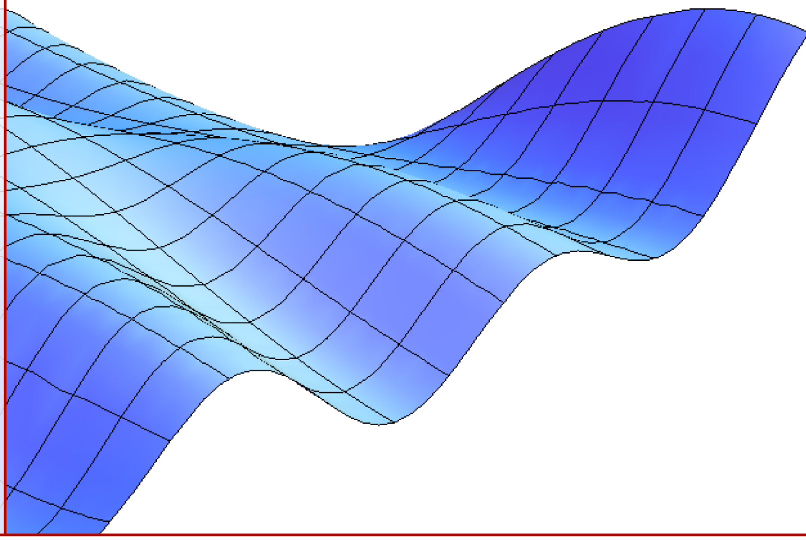
Contenidos



1 Introducción a las funciones de varias variables

La asignatura de Ampliación de Matemáticas para el grado de ingeniería, estudia entre otros apartados, la integración múltiple (integrales dobles e integrales triples), Geometría Diferencial (estudio de curvas y superficies) y las integrales de linea y de superficie. Para una correcta comprensión de estos temas es necesario poseer un conocimiento, si no profundo, sí escogido, de la teoría de funciones de varias variables.

Para trabajar con los dominios de este tipo de funciones necesitaremos una pequeña iniciación a la topología del espacio euclídeo que nos permita conocer los conceptos de conjunto abierto, conjunto cerrado, interior de un conjunto, ..., que tanto aparecen en toda la bibliografía que el alumno va a encontrar de la asignatura. A lo largo de estos temas serán muy frecuentes los casos en que sea necesario derivar funciones de varias variables y, más precisamente, derivar la composición de funciones de este tipo.

Problemas tan sencillos como por ejemplo "*Dada una curva C de ecuaciones implícitas*

$$F(x,y,z) = 0, \qquad G(x,y,z) = 0,$$

encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto no singular de dicha curva" o el de calcular un jacobiano para un cambio de variables que no venga dado de forma explícita, necesitan del uso del teorema de la función implícita (o de una consecuencia de él como es el teorema de la función inversa). Por tanto, dedicaremos un breve espacio en este primer tema a ver los enunciados de estos teoremas así como a realizar algunos ejercicios sobre este tema.

1.1 Primeras nociones

1.1.1 Función de varias variables

Definición 1.1.1 Por una función de varias variables entendemos una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que a cada punto $X \in D$ le hace corresponder un único punto $Y \in \mathbb{R}^m$, que notaremos en la forma $Y = f(X)$ y que llamaremos imagen del punto X mediante la función f. El conjunto D se llama dominio de la función.

Formalmente se indica en la forma

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & X = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(X) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \end{array}$$

donde cada f_i, $i = 1, \ldots, m$, es una función

$$f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

que se llama componente i-ésima de f.

En forma abreviada, una función de m componentes se escribe como $f = (f_1, ..., f_m)$.

■ Ejemplos 1.1.2 — Funciones de varias variables

1. El volumen de un cilindro define una función que depende de dos variables: el radio x y la altura y. Si tomamos $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$, tenemos la función

$$\begin{aligned} V : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto V(x, y) = \pi x^2 y. \end{aligned}$$

2. La función

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

asocia a cada punto $t \in [0, 2\pi]$ un punto sobre la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1.

3. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2, \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x - y} \right),$$

con $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y\}$. Las componentes de f son:

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad f_2(x,y,z) = \frac{\text{sen}(xy)}{x-y}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x^2, y^2, x^2 - y^2)$. Las tres componentes de f vienen dadas por:

$$f_1(x,y) = x^2, \qquad f_2(x,y) = y^2, \qquad f_3(x,y) = x^2 - y^2. \qquad \blacksquare$$

Observación 1.1.3 El conjunto $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial si definimos las operaciones suma y producto por escalares como:

1. Dados $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$X + Y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

2. Dados $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot X = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Por esta razón, a las n-uplas $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se les denomina *vectores*.

i) Si $m = 1$ se dice que la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función real* o *campo escalar* de n-variables.

ii) Si $m > 1$ se dice que la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una *función vectorial* o *campo vectorial* de n-variables y m-componentes.

Si $n = 1$ y $m > 1$, es decir, se trata de una función vectorial de una variable, los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad se extienden de manera natural como en el caso $m = 1$, considerando cada una de las funciones componentes de f. Más concretamente:

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)),$$

donde cada $f_i : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.

- **Límite:** Para calcular $\lim_{t\to t_0} f(t)$ basta calcular $\lim_{t\to t_0} f_i(t)$ para $i = 1,2,\ldots,m$. Además,

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \ldots, \lim_{t\to t_0} f_m(t)\right).$$

- **Continuidad:** La función f es continua en $a \in D$ si, y solo si, cada una de las funciones f_i es continua en el punto a.
- **Derivabilidad:** Se dice que f es derivable en el punto $a \in D$ si, y solo si, cada una de las funciones f_i es derivable en el punto a. Además, se tiene que

$$f'(a) = \left(f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_m'(a)\right).$$

En este tema tendremos ocasión de comprobar que tales conceptos (límite, continuidad y derivabilidad) son un poco más complicados de tratar para el caso $n > 1$.

1.1.2 Gráfica de una función real de varias variables

Definición 1.1.4 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la gráfica de la función f como

$$\mathrm{Gr}(f) = \left\{(x_1,\ldots,x_n,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1,\ldots,x_n) \in D,\ y = f(x_1,\ldots,x_n)\right\}.$$

Cuando $n = 1$, la representación de la gráfica de la función nos proporciona una curva en $\mathbb{R}^2$. En el caso $n = 2$, obtenemos una superficie de $\mathbb{R}^3$.

■ **Ejemplos 1.1.5 — Representación de la gráfica de una función**

1. La gráfica de la función $f : [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, viene dada por

   $$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1],\ y = x^2\}.$$

   La representación gráfica de $\mathrm{Gr}(f)$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ (ver figura 1.1 (a)).

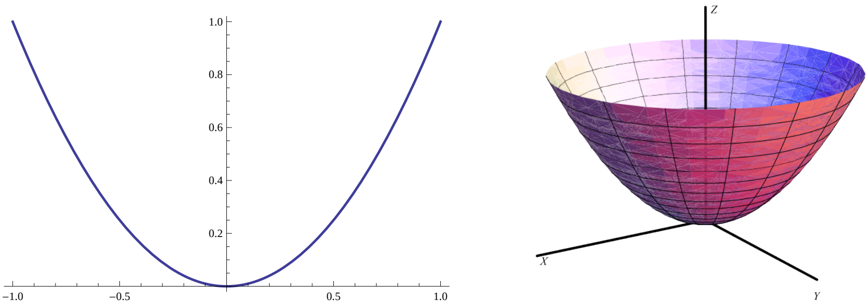
2. Consideremos la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

   Su gráfica es el conjunto de puntos

   $$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D,\ z = x^2 + y^2\},$$

   cuya representación gráfica en un sistema de referencia tridimensional determina una superficie en $\mathbb{R}^3$ (ver figura 1.1 (b)). ■



(a) Curva $y = x^2$.

(b) Superficie $z = x^2 + y^2$.

Figura 1.1: Representación de gráficas.

1.2 Nociones de topología del espacio euclídeo

Los dominios más usuales de las funciones de una variable suelen ser los intervalos, abiertos o cerrados, propios o impropios. Trataremos de extender estos conceptos a otros equivalentes para las funciones de varias variables. Para ello dedicaremos la primera parte de este capítulo a dar una breve iniciación a la topología de $\mathbb{R}^n$ ya que necesitamos encontrar unos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con las mismas propiedades universales que dichos intervalos.

1.2.1 Norma euclídea

En la recta real la función valor absoluto nos permite medir la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$, definiendo

$$\mathrm{d}(x,y) = |x - y|. \tag{1.1}$$

Para medir la distancia entre dos puntos X e Y de $\mathbb{R}^n$ necesitamos el concepto de norma de un vector.

Definición 1.2.1 (Norma euclídea en $\mathbb{R}^n$) Se llama norma euclídea de un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ al número real

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Observaciones 1.2.2

1. En el caso particular $n = 1$, la norma euclídea es precisamente el valor absoluto, dado que

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|.$$

2. Un vector $X \in \mathbb{R}^n$ se dice *unitario* si $\|X\| = 1$.

La norma cumple propiedades similares a las del valor absoluto.

Propiedades 1.2.3 (Propiedades de la norma)

i) $\|X\| \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\|X\| = 0$, si y sólo si, $X = (0, \ldots, 0)$.

iii) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (Desigualdad triangular).

iv) $\|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n$.

Problema 1.2.4 *Probar que para $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$\|X - Y\| \geq \big|\|X\| - \|Y\|\big|.$$

SOLUCIÓN: Partiendo de las igualdades $X = Y + (X - Y)$ e $Y = X + (Y - X)$, la desigualdad triangular nos dice que

$$\begin{aligned} \|X\| &= \|Y + (X - Y)\| \leq \|Y\| + \|X - Y\|, \\ \|Y\| &= \|X + (Y - X)\| \leq \|X\| + \|Y - X\| = \|X\| + \|X - Y\|. \end{aligned}$$

De la primera podemos despejar $\|X - Y\| \geq \|X\| - \|Y\|$ y de la segunda $\|X - Y\| \geq \|Y\| - \|X\|$. Deducimos que $\|X - Y\|$ será mayor o igual que $\big|\|X\| - \|Y\|\big|$, como queríamos probar. $\square$

De manera análoga a (1.1), la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ nos permite definir la distancia entre dos puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ mediante la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{d}(X, Y) = \|X - Y\|. \tag{1.2}$$

1.2.2 Entornos de un punto

Definición 1.2.5 Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Llamaremos entorno abierto (o simplemente entorno) del punto x_0 a cualquier intervalo de la forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r > 0$.

El entorno de radio r de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ centrado en el punto x_0 y puede expresarse como sigue:

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{d}(x, x_0) < r\}.$$

A partir de la expresión anterior, la definición de entorno puede extenderse a $\mathbb{R}^n$ simplemente tomando la distancia en $\mathbb{R}^n$ definida en (1.2).

