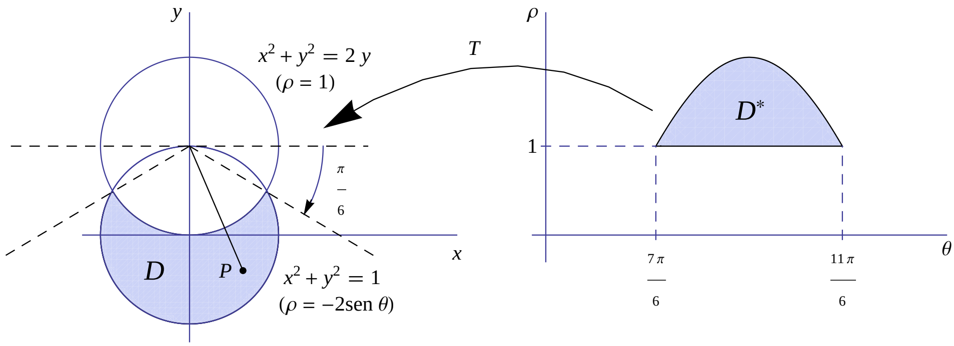


Figura 2.35: Región del plano interior a la circunferencia $x^2+y^2=1$ y exterior a la circunferencia $x^2+y^2=2y$.

Hacemos el cambio de variables a coordenadas polares con centro en el punto $(0,1)$,

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=1+\rho\,\text{sen}\,\theta. \tag{2.6}$$

En este caso, la variable ρ mide la distancia de un punto P del plano al centro $(0,1)$. Las ecuaciones de las circunferencias en estas nuevas variables vendrán dadas por

- Circunferencia de centro (0,1) y radio 1, es decir, $x^2+(y-1)^2=1$.

  Sustituimos las coordenadas polares (2.6) en la ecuación de la circunferencia,

  $$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^2\,\theta=1$$

  de donde, sacando factor común ρ^2 y teniendo en cuenta la igualdad trigonométrica $\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta=1$, se tiene que la ecuación de la circunferenca en coordenadas polares viene dada por $\rho=1$.

- Circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, es decir, $x^2+y^2=1$.

  Como en el caso anterior, aplicamos el cambio de variables (2.6)

  $$\rho^2\cos^2\theta+(1+\rho\,\text{sen}\,\theta)^2=1,$$

  despejando ρ, se tiene que la circunferencia en las nuevas coordenadas, viene dada por $\rho=-2\,\text{sen}\,\theta$.

Esto nos dice que cualquier punto P situado en la región D tiene que cumplir que

$$1\le\rho\le-2\,\text{sen}\,\theta.$$

Para determinar el intervalo donde varía el ángulo θ, calculamos los puntos de corte de ambas circunferencias, es decir, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

sustituimos la segunda ecuación en la primera y obtenemos $2y=1$. Por tanto,

$$y=\frac{1}{2}, \qquad x^2+\frac{1}{4}=1.$$

Finalemnte, resolviendo la ecuación de segundo grado para x, se tiene que los puntos de corte de las circunferencias son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Dado que $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, el ángulo θ estará en el intervalo $\left[\pi+\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6}\right]=\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$. Por tanto, la región D^* viene dada por

$$D^*=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq\rho\leq -2\operatorname{sen}\theta,\ \frac{7\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{11\pi}{6}\right\}. \qquad \square$$

Ejercicio 2.16 Calcular la integral

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

SOLUCIÓN: Hacemos el cambio de variables

$$u=x+y, \qquad v=x-y.$$

Se trata de una aplicación lineal biyectiva, ya que puede escribirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Al ser una aplicación lineal, transforma rectas en rectas, luego la imagen de la región D puede obtenerse calculando la imagen de cada uno de los vértices de la región D.

$$\begin{aligned} &A(0,0)\mapsto A'=T(A)=(0,0), \\ &B(0,1)\mapsto B'=T(B)=(1,-1), \\ &C(1,0)\mapsto C'=T(C)=(1,1). \end{aligned}$$

Por tanto, el recinto D se transforma en el recinto D^* dado por (ver figura 2.36)

$$D^* = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1,\, -u \le v \le u\right\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

Deducimos finalmente que

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v \\ = \frac{e^2-1}{2e}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{e^2-1}{4e}.\end{aligned}$$ □