Definición 1.2.6 (Bola abierta) Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se define la bola abierta de centro X_0 y radio $r > 0$ (entorno de centro X_0 y radio r) como:

$$B_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| < r\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(X, X_0) < r\}.$$

Asimismo, se define *la bola cerrada* de centro X_0 y radio r como:

$$\overline{B}_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| \leq r\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(X, X_0) \leq r\},$$

que generaliza el concepto de intervalo cerrado

$$[x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{d}(x, x_0) \leq r\}.$$

Observaciones 1.2.7

1. Como $\mathrm{d}(X_0, X_0) = 0$ resulta evidente que $X_0 \in B_r(X_0)$, $\forall r > 0$.
2. La bola abierta $B_r(X_0)$ siempre está contenida en la bola cerrada $\overline{B}_r(X_0)$.
3. Para $n = 1$, $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ y $\overline{B}_r(x_0) = [x_0 - r, x_0 + r]$.
4. Para $n = 2$, $B_r(X_0)$ es el interior del círculo de centro el punto X_0 y radio r, mientras que $\overline{B}_r(X_0)$ también incluye a la circunferencia.
5. Para $n = 3$, $B_r(X_0)$ es el interior de la esfera de centro el punto X_0 y radio r, mientras que $\overline{B}_r(X_0)$ también incluye a dicha esfera.

Hemos utilizado el término *esfera* para hacer referencia a la frontera de la bola tridimensional, pero podemos generalizar este concepto a cualquier dimensión.

Definición 1.2.8 Se define *la esfera* de centro X_0 y radio r, y se denota por $S_r(X_0)$, como el conjunto

$$S_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| = r\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(X, X_0) = r\}.$$

☞ En el caso $n = 2$, la esfera de centro X_0 y radio r es precisamente la *circunferencia* de centro X_0 y radio r. De la definición resulta fácil deducir su ecuación algebraica. En efecto, si $X_0 = (x_0, y_0)$ y $X = (x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} X \in S_r(X_0) \Leftrightarrow d(X, X_0) = r \Leftrightarrow \|X - X_0\| = r \Leftrightarrow \|(x - x_0, y - y_0)\| = r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{aligned}$$

De igual forma, para $n = 3$, la ecuación de una esfera de centro $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y radio r vendrá dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

1.2.3 Frontera de un conjunto

Definición 1.2.9 (Complementario de un conjunto) Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ notaremos por A^c, y lo llamaremos conjunto complementario de A, al conjunto

$$A^c = \{X \in \mathbb{R}^n : X \notin A\},$$

es decir, A^c está formado por todos los puntos que no pertenecen al conjunto A.

■ Ejemplos 1.2.10 — Complementario de un conjunto

1. Si $A = [0, 2) \subset \mathbb{R}$, entonces $A^c = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.
2. Si $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces $B^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. ■

De un modo impreciso, podemos definir la *frontera de un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, que denotaremos por $\mathrm{Fr}(A)$, como el conjunto de puntos que sirven de separación entre el conjunto A y su complementario, A^c.

■ Ejemplos 1.2.11 — Frontera de un conjunto

1. Si $A = [0, 2)$, observamos que los puntos 0 y 2 sirven para separar los conjuntos A y A^c, luego $\mathrm{Fr}(A) = \{0, 2\}$.
2. Si $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (ver figura 1.2), entonces el conjunto de

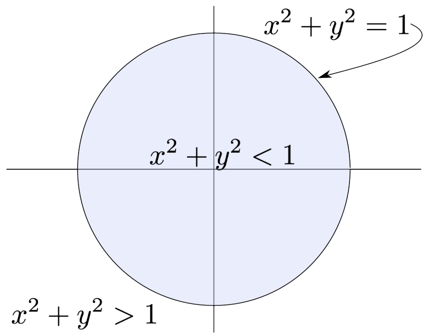


Figura 1.2: Representación gráfica de $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ y B^c.

puntos que sirven de separación entre B y B^c es precisamente el conjunto

$$\mathrm{Fr}(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\},$$

es decir, la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. ■

Si los conjuntos admiten una representación gráfica en la recta real (caso $n=1$) o en el plano (caso $n=2$), esta definición puede servirnos para identificar de forma clara la frontera de un conjunto que vendrá dada, generalmente, por un conjunto finito de puntos (en el caso de que $A\subset\mathbb{R}$) o por un conjunto finito de puntos y/o de curvas en el plano (en el caso de que $A\subset\mathbb{R}^2$). No obstante, resulta aconsejable dar la definición matemática.

Definición 1.2.12 (Frontera de un conjunto) Dado un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ diremos que el punto $X\in\mathbb{R}^n$ está en la frontera de A si todas las bolas abiertas de centro X y radio r (arbitrario) contienen puntos de A y puntos de A^c.

A partir de la definición de frontera de un conjunto, resulta muy fácil caracterizar cuando un conjunto es abierto y cerrado.

Definición 1.2.13 (Conjunto abierto) Un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si no contiene puntos de su frontera, es decir,

$$A \text{ es abierto } \overset{\text{def}}{\iff} A\cap\mathrm{Fr}(A)=\emptyset.$$

Observaciones 1.2.14

1. Si un conjunto A no es abierto será porque contiene puntos de su frontera. Si quitamos estos puntos obtendremos un subconjunto de A que llamaremos *interior* de A. Lo notaremos por $\mathrm{int}(A)$, es decir
$$\mathrm{int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A).$$
A los puntos del conjunto $\mathrm{int}(A)$ se les llama *puntos interiores* de A.
2. Por definición, se cumple que $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.
3. Desde un punto de vista práctico, el interior de A se obtiene quitándole al conjunto A lo que le sobra para que el conjunto resultante sea un conjunto abierto. Una consecuencia inmediata de esta observación es que $\mathrm{int}(A)$ es necesariamente un conjunto abierto. De hecho, resulta evidente que
$$A \text{ es abierto } \Leftrightarrow \mathrm{int}(A) = A.$$
Por tanto, puesto que $\mathrm{int}(A)$ es un conjunto abierto, se cumple que
$$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A).$$

■ Ejemplos 1.2.15

1. Si tomamos $A = [0,2) \subset \mathbb{R}$, entonces sabemos que $\mathrm{Fr}(A) = \{0,2\}$. Por tanto, A no es un conjunto abierto porque contiene puntos de la frontera (ya que $2 \in A \cap \mathrm{Fr}(A)$). Si le quitamos a A los puntos que están en la frontera obtenemos,
$$\mathrm{int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A) = (0,2).$$
2. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces
$$\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$
Luego, A no es un conjunto abierto. En este caso,
$$\mathrm{int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$
3. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$, entonces $A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$ (ver figura 1.3). Luego,
$$\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}.$$

Por tanto, A no contiene ningún punto de la frontera y, en consecuencia, A es un conjunto abierto, por lo que $\text{int}(A) = A$.

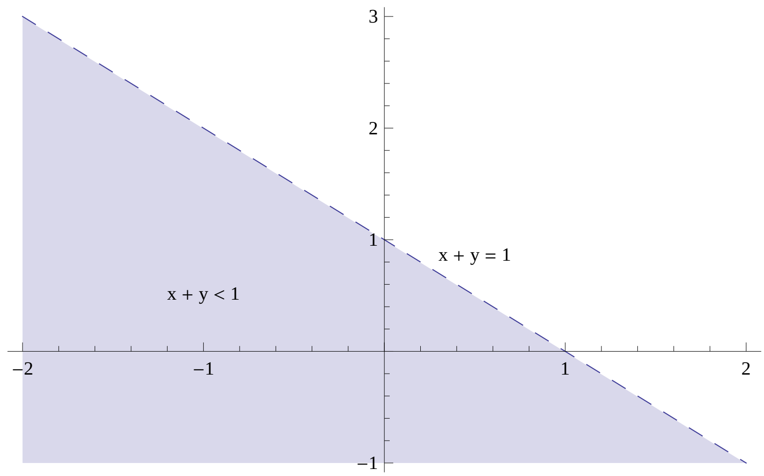


Figura 1.3: Representación gráfica del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 1\}$.

4. El 2 es un punto interior del conjunto $A = [1,3) \subset \mathbb{R}$. En cambio, $1 \notin \text{int}(A)$ ya que $1 \in \text{Fr}(A)$. En este caso, $\text{int}(A) = (1,3)$.
5. Sea $A = \overline{B}_3(0,0) \subset \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}$. Los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ son puntos interiores de A. El punto $(3,0) \in A$ pero $(3,0) \notin \text{int}(A)$. En este caso, se tiene que

$$\text{int}(A) = B_3(0,0).$$

6. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$. Entonces se tiene que

$$\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}.$$

7. El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ es abierto pues A no contiene ningún punto de la frontera ya que

$$\text{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

8. Si $A = \{3\} \subset \mathbb{R}$, entonces $\text{int}(A) = \emptyset$. ■

Definición 1.2.16 (Conjunto cerrado) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrado si contiene todos los puntos de su frontera, es decir,

$$A \text{ es cerrado } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Fr}(A) \subseteq A.$$

Observaciones 1.2.17

1. Si un conjunto A no es cerrado será porque no contiene todos los puntos de su frontera. Si le añadimos los puntos de la frontera que no están en A obtendremos un conjunto que contiene a A y que llamaremos *adherencia* o *cierre* de A. Lo notaremos por $\overline{A}$, es decir

   $$\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A).$$

   A los puntos del conjunto $\overline{A}$ se les llama *puntos adherentes* de A.

2. Por definición, se cumple que $A \subseteq \overline{A}$.

3. Desde un punto de vista práctico, la adherencia de A se obtiene añadiéndole al conjunto A lo que le falta para que sea un conjunto cerrado, de donde se deduce que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado. De hecho, resulta evidente que

   $$\overline{A} \text{ es cerrado } \Leftrightarrow \overline{A} = A.$$

   Por tanto, puesto que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, se tiene que

   $$\overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Ejemplos 1.2.18

1. Si tomamos $A = [0,2) \subset \mathbb{R}$, entonces sabemos que $\operatorname{Fr}(A) = \{0,2\}$. Por tanto A no es un conjunto cerrado porque hay puntos de la frontera que no pertenecen a A (ya que $0 \in \operatorname{Fr}(A)$ pero $0 \notin A$). Si le añadimos a A los puntos de la frontera que no están en A, obtenemos

   $$\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A) = [0,2].$$

2. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces

   $$\operatorname{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Por tanto, A es un conjunto cerrado, ya que $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. En este caso,

$$\overline{A} = A.$$

3. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 1\}$, entonces (ver figura 1.3)

$$\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1\}.$$

Por tanto, A no contiene a los puntos de la frontera y, por tanto, A no es un conjunto cerrado. En este caso,

$$\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1\}.$$

4. El 3 y el 2 son puntos adherentes al intervalo $A = (1,3) \subset \mathbb{R}$.
5. Los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ son adherentes a la bola $B_1(0,0) \subset \mathbb{R}^2$.
6. En general, se cumple que $\overline{B_r(X_0)} = \overline{B}_r(X_0)$.
7. Un intervalo cerrado $[a,b]$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$.
8. La bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ de centro X_0 y radio $r > 0$ es un conjunto cerrado.
9. Dado en conjunto $A = (0,1]$, se tiene

$$\mathrm{int}(A) = (0,1), \qquad \overline{A} = [0,1], \qquad \mathrm{Fr}(A) = \{0,1\}.$$

10. La frontera de la bola $B_r(X_0)$ en $\mathbb{R}^2$ es la circunferencia de centro X_0 y radio r:

$$C(X_0,r) = S_r(X_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}.$$

Por otra parte, la adherencia de $B_r(X_0)$ es la bola cerrada

$$\overline{B}_r(X_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}.$$

11. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ y > x^2\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ y = x^2\}, \\ \overline{A} &= A \cup \mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ y \geq x^2\}, \end{aligned}$$

mientras que $\mathrm{int}(A) = A$, es decir, A es abierto. ∎

Propiedades 1.2.19 (Interior y adherencia)

i) Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

ii) Dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que

a) Si $A \subset B$, entonces $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B)$ y $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \cap B)$

c) $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

iii) Un conjunto A es abierto $\Leftrightarrow A^c$ es un conjunto cerrado.

iv) Un conjunto A es cerrado $\Leftrightarrow A^c$ es un conjunto abierto.

v) $\mathbb{R}^n$ y el conjunto $\emptyset$ son conjuntos abiertos y cerrados.

Observaciones 1.2.20

1. De la propiedad ii.a) se deduce que si A y B son conjuntos abiertos, entonces $A \cap B$ es también un conjunto abierto. En efecto, si A y B son abiertos, entonces $\operatorname{int}(A) = A$ e $\operatorname{int}(B) = B$. Por tanto,

$$\operatorname{int}(A \cap B) \overset{\text{ii.a)}}{=} \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = A \cap B,$$

de donde deducimos que $A \cap B$ es abierto.

Esta propiedad también se cumple para cualquier intersección finita de conjuntos abiertos, es decir, si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i \quad \text{es un conjunto abierto.}$$

2. Utilizando la propiedad ii.b), puede demostrarse que la unión arbitraria de

conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

3. Análogamente, de la propiedad ii.e) se concluye que si A y B son conjuntos cerrados, entonces $A \cup B$ es un conjunto cerrado. Esta propiedad también se cumple para cualquier unión finita de conjuntos cerrados, es decir, si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{es un conjunto cerrado.}$$

4. Finalmente, a partir de la propiedad ii.d), se puede demostrar que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado.

Problemas 1.2.21

1. *Probar que si* $X \in B_r(X_0)$ *y tomamos* $r' = r - \|X - X_0\| > 0$*, entonces* $B_{r'}(X) \subseteq B_r(X_0)$ (ver figura 1.4).

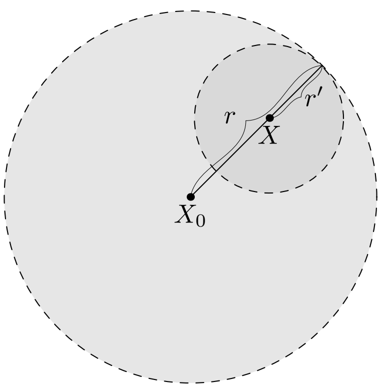


Figura 1.4: $B_{r-\|X-X_0\|}(X) \subseteq B_r(X_0)$.

SOLUCIÓN: Dado $Y \in B_{r'}(X)$, veamos que $Y \in B_r(X_0)$ y habremos probado la inclusión. La condición $Y \in B_{r'}(X)$ nos dice que $\|X - Y\| < r' = r - \|X - X_0\|$, es decir, $\|X - Y\| + \|X - X_0\| < r$. Usando finalmente la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\|Y - X_0\| \leq \|X - Y\| + \|X - X_0\| < r,$$

y, por tanto, $Y \in B_r(X_0)$. □

2. *Dar un contraejemplo que demuestre que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto.*

   SOLUCIÓN: Las bolas abiertas $B_r(X_0)$ son conjuntos abiertos, sin embargo

   $$\bigcap_{r>0} B_r(X_0) = \{X_0\}$$

   no es abierto. $\square$

3. *Dar un contraejemplo que demuestre que el interior de la unión no es la unión de los interiores.*

   SOLUCIÓN: Sea $A = [1,2]$ y $B = [2,3]$. Entonces se tiene que, $\mathrm{int}(A \cup B) = (1,3)$ mientras que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = (1,2) \cup (2,3) = (1,3) \setminus \{2\}$. $\square$

1.2.4 Conjuntos conexos

Definición 1.2.22 (Conexión por arcos) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que A es conexo, o más precisamente conexo por arcos, si para cualesquiera $X, Y \in A$ existe una función continua, $f : [0,1] \to A$, con $f(0) = X$ y $f(1) = Y$.

Observaciones 1.2.23

1. Informalmente, en el caso $n = 2$ o $n = 3$, podemos decir que un conjunto A es conexo si, dados dos puntos cualesquiera de A, los podemos unir mediante un trazo continuo sin salirnos de A.

2. Un caso particular de conjuntos conexos por arcos son los conjuntos convexos. *“Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si dados dos puntos cualesquiera $X, Y \in A$, el segmento que los une está incluido en A”.*

   Observemos que, para un conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ y puntos $X, Y \in A$, podemos considerar la función continua $f(t) = (1-t)X + tY$, con $t \in [0,1]$, que cumple $f(0) = X$ y $f(1) = Y$. Esto nos dice que A es conexo por arcos.

■ Ejemplos 1.2.24 — Conexión

1. Los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos, ya sean propios o impropios, de la recta real son conjuntos convexos.

2. Si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces la bola abierta $B_r(X_0)$ y la bola cerrada $\overline{B}_r(X_0)$ son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.

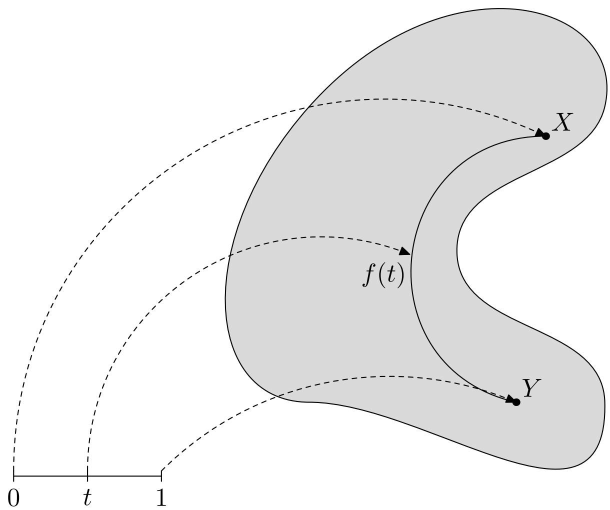


Figura 1.5: Conjunto conexo por arcos.

3. El conjunto $A = (1,3) \cup (5,7) \subset \mathbb{R}$ no es conexo, pues para unir, por ejemplo, los puntos 2 y 6 cualquier arco que usáramos no estaría contenido en A.
4. El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ es un conjunto conexo pero no es un conjunto convexo. ■

1.2.5 Conjuntos compactos

Definición 1.2.25 (Acotación y compacidad) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si existe $M > 0$ tal que $\|X\| \leq M$ para todo $X \in A$.

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

■ Ejemplos 1.2.26 — Compacidad

1. El intervalo cerrado $[a,b]$ es un conjunto compacto pues es cerrado y está acotado por $M = \max\{|a|,|b|\}$.
2. La bola cerrada $\overline{B}_r(X_0)$ es un conjunto compacto. En efecto, vimos que $\overline{B}_r(X_0)$ es cerrado en el ejemplo 1.2.18.6, luego bastará ver que es acotado. Si $X \in \overline{B}_r(X_0)$, entonces $\|X - X_0\| \leq r$, lo que implica que $\|X\| \leq M$ con $M = r + \|X_0\|$.

3. El conjunto interior de la elipse de semiejes a y b, dado por

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\},$$

con $a, b > 0$, es acotado ya que $\|X\| \leq \text{máx}\{|a|,|b|\}$, $\forall X \in A$, pero no es compacto (basta observar que A no es cerrado ya que, por ejemplo, el punto $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ pertenece a $\text{Fr}(A)$ pero no al propio A).

4. El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$ es cerrado pero no es compacto (basta observar que A no está acotado). ■

1.3 Limites y Continuidad

1.3.1 Límite de una función

Como sabemos de primer curso, si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real y $x_0 \in \overline{A}$, se dice que f tiene por límite L cuando x tiende a x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota por

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = L.$$

Observación 1.3.1 De la condiciones $x \in A$ y $0 < |x - x_0|$ se sigue que la función f no tiene por qué estar definida en el punto x_0.

Con las herramientas de que disponemos, la definición anterior puede extenderse sin mucha dificultad a funciones de varias variables, sustituyendo el valor absoluto por la norma euclídea.

Definición 1.3.2 (Límite de una función de varias variables) Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se dice que f tiene por límite $L \in \mathbb{R}^m$ cuando X tiende a $X_0 \in \overline{D}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : X \in D, 0 < \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow \|f(X) - L\| < \varepsilon.$$

En principio, aunque la intuición nos diga lo contrario, con esta definición una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podría tener más de un límite en un punto $X_0 \in \overline{D}$. Veamos que dicha situación no puede ocurrir, es decir, el límite es único.

Para probarlo, por reducción al absurdo, supongamos que $L, L' \in \mathbb{R}^m$ son dos límites distintos de f en X_0 y consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}\|L - L'\| > 0$. Usando la definición, existirán $\delta, \delta' > 0$ tales que $\|f(X) - L\| < \varepsilon$ para $0 < \|X - X_0\| < \delta$, $X \in D$, y $\|f(X) - L'\| < \varepsilon$ para $0 < \|X - X_0\| < \delta'$, $X \in D$. Por tanto, si tomamos $\delta'' = \text{mín}\{\delta, \delta'\} > 0$, tendremos que $\|f(X) - L\| < \varepsilon = \frac{1}{2}\|L - L'\|$ y $\|f(X) - L'\| < \varepsilon = \frac{1}{2}\|L - L'\|$ siempre que $\|X - X_0\| < \delta''$ con $X \in D$. Usando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\|L - L'\| \leq \|L - f(X)\| + \|f(X) - L'\| < \tfrac{1}{2}\|L - L'\| + \tfrac{1}{2}\|L - L'\| = \|L - L'\|,$$

para cualquier $X \in D$ tal que $\|X - X_0\| < \delta''$. Esto nos da una contradicción, que proviene de haber supuesto que existen dos límites distintos.