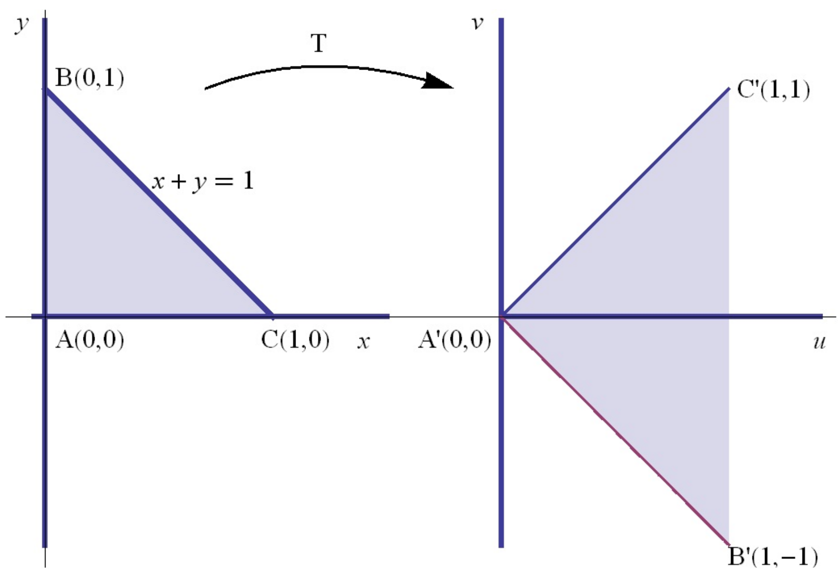


Figura 2.36: Región del plano limitada por la recta $x+y=1$ y los ejes coordenados en el primer cuadrante. Transformación mediante la aplicación $T(x,y)=(x+y,x-y)$

Ejercicio 2.17 Siendo $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, calcular

$$\iiint_R \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}.$$

SOLUCIÓN: El recinto R de integración es el paralelepípedo

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_R \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{(2+x+y)^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\frac{32}{27}. \qquad \square\end{aligned}$$

Ejercicio 2.18 Sea T el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x+y+z = 1$. Calcular

$$\iiint_T \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1+x+y+z}}.$$

SOLUCIÓN: El tetraedro T es el conjunto de puntos (ver figura 2.37)

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_T \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1+x+y+z}} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+x+y+z}} \\ &= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1+x+y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(2(x+1)^{3/2} - \sqrt{2}(3x+1)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{15}\left(7\sqrt{2} - 8\right). \qquad \square\end{aligned}$$

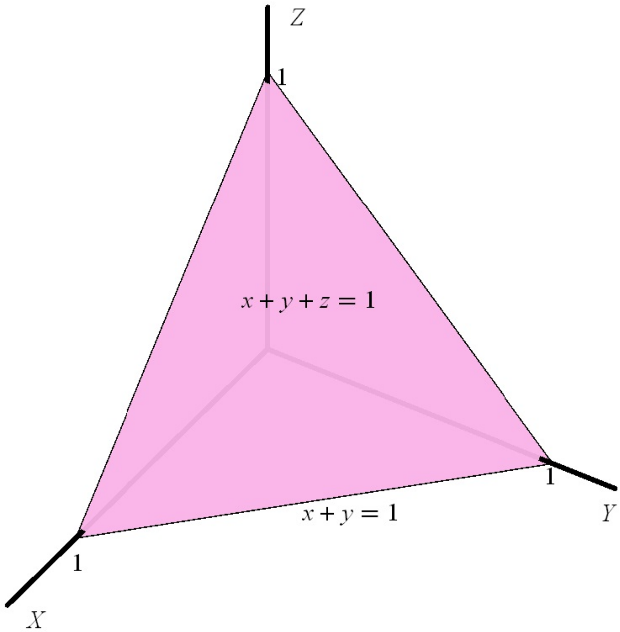


Figura 2.37: Región del espacio limitada por el plano $x+y+z=1$ y los planos coordenados.

Ejercicio 2.19 Hallar

$$\iiint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

donde D es la región acotada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=2$ y la superficie $z=x^2+y^2$.

SOLUCIÓN: La intersección de la superficie $z=x^2+y^2$ con el plano $z=2$ da la circunferencia $x^2+y^2=2$. La proyección de esta circunferencia sobre el plano XY nos permite representar la región D como el conjunto de puntos (ver figura 2.38)

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le\sqrt{2}, 0\le y\le\sqrt{2-x^2}, x^2+y^2\le z\le 2\right\}.$$

Haciendo el cambio a coordenadas cilíndricas,

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z=z,$$

la región D se transforma en la región

$$D^* = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le \sqrt{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \rho^2 \le z \le 2\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = \rho$. Por tanto,

$$\iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{D^*} \rho^2 \cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^2 \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2(2-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$ □

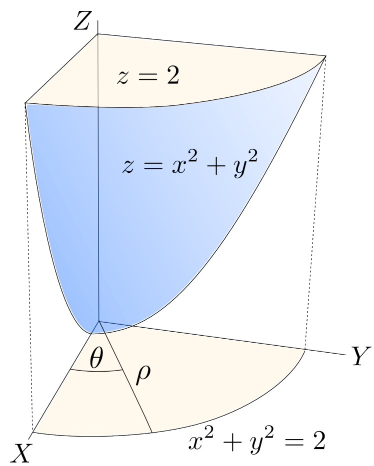


Figura 2.38: Región del espacio limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $z = 2$.