Observaciones 1.3.3

1. Acabamos de ver que el límite, si existe, es único. Por tanto, suele usarse la siguiente notación para hacer referencia a él:

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in D}} f(X), \quad \text{o abreviadamente } \lim_{X \to X_0} f(X),$$

   entendiendo que los puntos X que tomamos tienen que estar en el dominio de la función f.

2. En la definición de límite, f puede estar definida en el punto X_0 o no, aunque en este último caso X_0 debe estar en la frontera de D.

3. Las propiedades del cálculo de límites de una variable pueden también extenderse a funciones de varias variables.

4. Si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son las funciones componentes de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, el límite de f cuando X tiende a X_0 existe si, y sólo si, existe el límite de cada una de las componentes de f, en cuyo caso

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = \left(\lim_{X \to X_0} f_1(X), \lim_{X \to X_0} f_2(X), \ldots, \lim_{X \to X_0} f_m(X) \right).$$

   Por tanto, el cálculo de límites de funciones de varias variables se reduce a calcular límites de funciones escalares.

Problemas 1.3.4

1. *Sea* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. *Calcular*

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} f(x,y,z).$$

SOLUCIÓN: $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} f(x,y,z)=1^2+2^2+3^2=14.$ □

2. *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y)=(x^2,y^2,\cos x)$. *Calcular*

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y).$$

SOLUCIÓN: Las tres funciones componentes de f son

$$f_1(x,y)=x^2,\qquad f_2(x,y)=y^2,\qquad f_3(x,y)=\cos x.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)&=\left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2,\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} y^2,\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \cos x\right)\\&=(0,1,1).\end{aligned}$$ □

1.3.2 Límites de funciones de dos variables

En lo que sigue, nos centraremos en el caso particular de funciones de dos variables. La idea subyacente en el cálculo del límite,

$$\lim_{X\to X_0} f(X),$$

es observar qué pasa con $f(X)$ cuando tomamos puntos $X\in D$ muy próximos a X_0.

En el caso de funciones de una variable esta operación se simplifica bastante ya que para tomar valores próximos a un punto $x_0\in\mathbb{R}$ sólo tenemos dos opciones:

1) Tomar un valor de x muy próximo a x_0 con $x>x_0$ (se dice entonces que nos acercamos a x_0 por la derecha y se escribe $x\to x_0^+$).

2) Tomar un valor de x muy próximo a x_0 con $x<x_0$ (se dice entonces que nos acercamos a x_0 por la izquierda y se escribe $x\to x_0^-$).

Además sabemos que si ambos límites laterales existen, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Es decir, en el caso de que los límites laterales existan pero sean distintos se concluye que no existe el límite de la función.

En cambio, si queremos tomar puntos $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ muy próximos al punto $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tenemos una infinidad de formas distintas de poder hacerlo. Parece razonable pensar, al igual que ocurría con las funciones de una variable con los límites laterales, que si existe el límite

$$\lim_{X \to X_0} f(X)$$

este sea independiente de la forma en que nos acerquemos al punto X_0.

Problema 1.3.5 *¿Existe* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$*?*

SOLUCIÓN: El dominio de la función $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ es $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$. Por tanto, podemos acercarnos al $(0, 0)$ tomando puntos de la forma $(x, 0)$ con $x \to 0$. En tal caso, se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

De igual forma, podemos acercarnos al $(0, 0)$ tomando puntos de la forma $(0, y)$ con $y \to 0$. En este caso, se obtiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Por tanto, concluimos que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$. $\square$

Esta técnica de acercarnos a X_0 por direcciones distintas puede ser útil para demostrar que no existe el límite. Sin embargo, no lo es tanto a la hora de probar que existe. El siguiente ejemplo nos muestra un caso en el que al acercarnos al origen tomando puntos sobre los dos ejes coordenados se obtiene el mismo resultado pero al hacerlo tomando puntos sobre la recta $y = x$ éste es distinto.

Problema 1.3.6 *Estudiar la existencia del límite* $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*, siendo*

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2.$$

SOLUCIÓN: El dominio de $f(x,y)$ es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si escogemos puntos sobre los dos ejes coordenados para aproximarnos al punto $(0,0)$ tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)^2 = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right)^2 = 1.$$

Sin embargo, si nos acercamos al $(0,0)$ tomando puntos de la forma (x,x) con $x\to 0$, se obtiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0.$$

Por tanto, se puede afirmar que no existe el límite. □

1.3.3 Límites direccionales

Supongamos que queremos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Una forma fácil de acercarnos al punto (x_0,y_0) es tomar puntos situados sobre rectas de la forma $y = y_0 + m(x-x_0)$, siempre que dichas rectas estén contenidas en el dominio de la función f para valores de x próximos a x_0. Al límite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=y_0+m(x-x_0)}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f\left(x, y_0+m(x-x_0)\right),$$

se le llama *límite direccional de* f *en el punto* x_0.

De las observaciones anteriores, podemos asegurar que si existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

entonces todos los límites direccionales deben tener el mismo valor L. Este resultado puede servirnos para decidir la NO existencia de límite pero, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo, el hecho de que todos los límites direccionales coincidan tampoco es una garantía de que el límite exista.

Problemas 1.3.7

1. *Decidir sobre la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

   SOLUCIÓN: El dominio de la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ es el conjunto

   $$D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\right\},$$

   lo que significa que podemos acercarnos a $(0,0)$ tomando puntos situados sobre cualquier recta de la forma $y = mx$ con $m \neq -1$. Para $m \neq -1$, se tiene que

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}.$$

   Como los límites direccionales dependen del valor de m, concluimos que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$. □

2. *Estudiar la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

   SOLUCIÓN: En este caso el dominio de la función es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por tanto, podemos acercarnos al $(0,0)$ tomando puntos situados sobre cualquier recta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$. En este caso se tiene que

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0.$$

   Dado que todos los límites direccionales coinciden podría pensarse que existe el límite de la función. Sin embargo, si nos acercamos al punto $(0,0)$ tomando puntos situados sobre la parábola $y = x^2$, se obtiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

lo que nos lleva de nuevo a asegurar que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. □

1.3.4 Límites según una trayectoria

Definición 1.3.8 Una curva o trayectoria en $\mathbb{R}^2$ es una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ dada en componentes por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

La gráfica de la curva es el conjunto $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b]\}$.

Una curva γ en $\mathbb{R}^2$ también puede expresarse mediante las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \end{array} \right. \qquad t \in [a,b],$$

que se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva* γ.

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto $(x_0, y_0) \in \overline{D}$. Consideremos una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que

1) $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algún valor $t_0 \in [a,b]$, lo que significa que el punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$, o dicho de otro modo que la curva γ pasa por el punto (x_0, y_0)

2) y que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in D$ para valores de t próximos a t_0.

Entonces podemos calcular

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)).$$

A dicho límite se le llama *límite de la función f en el punto (x_0, y_0) según la trayectoria dada por la curva* Γ.

■ **Ejemplo 1.3.9 — Límite según una trayectoria** El dominio de la función

$$f(x,y) = \frac{x-1}{x+y-1}$$

es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y-1 \neq 0\}$. Si consideramos la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0,\pi]$, se tiene que

a) $\gamma(0) = (1,0)$.

b) La gráfica de γ, dada por

$$\Gamma = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [0,\pi]\},$$

es la semicircunferencia de centro $(0,0)$ situada por encima del eje OX y está contenida en D para valores de t próximos a 0 (ver figura 1.6).

Por tanto, podemos calcular

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{\cos t + \operatorname{sen} t - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-\operatorname{sen} t}{-\operatorname{sen} t + \cos t} = 0.$$

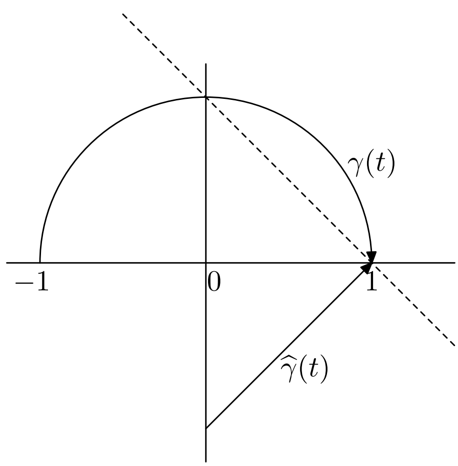


Figura 1.6: Límite según dos trayectorias que pasan por el punto $(1,0)$.

De igual forma, podemos considerar la curva $\widehat{\gamma}(t) = (1+t, t)$ con $t \in [-1, 0]$. Nuevamente se tiene que $\widehat{\gamma}(0) = (1, 0)$ y su gráfica, $\widehat{\Gamma}$, es un segmento de recta contenido en D para valores de t próximos a 0 (ver figura 1.6). En este caso, se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in\widehat{\Gamma}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(1+t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Como hemos encontrado dos trayectorias para las cuales se obtienen límites distintos concluimos, nuevamente, que no existe el límite de la función f en el punto $(1,0)$. ■

1.3.5 Cambio a coordenadas polares

Llegados a este punto cabe preguntarse: ¿existe alguna forma de asegurar cuándo existe el

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ ?$$

☞ Si al considerar diferentes trayectorias que pasan por el punto (x_0, y_0), por ejemplo rectas, parábolas, curvas en general, etc., obtenemos siempre el mismo valor del límite, digamos L, podemos "sospechar" que dicho límite existe y vale L. En este caso, la forma de estar seguro sería aplicar la definición 1.3.2 (lo cual no resulta aconsejable).

Una alternativa para probar la existencia de límite es realizar el cambio a coordenadas polares centradas en el punto (x_0, y_0):

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \rho\cos\theta, \\ y = y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{array}\right. \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

tal y como se muestra en la figura 1.7. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

por lo que $(x,y) \to (x_0,y_0)$ es equivalente a $\rho \to 0$.

En la práctica, esto supone que podemos reducir el cálculo del límite de una función de dos variables al cálculo del límite de una función de una variable.

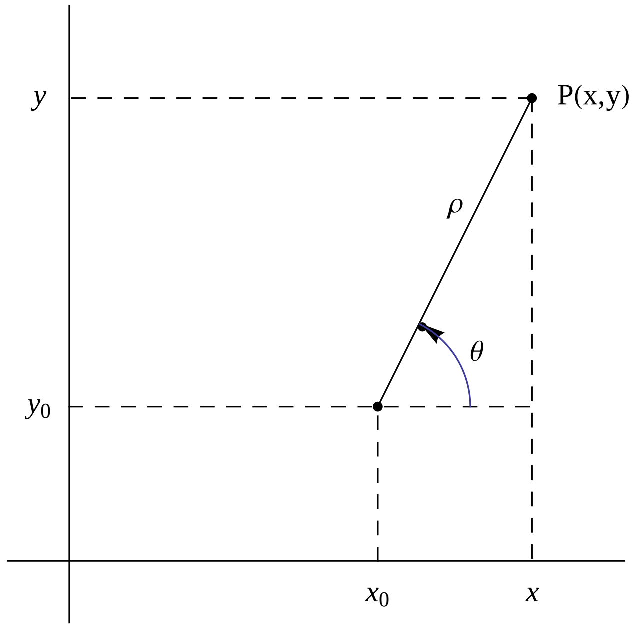


Figura 1.7: Cambio a coordenadas polares centradas en el punto (x_0, y_0).

Haciendo el cambio a coordenadas polares se tendrá:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \left[\begin{array}{l} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta), \tag{1.3}$$

donde $F(\rho,\theta) = f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\operatorname{sen}\theta)$ es la función obtenida al hacer el cambio de variable en la función $f(x,y)$.

☞ Para un valor fijo del ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$, el límite (1.3) es equivalente a calcular el límite direccional siguiendo la recta $y = y_0 + m(x - x_0)$ con $m = \operatorname{tg}\theta$. Observemos que en el caso $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ se sigue la recta vertical $x = x_0$.

Al calcular el límite (1.3) pueden presentarse dos casos:

Caso 1: El valor de $\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$ depende del ángulo θ.

Esto significa que el valor del límite depende de la dirección con la que nos acerquemos al punto (x_0, y_0). Concluimos, por tanto, que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Problema 1.3.10 *Mediante un cambio a coordenadas polares, estudiar la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Como el límite depende del valor de θ, podemos asegurar que el límite no existe. □

Caso 2: El valor de $\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = L$ no depende del ángulo $\theta \in [0,2\pi]$.

Esto significa que el valor del límite no depende de la dirección con la que nos acercamos al punto (x_0,y_0). ¿Significa esto que podemos asegurar la existencia del

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)?$$

Desafortunadamente, la respuesta es no, como se pone de manifiesto en el siguiente problema resuelto.

Problema 1.3.11 *Mediante el cambio a coordenadas polares, estudiar la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

SOLUCIÓN:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta} = 0,$$

para cualquier $\theta \in [0,2\pi]$. Podría pensarse que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0.$$

Sin embargo, si tomamos puntos sobre la parábola $y=x^2$ con $x\to 0$, se obtiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2},$$

lo que nos lleva de nuevo a asegurar que no existe el límite. □

Resultado 1.3.12 (Condiciones suficientes para asegurar la existencia de límite mediante el cambio a coordenadas polares)
Supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \left[\begin{array}{l} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta),$$

y que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = L$, independiente del valor de $\theta \in [0,2\pi]$.

2) Existe una función $\Psi(\rho)$ tal que

$$|F(\rho,\theta) - L| \leq \Psi(\rho), \qquad \forall\theta \in [0,2\pi].$$

3) $\lim_{\rho\to 0} \Psi(\rho) = 0$.

Entonces, podemos asegurar la existencia del límite, siendo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Problema 1.3.13 *Mediante el cambio a coordenadas polares, estudiar la existencia de* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio a coordenadas polares se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta)}{\rho}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta).$$

Veamos que se cumplen las condiciones dadas en el resultado 1.3.12:

1) $L = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^3\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta) = 0$, para cualquier $\theta \in [0,2\pi]$.

2) $|F(\rho,\theta) - L| = |\rho^2(\cos^3\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta)| = \rho^2|\cos^3\theta + 2\,\mathrm{sen}^3\,\theta| \leq 3\rho^2 = \Psi(\rho)$.

3) $\lim_{\rho\to 0} \Psi(\rho) = \lim_{\rho\to 0} 3\rho^2 = 0$.

Por tanto, podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \qquad \square$$

☞ El problema resuelto 1.3.13 es un caso particular de una situación más general que se presenta con relativa frecuencia cuando se trata de probar la existencia de límites mediante el cambio a coordenadas polares. Se trata del caso en que

$$|F(\rho,\theta)-L| = \Phi(\theta)\Psi(\rho). \tag{1.4}$$

En tal caso, para probar la existencia de límite bastará con comprobar que la función $\Phi(\theta)$ está acotada y que

$$\lim_{\rho\to 0}\Psi(\rho) = 0.$$

Observemos que en el problema 1.3.13 se cumple (1.4) con

$$\Phi(\theta) = |\cos^3\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta| \text{ y } \Psi(\rho) = \rho^2.$$

Resultado 1.3.14 (Un caso particular del resultado 1.3.12) Supongamos que queremos calcular el límite (1.3) y que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = L$, independiente del valor de $\theta\in[0,2\pi]$.

2) $|F(\rho,\theta)-L| = \Phi(\theta)\Psi(\rho)$, donde $\Phi(\theta)$ es una función acotada para $\theta\in[0,2\pi]$ y $\Psi(\rho)$ es una función tal que

$$\lim_{\rho\to 0}\Psi(\rho) = 0.$$

Entonces, existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

☞ En la mayoría de los ejemplos anteriores hemos cálculado el límite de una función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

¿Cómo calcular el límite de una función $f(x,y)$ en un punto cualquiera, es decir, cómo calcular

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \ ?$$

Obviamente, podemos seguir la misma estrategia que hemos utilizado para el caso $(0,0)$ pero teniendo en cuenta que, por ejemplo, si queremos calcular los límites direccionales hemos de tomar rectas que pasen por el punto (x_0,y_0) y, para el caso del cambio a polares, hemos de utilizar un cambio a polares centrado en dicho punto. Sin embargo, resulta más ventajoso realizar un cambio de variables que reduzca el cálculo del límite en (x_0,y_0) al caso de un límite en $(0,0)$. Esto se consigue haciendo el cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

De (1.5) se tiene que $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, de donde se concluye que

$$(x,y) \to (x_0,y_0) \iff (X,Y) \to (0,0).$$

Entonces, haciendo el cambio de variables dado en (1.5) se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \left[\begin{array}{l} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{array} \right] = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X+x_0, Y+y_0).$$

Problema 1.3.15 *Estudiar la existencia de* $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2-3y^2+4x+6y-1}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}}$.

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio de variable $x = X-1$, $y = Y+1$, el límite se transforma en

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x^2-3y^2+4x+6y-1}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}} &= \left[\begin{array}{l} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{2X^2-3Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \left[\begin{array}{l} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho(2\cos^2\theta - 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta) = 0. \end{aligned}$$

Para determinar el valor del último límite, hemos usado el resultado 1.3.14 con la función acotada $\Phi(\theta) = |2\cos^2\theta - 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta|$ y la función $\Psi(\rho) = \rho$, que tiene límite cero cuando ρ tiende a 0. □

1.3.6 Continuidad

La misma definición de continuidad para funciones de una variable puede ahora servir para funciones de varias variables.

Definición 1.3.16 (Función continua) Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $X_0 \in D$. Decimos que f es continua en X_0 si, y sólo si,

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0).$$

Si decimos simplemente que f es continua, queremos decir que es continua en todo punto de D.

☞ Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ viene dada por

$$f(X) = (f_1(X), \ldots, f_m(X)),$$

entonces f es continua en $X_0 \in D$ si y solo si cada una de las funciones componentes $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (i = 1, \ldots, m)$ es continua en X_0.

■ **Ejemplos 1.3.17 — Contuniudad de funciones**

1. La función $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{1+y^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
2. La función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ es continua en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$.
3. La función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Ahora bien, dado que

   $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0,$$

   podemos extender la función f de manera que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$, definiendo $f(0,0) = 0$. ■

1.4 Diferenciación de funciones de varias variables

1.4.1 Derivadas parciales

En el caso de una función de una variable $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada de f en un punto $a \in \operatorname{int}(D)$ nos mide la variación de la función con respecto a la variable independiente cuando nos aproximamos al punto a,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Gráficamente, la derivada $f'(a)$ se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $A = (a, f(a))$, como se muestra en la figura 1.8.

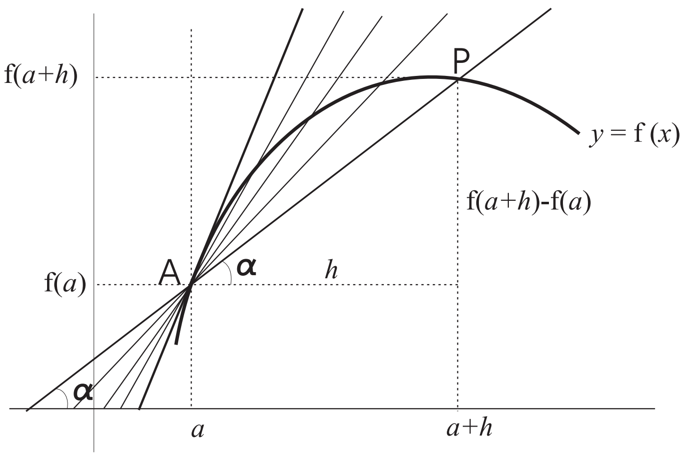


Figura 1.8: Intepretación geométrica de la derivada.

Derivadas parciales de una función de 2 variables

Consideremos ahora una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea (a, b) un punto interior de D. Como ya hemos indicado al hablar de límites de funciones, en el caso de funciones de dos variables podemos acercarnos al punto (a, b) por muchos “caminos". En particular, podemos considerar aproximarnos al punto (a, b) a través de puntos de la forma (x, b) con $x \to a$ (es decir, tomando puntos situados en la recta $y = b$). En este caso podemos estudiar la variación de la función de una variable $f(x, b)$ cuando $x \to a$, es decir, podemos calcular

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

Si este límite existe lo llamaremos *derivada parcial de la función f con respecto a la variable x en el punto* (a,b) y lo notaremos por $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

De igual forma, si nos acercamos al punto (a,b) tomando puntos de la forma (a,y), con $y \to b$, (es decir, puntos situados en la recta $x=a$), tendremos una función de una variable, $f(a,y)$, y podemos plantearnos igualmente estudiar

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Si este límite existe lo llamaremos *derivada parcial de la función f con respecto a la variable y en el punto* (a,b) y lo notaremos por $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

■ **Ejemplo 1.4.1 — Derivadas parciales** Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = 2x^2y^2 - 5y$$

y supongamos que queremos calcular la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, es decir, queremos calcular la variación de la función f respecto de la variable x en el punto $(1,2)$. Para ello lo primero que hacemos es fijar la variable y asignándole el valor $y=2$. De esta forma obtenemos

$$f(x,2) = 8x^2 - 10.$$

Observemos que se trata de una función de una variable. Pues bien, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ es precisamente la derivada de la función $f(x,2)$ en el punto $x=1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,2)}{\mathrm{d}x}\right\rfloor_{x=1} = 16x\rfloor_{x=1} = 16.$$

Si queremos ahora calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$, el procedimiento es similar. Primero fijamos la variable x asignándole el valor $x=1$:

$$f(1,y) = 2y^2 - 5y,$$

con lo que se obtiene una función en la variable y. Entonces, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ es la derivada de la función $f(1,y)$ en el punto $y=2$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \left.\frac{\mathrm{d}f(1,y)}{\mathrm{d}y}\right]_{y=2} = 4y-5\rfloor_{y=2} = 3. \qquad \blacksquare$$

Observaciones 1.4.2

1. Las derivadas parciales representan la variación de la función f en el punto (a,b) a lo largo de los ejes OX y OY, respectivamente. Geométricamente, las derivadas parciales en un punto (a,b) nos proporcionan la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a,b,f(a,b))$ a las curvas obtenidas por la intersección de la superficie $z=f(x,y)$ con los planos $y=b$ y $x=a$, respectivamente (ver figura 1.9).