Ejercicio 2.20 Hallar el volumen del recinto limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y que contiene al punto $(0,0,1)$ en su interior.

SOLUCIÓN: Completando cuadrados, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ se expresa como

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,$$

es decir, se trata de una esfera de centro $(0,0,1)$ y radio 1. Calculamos la intersección de dicha esfera con el cono $x^2+y^2=z^2$, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera, se llega a la ecuación de segundo grado $z^2-z=0$, cuyas soluciones son $z=0$ y $z=1$.

- Si $z=0$, se tine que $x^2+y^2=0$. Por tanto, el punto de corte es $(0,0,0)$.
- Si $z=1$, se tiene que $x^2+y^2=1$, es decir, una circunferencia.

Sea W el recinto limitado por la esfera y el cono que contiene al punto $(0,0,1)$ en su interior. Haciendo el cambio a coordenadas esféricas

$$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad z=\rho\cos\phi,$$

tenemos:

i) Aplicando el cambio de coordenadas a la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$, se tiene que

$$\rho^2=2\rho\cos\phi,$$

que se simplifica como $\rho=2\cos\phi$.

ii) Aplicando el cambio de coordenadas al cono $x^2+y^2=z^2$, se tiene que

$$\rho^2\operatorname{sen}^2\phi=\rho^2\cos^2\phi,$$

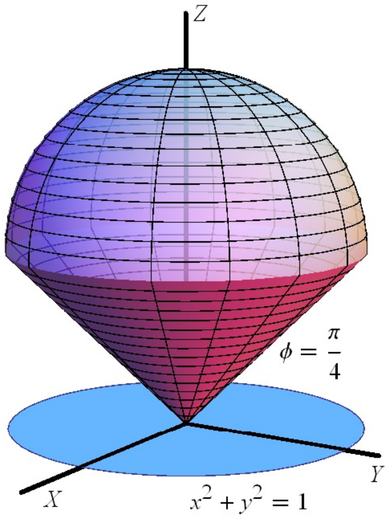
y, simplificando, $\tan^2\phi=1$. Por tanto, $\phi=\frac{\pi}{4}$.

La región W se transforma en la región (ver figura 2.39)

$$W^*=\left\{(\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\rho\le 2\cos\phi,\, 0\le\phi\le\frac{\pi}{4},\, 0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|=\rho^2\operatorname{sen}\phi$. Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi = \pi. \quad \square \end{aligned}$$



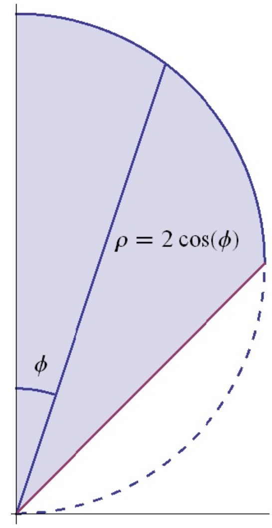


Figura 2.39: Región del espacio limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ y el cono $z^2=x^2+y^2$. Proyección sobre el plano YZ.

Ejercicio 2.21 Calcular la integral

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

siendo D el recinto limitado por el paraboloide $x^2+y^2=2z$ y el plano $z=2$.

SOLUCIÓN: La intersección del paraboloide $x^2+y^2=2z$ con el plano $z=2$ viene dada por

$$\left\{\begin{array}{l} z=2, \\ x^2+y^2=4, \end{array}\right.$$

es decir, se trata de la circunferencia de centro $(0,0,2)$ y radio 2 situada sobre el plano $z=2$. Por tanto, el recinto D es el conjunto de puntos

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x^2+y^2\le 4,\ \frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le 2\right\}.$$

Haciendo el cambio a coordenadas cilíndricas

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$

el recinto D se transforma en el recinto

$$D^* = \left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\rho\le 2,\, 0\le\theta\le 2\pi,\, \frac{1}{2}\rho^2\le z\le 2\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = \rho$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{D^*}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2\mathrm{d}z = \frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

□

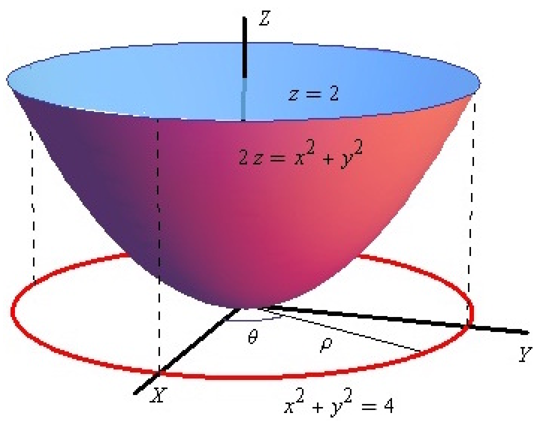


Figura 2.40: Región del espacio limitada por el paraboloide $2z = x^2+y^2$ y el plano $z = 2$.

Ejercicio 2.22 Calcular $\iiint_D (x^2-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, siendo D el recinto limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ y el cilindro parabólico $z=2-x^2$.

SOLUCIÓN: De acuerdo con la figura 2.41, el recinto D es el conjunto de puntos

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1-x,\, 0\le z\le 2-x^2\right\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{2-x^2} (x^2-y+z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^4}{2}+x^2y-2y+2\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2}-x^3-\frac{x^2}{3}+1\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \qquad \square\end{aligned}$$

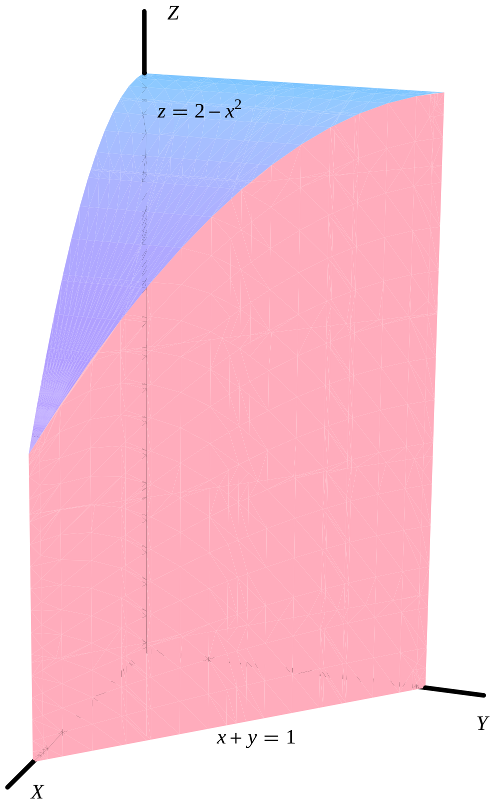


Figura 2.41: Región del espacio limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ y el cilindro parabólico $z=2-x^2$.

Ejercicio 2.23 Calcular

$$\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

donde D es el recinto limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio de variables

$$\frac{x}{a}=\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \frac{y}{b}=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \frac{z}{c}=\rho\cos\phi,$$

la región D se transforma en la región

$$D^*=\left\{(\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi\right\}.$$

Además,

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\rho,\theta,\phi)}\right| = abc\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Por tanto,

$$\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} abc\sqrt{1-\rho^2}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$
$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi^2}{4}abc. \qquad \square$$

Ejercicio 2.24 Un sólido está limitado por la superficie $z=x^2-y^2$, el plano $z=0$ y los planos $x=1$ y $x=3$. Calcular su volumen usando integración doble.

SOLUCIÓN: La intersección de la superficie $z=x^2-y^2$ sobre el plano $z=0$ nos proporciona

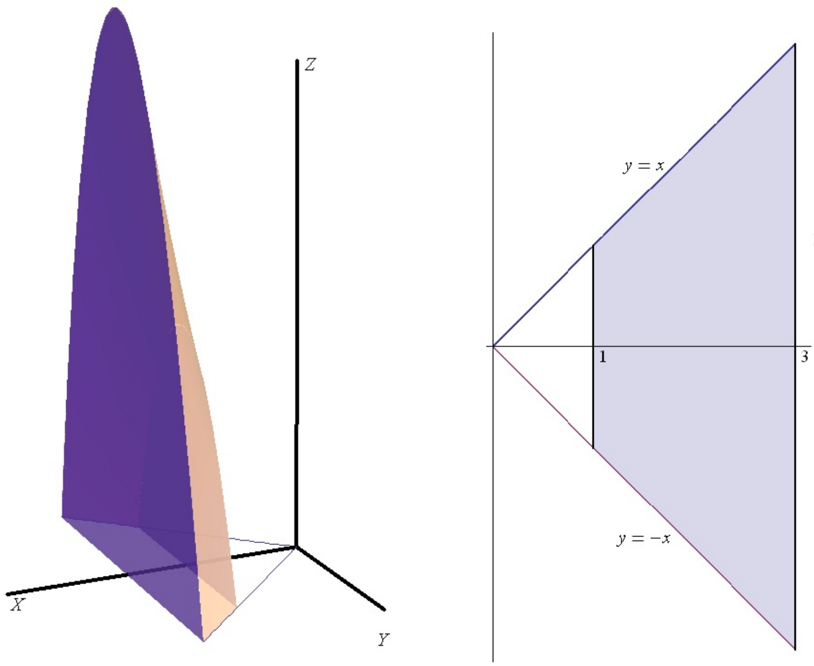
$$\begin{cases} z=0, \\ x^2-y^2=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0, \\ y=\pm x. \end{cases}$$