2. Según el manual de Matemáticas que utilicemos podemos encontrarnos con diferentes notaciones para indicar las derivadas parciales de una función de varias variables. Las notaciones más usuales son:

$$\mathrm{D}_1 f(a,b) = f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \mathrm{D}_2 f(a,b) = f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

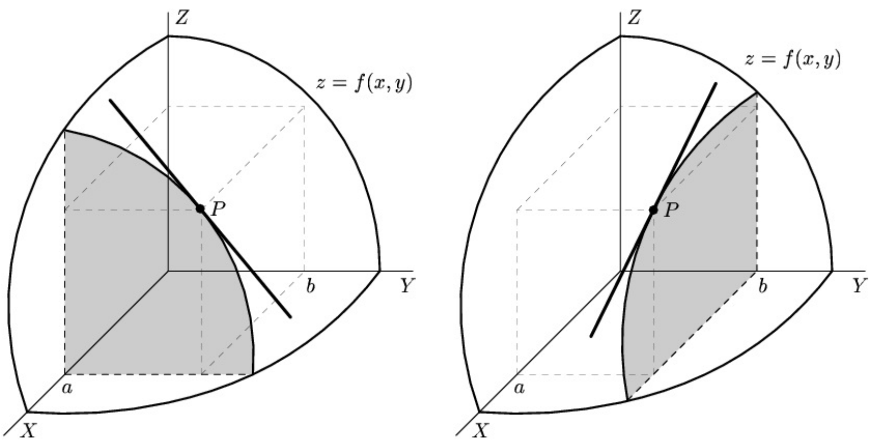


Figura 1.9: Interpretación geométrica de las derivadas parciales de la función $z=f(x,y)$ en el punto (a,b).

Funciones derivadas parciales

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U un conjunto abierto) y las derivadas parciales existen en todo punto del dominio U, entonces podemos definir las funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \end{aligned}$$

que denominaremos *funciones derivadas parciales de la función f*.

A efectos de cálculo, la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la función derivada de f respecto de la variable x considerando la variable y como una constante y, análogamente, la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ es la función derivada de f respecto de la variable y considerando la variable x como una constante.

■ Ejemplos 1.4.3 — Funciones derivadas parciales

1. Sea la función $f(x,y) = x^2y + y^3$. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ suponemos que la variable y es una constante y derivamos respecto a x,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy.$$

   Análogamente, para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ consideramos la variable x como una constante y derivamos respecto a y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

2. En la mayoría de los casos para calcular las derivadas parciales de una función en un punto (a,b) bastará evaluar las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $x = a$ e $y = b$. Así, en el ejemplo anterior, mediante sustitución directa, podemos evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(1,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2xy\Big]_{\substack{x=1\\y=0}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = x^2 + 3y^2\Big]_{\substack{x=1\\y=0}} = 1.$$

3. Sin embargo, en otros casos, para calcular las derivadas parciales de una función en un punto, será necesario aplicar directamente la definición.

Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Observemos que no podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, en el punto $(0,0)$, por sustitución directa en las expresiones anteriores. Será necesario, por tanto, recurrir a la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Finalmente, podemos escribir las funciones derivadas parciales como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

■

Derivadas parciales de una función de n variables

La estrategia utilizada en el ejemplo 1.4.3 puede extenderse fácilmente para el cálculo de derivadas parciales de funciones de n variables.

Problema 1.4.4 *Consideremos la función $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y,z) = 2x^2y^2z - 5yz^2 + 3xz^3.$$

Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(1,0,1)$.

SOLUCIÓN:

1. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1)$ fijamos las variables y, z asignándoles los valores $y=0$, $z=1$. Entonces se obtiene la función $f(x,0,1)=3x$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,0,1)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=1} = 3.$$

2. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1)$ fijamos las variables x, z asignándoles los valores $x=1$, $z=1$. Entonces se obtiene la función $f(1,y,1) = 2y^2 - 5y + 3$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = \left.\frac{\mathrm{d}f(1,y,1)}{\mathrm{d}y}\right]_{y=0} = 4y-5\rfloor_{y=0} = -5.$$

3. Finalmente, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1)$ fijamos las variables x, y asignándoles los valores $x=1$, $y=0$, obteniéndose la función

$$f(1,0,z) = 3z^3.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = \left.\frac{\mathrm{d}f(1,0,z)}{\mathrm{d}z}\right]_{z=1} = 9z^2\rfloor_{z=1} = 9. \qquad \square$$

Podemos entonces establecer el concepto de derivada parcial para el caso de funciones de n variables como sigue:

Definición 1.4.5 (Derivada parcial) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la derivada parcial de f con respecto a la variable i-ésima, $i = 1, \ldots, n$, en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \operatorname{int}(D)$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \stackrel{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h},$$

en caso de que dicho límite exista.

1.4.2 Matriz derivada

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ una función de n-variables y m-componentes. Entonces podemos calcular las derivadas parciales de cada una de las funciones componentes f_i, $i = 1, \ldots, m$, respecto de cada una de las variables x_j, $j = 1, \ldots, n$, en un punto $X_0 \in \operatorname{int}(D)$. De esta forma obtenemos $m \times n$ valores que podemos disponer en forma matricial. El resultado es lo que llamaremos *matriz derivada de* la función f en el punto X_0 y la notaremos por $\mathrm{D}f(X_0)$.

Definición 1.4.6 (Matriz derivada) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

y tomemos $X_0 \in \operatorname{int}(D)$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$ existen para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, se define la matriz derivada de f en el punto X_0 a la matriz de orden $m \times n$ dada por

$$\mathrm{D}f(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

■ **Ejemplos 1.4.7 — Matriz derivada**

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, xy)$. Las funciones componentes de f son

$$f_1(x, y) = x + y, \qquad f_2(x, y) = xy.$$

Entonces,

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

La matriz derivada de la función f en el punto $(1,0)$ vendrá dada por

$$\mathrm{D}f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Consideremos la función $f(x,y,z) = (x \operatorname{sen} z, y \cos z)$. Las funciones componentes de f son

$$f_1(x,y,z) = x \operatorname{sen} z, \qquad f_2(x,y,z) = y \cos z.$$

Entonces,

$$\mathrm{D}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} z & 0 & x \cos z \\ 0 & \cos z & -y \operatorname{sen} z \end{pmatrix}.$$

La matriz derivada de f en el punto $X_0 = (0,0,\pi)$ vendrá dada por

$$\mathrm{D}f(0,0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

1.4.3 Vector gradiente

En el caso particular $m = 1$, la matriz derivada $\mathrm{D}f(X_0)$ es una matriz fila de $1 \times n$ que recibe un nombre especial.

Definición 1.4.8 (Vector gradiente) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y tomemos $X_0 \in \operatorname{int}(D)$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ existen para $j = 1, \dots, n$, se define el vector gradiente de f en X_0, y se denota por $\nabla f(X_0)$, como el vector

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right).$$

■ **Ejemplo 1.4.9 — Vector gradiente** Sea $f(x,y,z) = xy^2$. Entonces

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y^2, 2xy, 0).$$

Si queremos obtener el vector gradiente en el punto $(1,1,2)$ basta sustituir,

$$\nabla f(1,1,2) = (1,2,0).$$ ■

1.4.4 Funciones diferenciables

En funciones de una variable, se dice que f es diferenciable en x_0, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{1.6}$$

Este concepto puede generalizarse sin dificultad al caso de funciones de varias variables utilizando en lugar de $f'(x_0)$ la matriz derivada $\mathrm{D}f(X_0)$.

Definición 1.4.10 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con D un conjunto abierto. Decimos que f es diferenciable en $X_0 \in D$, si

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\|f(X) - f(X_0) - (X - X_0) \cdot \mathrm{D}f(X_0)^T\|}{\|X - X_0\|} = 0. \tag{1.7}$$

Observaciones 1.4.11

1. $\mathrm{D}f(X_0)^T$ denota la transpuesta de la matriz derivada de f en X_0.
2. El producto matricial $(X - X_0) \cdot \mathrm{D}f(X_0)^T$ está bien definido. En efecto, $(X - X_0)$ es una matriz de orden $1 \times n$ y $\mathrm{D}f(X_0)^T$ es una matriz de orden $n \times m$. El resultado es una matriz de orden $1 \times m$ al igual que $f(X)$ y $f(X_0)$.
3. Puede probarse que si f es diferenciable en el punto X_0, entonces f es continua en X_0.

A continuación damos algunas propiedades que son similares a las correspondientes para las derivadas de funciones reales de una variable.

Propiedades 1.4.12 Sean $f,g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $X_0 \in \operatorname{int}(D)$ y sea λ un número real. De la definición de función diferenciable se deducen las siguientes propiedades:

i) La función $f+g$ es diferenciable en X_0 y

$$\mathrm{D}(f+g)(X_0) = \mathrm{D}f(X_0) + \mathrm{D}g(X_0).$$

ii) La función λf es diferenciable en X_0 y

$$\mathrm{D}(\lambda f)(X_0) = \lambda \mathrm{D}f(X_0).$$

iii) Si $m = 1$, entonces la función fg es diferenciable en X_0 y

$$\mathrm{D}(fg)(X_0) = g(X_0)\mathrm{D}f(X_0) + f(X_0)\mathrm{D}g(X_0).$$

iv) Si $m = 1$ y $g(X_0) \neq 0$, entonces la función f/g es diferenciable en X_0 y

$$\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right)(X_0) = \frac{g(X_0)\mathrm{D}f(X_0) - f(X_0)\mathrm{D}g(X_0)}{[g(X_0)]^2}.$$

Obsérvese que todas las igualdades que aparecen son igualdades matriciales.

☞ Para el caso de funciones reales de una variable, la igualdad (1.6) se puede poner en la forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Es decir, que se cumpla (1.6) es equivalente a que exista $f'(x_0)$. De ahí que, para funciones de una variable, los conceptos de derivabilidad y diferenciabilidad sean equivalentes. No ocurre lo mismo en el caso de funciones de n variables: la existencia de la matriz $\mathrm{D}f(X_0)$ no nos asegura que se cumpla (1.7).

Teorema 1.4.13 (Condiciones suficientes de diferenciabilidad) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con D un conjunto abierto, y sea $X_0 \in D$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, y son continuas en un entorno $B_r(X_0) \subseteq D$. Entonces f es diferenciable en X_0.