La región de integración sobre el plano XY (ver figura 2.42(b)) viene dada por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ -x \leq y \leq x\}.$$

Por tanto, el volumen de la región podrá calcularse como

$$\iint_D (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \frac{4}{3}x^3\,\mathrm{d}x = \frac{80}{3}.$$ □



(a) Representación espacial (b) Proyección sobre el plano XY.

Figura 2.42: Región del espacio limitada por el hiperboloide $z = x^2 - y^2$, con $z \geq 0$, y los planos $z = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

Ejercicio 2.25 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro $z = 5 - 2x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 1$.

SOLUCIÓN: La región de integración sobre el plano XY, representada en la figura

2.43, viene dada por

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1-2x \right\}.$$

Por tanto,

$$V = \iint_D z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} (5-2x^2) \, \mathrm{d}x \int_0^{1-2x} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(5-2x^2\right)(1-2x) \, \mathrm{d}x$$
$$= \left[x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 5x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{59}{48}. \qquad \square$$

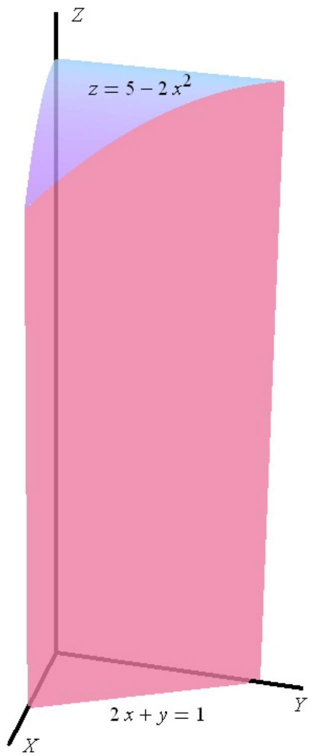


Figura 2.43: Región del espacio limitada por el cilindro $z = 5 - 2x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 1$.

Ejercicio 2.26 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide $z = xy$, el cilindro parabólico $y^2 = 2x$ y los planos $z = 0$, $x = 0$ y $x + y = 4$ en el primer octante.

SOLUCIÓN: La región de integración sobre el plano XY viene determinada por la intersección del cilindro $y^2 = 2x$ y el plano $x + y = 4$ con el plano $z = 0$. Dicha intersección genera la región limitada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x + y = 4$, representada en la figura 2.44.

Por tanto, el volumen vendrá dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x}} y\,\mathrm{d}y + \int_2^4 x\,\mathrm{d}x \int_0^{4-x} y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_2^4 x(4-x)^2\,\mathrm{d}x = 6.
\end{aligned}
$$
□

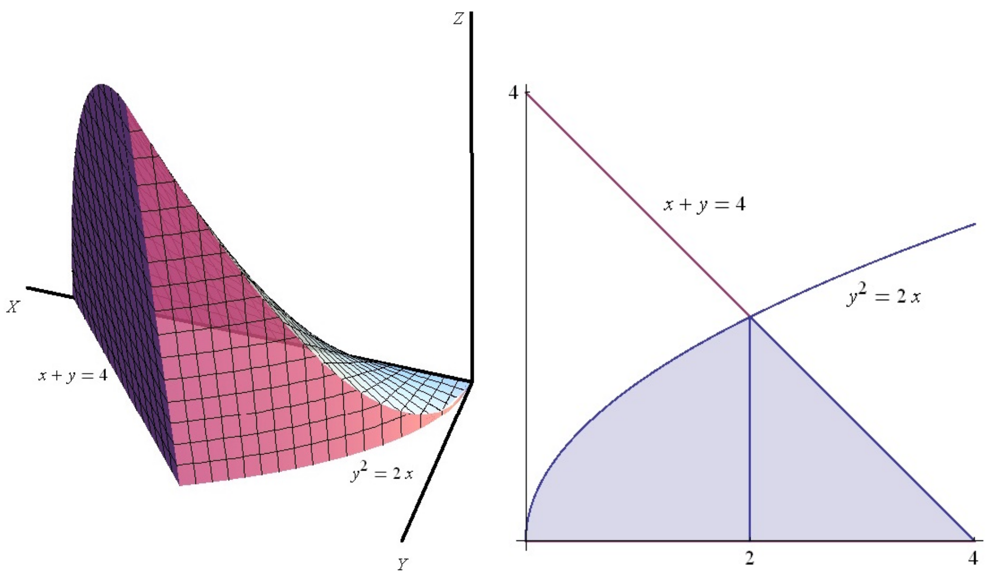


Figura 2.44: Región del espacio limitada por el hiperboloide $z = xy$, el cilindro $y^2 = 2x$ y los planos $z = 0$ y $x + y = 4$. Proyección sobre el plano XY.

Ejercicio 2.27 Sea W el sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=0$ y $z=4-y$.

1. Elegir la integral correcta que representa el volumen V del sólido.
   a) $4\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,\mathrm{d}y$
   b) $2\int_{-2}^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,\mathrm{d}y$
   c) $2\int_{-2}^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,\mathrm{d}x$
2. Evaluar la integral elegida.

SOLUCIÓN: La región W viene representada en la figura 2.45. La intersección del cilindro $x^2+y^2=4$ sobre el eje XY nos da la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2. Por tanto, la región W es el conjunto de puntos

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\in D,\, 0\le z\le 4-y\},$$

siendo D el recinto del plano

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le y\le 2,\ -\sqrt{4-y^2}\le x\le \sqrt{4-y^2}\right\}, \end{aligned}$$

luego

$$V=\iint_D (4-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,\mathrm{d}x.$$

Además, dado que el recinto es simétrico respecto del plano YZ, se tiene que

$$V=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,\mathrm{d}x.$$

En consecuencia, la integral correcta es la c). Calculamos finalmente

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{2}(4-y)\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y-2\int_{-2}^{2}y\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y=16\pi. \end{aligned}$$

□

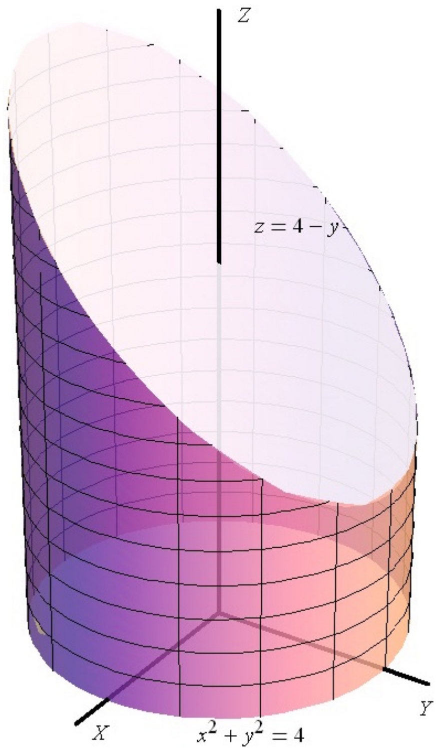


Figura 2.45: Región del espacio limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=0$ y $z=4-y$.

Ejercicio 2.28 Calcular el volumen del cuerpo comprendido entre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la semiesfera $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$.

SOLUCIÓN: Sea W el cuerpo comprendido entre la semiesfera y el cono. La intersección de ambas superficies viene dada por

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2, \\ x^2+y^2=z^2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1, \\ x^2+y^2=1, \end{array}\right.$$

es decir, se trata de la circunferencia de centro $(0,0,1)$ sobre el plano $z=1$. Su proyección sobre el plano XY da la circunferencia de centro $(0,0,0)$ y radio 1. Por tanto, el recinto viene dado por (ver figura 2.46)

$$W = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\Big\},$$

por lo que podemos calcular su volumen mediante integración iterada como

$$V = \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z.$$

También puede calcularse haciendo un cambio a coordenadas cilídricas

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z.$$

Mediante este cambio de variables el recinto W se transforma en el recinto

$$W^* = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \rho \le z \le \sqrt{2-\rho^2}\Big\}.$$

Puesto que $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = \rho$, se tiene

$$V = \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z.$$

Asimismo, puede considerarse también el cambio a coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Observemos que mediante este cambio de variables

- La esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$ viene dada por $\rho^2 = 2$, y simplificando $\rho = \sqrt{2}$.
- El cono $x^2+y^2 = z^2$ se expresa de la forma $\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi = \rho^2\cos^2\phi$, y simplificando $\tan\phi = 1$, es decir, $\phi = \frac{\pi}{4}$.