Problemas 1.4.14

1. *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2+1}$. *Demostrar que* f *es diferenciable en todos los puntos* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   SOLUCIÓN: Las derivadas parciales

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+1)\operatorname{sen} y - 2x^2 \operatorname{sen} y}{(x^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\cos y}{x^2+1}$$

   son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y, por tanto, f es diferenciable. □

2. *Probar que la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   admite derivadas parciales en $(0,0)$ *y sin embargo no es diferenciable en* $(0,0)$.

   SOLUCIÓN: En efecto,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0,$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0.$$

   Ahora bien, f no es continua en $(0,0)$ ya que en el problema 1.3.10 vimos que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Por tanto, f no puede ser diferenciable en $(0,0)$. □

1.4.5 Derivadas direccionales

Definición 1.4.15 (Derivada direccional) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $X_0 \in \operatorname{int}(D)$. Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se define la derivada direccional de f en el punto X_0 según la dirección del vector $\mathbf{v}$ como siguiente límite, en caso de que exista,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) := \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(X_0+t\mathbf{v}) - f(X_0)}{t}. \tag{1.8}$$

☞ La derivada direccional $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0)$ mide la variación de la función f en la dirección del vector $\mathbf{v}$. Si $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) > 0$, entonces la función f crece al tomar puntos próximos a X_0 en la dirección del vector $\mathbf{v}$, es decir, puntos de la forma $X_0 + t\mathbf{v}$ con t suficientemente pequeño y positivo. Por el contrario, si $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) < 0$, entonces la función f decrece en la dirección del vector $\mathbf{v}$. El valor $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0)$ nos da, en definitiva, una magnitud del orden del crecimiento o decrecimiento de la función f en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

Un caso interesante se produce cuando $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) = 0$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. En este caso, se dice que X_0 es un punto crítico de la función. El estudio de los puntos críticos es clave para la determinación de máximos y mínimos locales de la función f.

Problemas 1.4.16

1. *Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2 y$ en el punto $(1,1)$ según la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,2)$.*

   SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}$, aplicando la definición de derivada direccional, se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{t\to 0^+} \frac{f((1,1)+t(1,2)) - f(1,1)}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1+t, 1+2t) - f(1,1)}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^2(1+2t) - 1}{t} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^3 + 5t^2 + 4t}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{t\to 0} 4 + 5t + 2t^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$
□

2. *Consideremos la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Probar que para cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ existe la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ y calcularla.*

   SOLUCIÓN: Dado que $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, aplicando la definición, se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \lim_{t\to 0^+} \frac{f((0,0)+t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}}{t} = 1.
\end{aligned}
$$
□

☞ Usualmente la definición de la derivada direccional se da en un vector $\mathbf{v}$ unitario, esto es, $\|\mathbf{v}\| = 1$, con lo que (1.8) queda en la forma

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(X_0 + t\mathbf{v}) - f(X_0)}{t}.$$

Si el vector $\mathbf{v}$ no es unitario, se define la derivada direccional de f según el vector $\mathbf{v}$ como la derivada direccional según el vector unitario $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, es decir,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(X_0 + t\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) - f(X_0)}{t}. \tag{1.9}$$

Si en (1.9) hacemos el cambio de variable $t = u\|\mathbf{v}\|$ concluimos que la definición (1.9) es equivalente a la dada en (1.8). A efectos de cálculo resulta más ventajoso utilizar (1.8).

Una situación especial se produce cuando tomamos como vector $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ es el vector unitario de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, \overset{i}{\widehat{1}}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Si $X_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{e}_i} f(X_0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(X_0 + t\mathbf{e}_i) - f(X_0)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, \ldots, a_n)}{t},
\end{aligned}$$

que coincide con la definición de la derivada parcial de f respecto de la variable x_i en el punto X_0 (ver la definición 1.4.5), salvo por el hecho de que para la derivada direccional hay que calcular el límite cuando $t \to 0^+$ y para la derivada parcial hay que calcular el mismo límite cuando $t \to 0$. Obviamente, si existe el límite cuanto $t \to 0$ también existe el límite cuando $t \to 0^+$ y ambos deben coincidir. Luego, si existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, entonces

$$\mathrm{D}_{\mathbf{e}_i} f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0).$$

Sin embargo, las derivadas direccionales $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0)$ pueden existir para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y no existir las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$. Por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, hemos probado en el problema

1.4.16 que las derivadas parciales $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ existen para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, las derivadas parciales de f no existen en el punto $(0,0)$. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe, y un cálculo similar prueba que tampoco existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

El siguiente resultado establece una relación entre las derivadas direccionales y las derivadas parciales en el caso de que la función f tenga derivadas parciales continuas en un entorno del punto X_0.

Teorema 1.4.17 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $X_0 \in \operatorname{int}(D)$. Si las derivadas parciales de f son continuas en un entorno del punto X_0, entonces para cualquier vector unitario $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ existe la derivada direccional $\mathrm{D}_{\mathbf{v}}f(X_0)$ y, además,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)v_n = \nabla f(X_0)\cdot \mathbf{v}, \tag{1.10}$$

donde “$\cdot$” denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

☞ Si el vector $\mathbf{v}$ no es unitario, podemos aplicar la igualdad (1.10) al vector $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ quedando en la forma

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}f(X_0) = \nabla f(X_0)\cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\nabla f(X_0)\cdot \mathbf{v}. \tag{1.11}$$

Problema 1.4.18 *Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2y$ en el punto $(1,1)$ según la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,2)$.*

SOLUCIÓN: Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2,$$

son continuas en $\mathbb{R}^2$, por tanto, dado que el vector $\mathbf{v}$ no es unitario, podemos aplicar la fórmula (1.11) para calcular la derivada direccional. En nuestro caso,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy, x^2) \;\Rightarrow\; \nabla f(1,1) = (2,1).$$

Por tanto, aplicando (1.11),

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(1,1) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\nabla f(1,1)\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\cdot(1,2) = \frac{4}{\sqrt{5}}. \qquad \square$$

☞ Si aplicamos (1.11) tomando como vector $\mathbf{v} = \nabla f(X_0)$, y teniendo en cuenta que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, se obtiene que la derivada de la función f en el punto X_0 según la dirección del vector gradiente de f en X_0 viene dada por

$$\mathrm{D}_{\nabla f(X_0)} f(X_0) = \frac{1}{\|\nabla f(X_0)\|}\nabla f(X_0)\cdot\nabla f(X_0) = \|\nabla f(X_0)\|. \tag{1.12}$$

☞ A partir de (1.11) se obtiene directamente que si $f : D \subseteq \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto $X_0 \in \mathrm{int}(D)$, entonces

$$\mathrm{D}_{-\mathbf{v}} f(X_0) = -\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0), \quad \text{para todo } \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz y (1.11) nos dan el siguiente resultado:

Resultado 1.4.19 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $X_0 \in \mathrm{int}(D)$. Si f tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto X_0, entonces para cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$-\|\nabla f(X_0)\| \le \mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) \le \|\nabla f(X_0)\|. \tag{1.14}$$

Finalmente, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.4.20 (Dirección de crecimiento más rápido) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $X_0 \in \mathrm{int}(D)$. Si f tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto X_0, entonces se cumple que

1. Si $\nabla f(X_0) = \mathbf{0}$, entonces $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0) = 0$, para cualquier $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.
2. El vector gradiente $\nabla f(X_0)$ nos da la dirección de máximo crecimiento de la función f en el punto X_0, es decir, el valor máximo de $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0)$ es $\|\nabla f(X_0)\|$ que es, precisamente, la derivada direccional de f en el punto X_0 según el vector $\nabla f(X_0)$.
3. Análogamente, la dirección de máximo decrecimiento de f en el punto X_0 viene dada por el vector $-\nabla f(X_0)$. El valor mínimo de $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(X_0)$ es $-\|\nabla f(X_0)\|$.

Si aplicamos el teorema 1.4.20 al caso particular de una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde f es una función con derivadas parciales continuas, y tomamos el punto $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$, entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un punto que está situado sobre la superficie $z = f(x, y)$. El teorema 1.4.20 nos dice que la dirección de descenso más rápido desde el punto P viene dada precisamente por el vector $-\nabla f(x_0, y_0)$, es decir, si en el punto P situamos una bola esta se movería en la dirección dada por el vector $-\nabla f(x_0, y_0)$.

1.4.6 Regla de la cadena

Para funciones de una variable la propiedad conocida como *regla de la cadena* nos decía que si $z = f(y)$ e $y = g(x)$ entonces $z = f(g(x))$, verificándose que

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

La siguiente propiedad nos proporciona una generalización de la regla de la cadena para funciones de varias variables.

Resultado 1.4.21 (Regla de la cadena) Sean las funciones $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, con U y V abiertos y tales que $g(U) \subset V$.

Consideremos la función $h : U \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(X) = (f \circ g)(X) = f(g(X))$.

$$\begin{tikzcd}
U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] & V \subseteq \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \\
X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & Y = g(X) \arrow[r] & f(g(X))
\end{tikzcd}$$

Supongamos que g es diferenciable en $X_0 \in U$ y f es diferenciable en $Y_0 = g(X_0) \in V$. Entonces $h = f \circ g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en X_0 y

$$\mathrm{D}h(X_0) = \mathrm{D}(f \circ g)(X_0) = \mathrm{D}f(Y_0) \cdot \mathrm{D}g(X_0)$$

donde "·" representa el producto de matrices.

Nótese que $\mathrm{D}(f \circ g)(X_0)$ representa una matriz de orden $p \times n$ mientras que $\mathrm{D}f(Y_0)$ es de orden $p \times m$ y $\mathrm{D}g(X_0)$ es de orden $m \times n$, concordando, por tanto, los órdenes de las matrices.

■ **Ejemplos 1.4.22 — Regla de la cadena**

1. Sean $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por $g(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(u,v,w)=(u+v,v-w)$. Entonces

$$\begin{array}{ccccc} (x,y) & \xrightarrow{g} & (x,y,x^2+y^2) & \xrightarrow{f} & (x+y,y-x^2-y^2) \\ & & (u,v,w) & \longrightarrow & (u+v,v-w) \end{array}$$

luego la función $h=f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ vendrá dada por

$$h(x,y)=(x+y,y-x^2-y^2).$$

Observemos que hacer la composición $f\circ g$ equivale simplemente a efectuar el cambio de variable

$$u=x,\qquad v=y,\qquad w=x^2+y^2$$

en la función f. Comprobemos que se cumple la regla de la cadena:

$$\mathrm{D}h=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y}\,\frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2x & 1-2y\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}g=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2x & 2y\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\mathrm{D}f\cdot\mathrm{D}g=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2x & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2x & 1-2y\end{pmatrix}=\mathrm{D}h.$$

2. Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2$. Entonces

$$\begin{array}{ccccc} (r,\theta) & \xrightarrow{g} & (r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta) & \xrightarrow{f} & r^2 \\ & & (x,y) & \longrightarrow & x^2+y^2 \end{array}$$

luego la función $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vendrá dada por

$$h(r,\theta) = r^2.$$

Observemos que hacer la composición $f \circ g$ equivale simplemente a efectuar el cambio a coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad\qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1.15}$$

en la función f. Comprobemos que se cumple la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}h &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{D}f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \overset{(1.15)}{=} \begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}, \\
\mathrm{D}g &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathrm{D}f \cdot \mathrm{D}g = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{D}h. \quad \blacksquare$$

Regla de la cadena. Primer caso particular

Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Entonces la composición $h = f \circ g$ cumple que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t),$$

donde $g'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ y "$\cdot$" denota el producto escalar de vectores.