por lo que la región W se transforma en

$$W^{**} = \Big\{(x,y,z) : 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\Big\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$. Por tanto,

$$V = \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^{**}} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\pi. \qquad \square$$

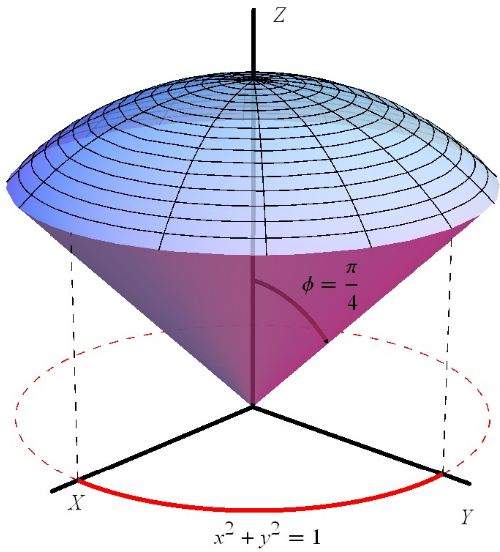


Figura 2.46: Región del espacio limitada por la semiesfera $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicio 2.29 Calcular la integral

$$\iiint_W (2zx^2 + 2zy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

siendo W la región exterior al cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $z \geq 0$.

SOLUCIÓN: El cilindro y el cono se cortan sobre el plano $z = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Además, la región de integración sobre el plano XY viene delimitada precisamente por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Haciendo el cambio a coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta, \qquad z = z,$$

la región W se transforma en la región

$$W^* = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \rho\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\rho,\theta,z)}\right| = \rho$. Por tanto,

$$\iiint_W 2z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} 2z\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^\rho 2z\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}. \qquad \square$$

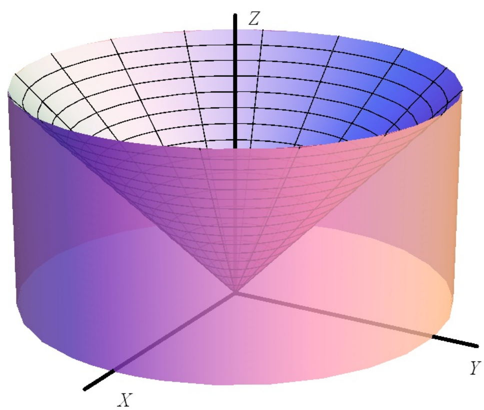


Figura 2.47: Región del espacio exterior al cono $z^2 = x^2+y^2$ e interior al cilindro $x^2+y^2 = 1$.

Ejercicio 2.30 Calcular la integral

$$\iiint_W xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

siendo $W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x,\ y,\ z\geq 0\right\}$.

SOLUCIÓN: La región W es el interior de la esfera situada en el primer octante (ver figura 2.48). El cambio a coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

transforma W en la región

$$W^* = \left\{(\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq\rho\leq 1, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Por tanto

$$\iiint_W xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{W^*} \rho^5 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^1 \rho^5\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{48}. \quad \square$$

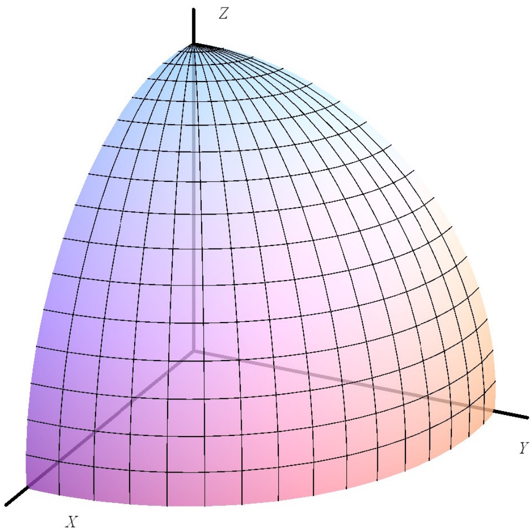


Figura 2.48: Región limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ en el primer octante.

Ejercicio 2.31 Calcular la integral

$$\iiint_W \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

donde W es el sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$ con $0<a<b$.

SOLUCIÓN: El cambio a coordenadas esféricas

$$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad z=\rho\cos\phi,$$

transforma la región W en la región (ver figura 2.49)

$$W^* = \left\{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_W \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= \iiint_{W^*} \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi \int_a^b \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = 4\pi(\log b - \log a). \ \square\end{aligned}$$

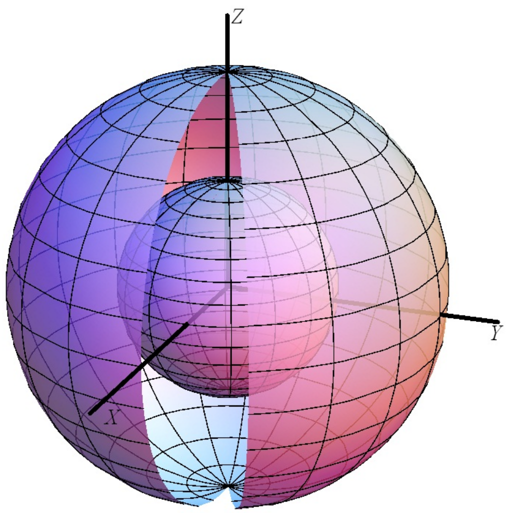


Figura 2.49: Región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$.

Ejercicio 2.32 Calcular la integral triple de la función $f(x,y,z) = 1+(x^2+y^2)^2$ sobre la región Ω limitada por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=2$.

SOLUCIÓN: La intersección del cono con el plano nos da la circunferencia $x^2+y^2=4$ sobre el plano $z=2$. La región de integración sobre el plano XY es precisamente la región $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

El cambio a coordenadas cilíndricas,

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$

transforma la región W en la región

$$W^* = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \rho \le z \le 2\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = \rho$, luego

$$\begin{aligned}\iiint_W \left(1+(x^2+y^2)^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{W^*}(1+\rho^4)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(1+\rho^4)\rho\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^2\mathrm{d}z = \frac{184\pi}{21}. \qquad \square\end{aligned}$$

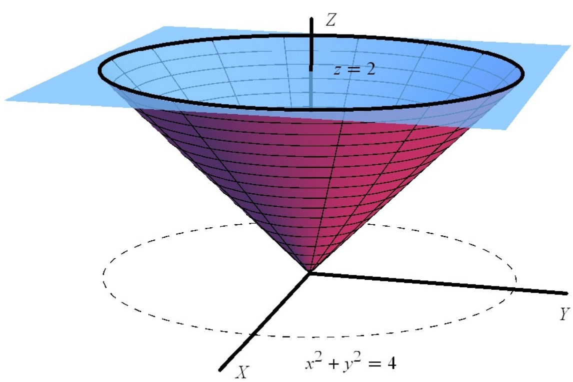


Figura 2.50: Región limitada por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z = 2$.

Ejercicio 2.33 Sea D la región del plano dada por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2+y^2-x \le x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la región D alrededor del eje OY.

SOLUCIÓN: Observemos que, completando cuadrados en $x^2+y^2-x=0$, se tiene

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Ésta es la ecuación de una circunferencia de centro $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. La región D viene representada en la figura 2.51. Dado que la región no atraviesa el eje OY, por el teorema de Guldin, el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar dicha región alrededor del eje OY está dado por

$$V=2\pi\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

se tiene que

- La circunferencia $x^2+y^2=1$, se expresa como $\rho=1$.
- La circunferencia $x^2+y^2=x$, se escribe como $\rho=\cos\theta$.

En consecuencia, la región D se transforma en la región

$$D^*=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2:\cos\theta\le\rho\le1,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Además, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\rho$. Por tanto,

$$\begin{aligned}V&=2\pi\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi\iint_{D^*}\rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{1}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{3\pi}{16}\right).\end{aligned}$$ □

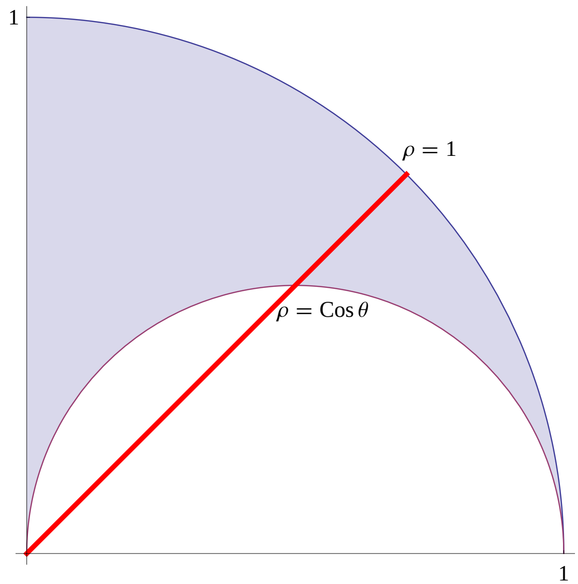


Figura 2.51: Región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - 2x = 0$.