En efecto, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{D}f(g(t)) \cdot \mathrm{D}g(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{g(t)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}_{(t)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Problema 1.4.23 *Sea* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ *dada por* $g(t)=(t,t^2,t^3)$ *y sea* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. *Verificar la regla de la cadena para* $f\circ g$.

SOLUCIÓN: Por el camino directo tenemos

$$h(t)=(f\circ g)(t)=f(g(t))=f(t,t^2,t^3)=t^2+(t^2)^2+(t^3)^2=t^2+t^4+t^6,$$

por lo que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2t+4t^3+6t^5.$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\&=2x\cdot 1+2y\cdot 2t+2z\cdot 3t^2=2x+4yt+6zt^2=2t+4t^3+6t^5.\end{aligned}$$ □

El siguiente caso de la regla de la cadena que vamos a estudiar es, tal vez, el que más se nos presente a lo largo del curso. Su aplicación es útil siempre que realicemos un cambio de variables en el espacio; por ejemplo, de cartesianas a esféricas o de cartesianas a a cilíndricas.

Regla de la cadena. Segundo caso particular

Sean ahora $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ con

$$g(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)).$$

Sea $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la composición $f\circ g$ definida por

$$h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)).$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\\\frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},\\\frac{\partial h}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}$$

De nuevo, aplicando el caso general de la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}h(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix}_{g(x,y,z)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} .
\end{aligned}$$

Problemas 1.4.24

1. *Si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ representa el cambio a coordenadas cilíndricas y $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Verificar la regla de la cadena para $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(r,\theta,z) = f(g(r,\theta,z))$.*

   SOLUCIÓN: Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
F(r,\theta,z) &= f(g(r,\theta,z)) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \\
&= r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta + z^2 = r^2+z^2.
\end{aligned}$$

   resultando

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2r, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

   Por otro lado, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} \\
&= 2x\cos\theta + 2y\operatorname{sen}\theta + 2z\cdot 0 = 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta = 2r, \\
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= 2x(-r\operatorname{sen}\theta) + 2y(r\cos\theta) + 2z\cdot 0 \\
&= -2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} = 2x\cdot 0 + 2y\cdot 0 + 2z\cdot 1 = 2z. \qquad \square
\end{aligned}$$

2. *Dadas las funciones $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x,y) = (2x^2, 2y^2)$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(u,v) = (u+v, u-v, uv)$, calcular $\mathrm{D}(f\circ g)(1,1)$.*

SOLUCIÓN: Como $g(1,1) = (2,2)$ resulta

$$\mathrm{D}(f \circ g)_{(1,1)} = \mathrm{D}f(2,2) \cdot \mathrm{D}g(1,1)$$

siendo

$$\mathrm{D}f(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ v & u \end{pmatrix}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}g(1,1) = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 0 & 4y \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\mathrm{D}(f \circ g)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

3. *Aplicar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones:*
   a) $\frac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y) = f(x,u(x,y))$.
   b) $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$, donde $h(x) = f(x,u(x),v(x))$.
   c) $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ y $\frac{\partial h}{\partial z}$, donde $h(x,y,z) = f(u(x,y,z),v(x,y),w(x))$.

SOLUCIÓN:

a) Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,u(x,y)), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u) &\longmapsto f(x,u). \end{aligned}$$

Entonces $h(x,y) = (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x,u(x,y))$, de donde

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathrm{D}f \cdot \mathrm{D}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

b) Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x,u(x),v(x)), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u,v) &\longmapsto f(x,u,v). \end{aligned}$$

Entonces $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x,u(x),v(x))$.

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{D}f \cdot \mathrm{D}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'. \end{aligned}$$

c) Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (u(x,y,z),v(x,y),w(x)), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\longmapsto f(u,v,w). \end{aligned}$$

Entonces, $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= (f \circ g)(x,y,z) = f(g(x,y,z)) \\ &= f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x)). \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

□

4. *Sea la ecuación diferencial $y' = x^2y + e^{xy}$. Calcular y'' utilizando la regla de la cadena.*

   SOLUCIÓN: Observemos que $y = y(x)$. Considerando las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y + e^{xy}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, y(x))$, se tiene

   $$y' = f(x,y(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = h(x),$$

   por lo que aplicando la regla de la cadena,

   $$y'' = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'$$

   y sustituyendo, se obtiene

   $$y'' = 2xy + ye^{xy} + (x^2 + xe^{xy})(x^2y + e^{xy}).$$ □

1.4.7 Derivadas parciales de orden superior

Definición 1.4.25 (Funciones de clase C^1) Se dice que la función $f : U \subseteq R^n \to \mathbb{R}$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^1 si las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, \ldots, n,$$

existen y son continuas en cualquier punto de U.

La derivada parcial de las función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, respecto de la variable x_j, $j = 1, \ldots, n$, en caso de que exista, se denomina *derivada parcial de segundo orden* de la función f respecto de las variables x_i, x_j y se denota por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Si $i = j$, se llaman derivadas parciales *iteradas* y, si $i \neq j$, derivadas parciales *mixtas*.

■ **Ejemplo 1.4.26** Sea $f(x,y) = e^x \cos y$. Entonces, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^x \operatorname{sen} y.$$

■

Definición 1.4.27 (Funciones de clase C^2) Si todas las derivadas parciales de segundo orden de la función f respecto de las variables x_i, x_j, $i, j = 1, \dots, n$, existen y son continuas en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entonces se dice que f es de clase C^2 en U.

Observaciones 1.4.28

1. De igual modo se pueden definir las derivadas parciales de orden superior. Así, por ejemplo, si consideramos $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces podemos definir las derivadas parciales de orden 3 como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right), \qquad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dirá de clase C^k si todas sus derivadas parciales de orden k existen y son continuas en D.
3. En el caso de funciones vectoriales, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por las funciones componentes $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, diremos que f es de clase C^k en D, si todas las funciones componentes f_i son de clase C^k en D.

Se observa que las derivadas parciales mixtas del ejemplo 1.4.26 coinciden. Este hecho no se debe a la forma particular de la función f sino que se trata de un resultado general. El siguiente teorema nos da condiciones para que esto se cumpla.

Teorema 1.4.29 (Teorema de Schwarz) Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces las derivadas parciales de f conmutan, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

1.4.8 Derivación de funciones definidas implícitamente

Los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0 \tag{1.16}$$

representan, por lo general, una curva en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

La ecuación (1.16) se dice que nos proporciona una representación *en forma implícita* de la curva C. En efecto, si pudiéramos despejar, por ejemplo, la variable y en función de x en la forma

$$y = g(x), \qquad x \in D,$$

donde D es un cierto dominio abierto de $\mathbb{R}$, entonces la curva C sería la gráfica de la función g, es decir,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x),\ x \in D\}.$$

En tal caso se dice que la ecuación (1.16) *define de forma implícita a la variable y como función de la variable x.*

En la práctica, dada la ecuación (1.16), no siempre resultará posible despejar una variable, digamos y, en función de la otra. Sin embargo, utilizando de forma adecuada la regla de la cadena se puede deducir una fórmula para calcular la derivada $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, sin el conocimiento explícito de la función $y = g(x)$. En efecto, supongamos que podemos despejar $y = g(x)$, para $x \in D$ (aunque no conozcamos la fórmula para calcularla). Sustituyendo en la ecuación (1.16), obtendríamos una igualdad en la que solamente figura la variable x, es decir,

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in D.$$

Esto nos dice que la función $h(x) = f(x, g(x))$ es idénticamente nula en D y, por tanto, $h'(x) = 0$ para cualquier $x \in D$. Calculando esta derivada por la regla de la cadena se tiene

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Observemos que para que la igualdad anterior tenga sentido hemos de exigir la condición de que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, para $x \in D$.

Teorema 1.4.30 (Teorema de la función implícita para una ecuación con dos variables) Sea la ecuación

$$f(x,y) = 0 \tag{1.17}$$

y tomemos un punto $P = (x_0, y_0)$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) El punto P satisface la ecuación, es decir, $f(x_0,y_0)=0$.

2) Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un entorno del punto P.

3) $\frac{\partial f}{\partial y}(P)\neq 0$.

Entonces existen un entorno abierto $U\subseteq\mathbb{R}$ del punto x_0, un entorno abierto $V\subseteq\mathbb{R}$ del punto y_0 y una función

$$\begin{array}{rccl} g: & U & \longrightarrow & V \\ & x & \longmapsto & y=g(x), \end{array}$$

de clase C^1 tal que

$$f(x,g(x))=0, \quad \text{para todo } x\in U,$$

es decir, la ecuación (1.17) define a la variable y como función de la variable x, siendo $y=g(x)$. En particular, se cumple que $y_0=g(x_0)$. Además,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{para todo } x\in U. \tag{1.18}$$

Observaciones 1.4.31

1. La condición 1), $f(x_0,y_0)=0$, nos garantiza que la ecuación (1.17) tiene al menos una solución. Esta condición previa es muy importante ya que pueden presentarse ecuaciones como, por ejemplo,

   $$x^2+e^y+1=0$$

   que no tienen ninguna solución y, por tanto, en ningún caso podríamos despejar una variable en función de la otra.

2. Por otra parte, la condición 3), $\frac{\partial f}{\partial y}(P)\neq 0$, junto con el hecho de que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en un entorno del punto P (ver condición 2)) nos permite asegurar que la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ tampoco no se anulará para puntos próximos a P, lo que nos dice que la igualdad (1.18) tiene sentido, al menos para puntos que estén próximos a P.

3. Observemos que el teorema sigue siendo el mismo si lo que pretendemos es despejar la variable x en función de la variable y. En tal caso, la condición

3) que hemos de imponer será que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0.$$

En este caso, la fórmula para el cálculo de la derivada $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, será

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

4. La demostración de la existencia de la función g bajo las condiciones dadas en el teorema es realmente complicada. Sin embargo, admitiendo la existencia de tal función, ya hemos comprobado anteriormente que la igualdad (1.18) se obtiene directamente aplicando la regla de la cadena.
5. Finalmente, observemos que el teorema de la función implícita es un teorema local, la existencia de la función g tal que $y = g(x)$ solo está asegurada para valores de x en un entorno U del punto x_0. Desde un punto de vista geométrico esto viene a decirnos que si la ecuación (1.17) representa la ecuación implícita de una curva C en el plano (ver tema 3), entonces la ecuación explícita $y = g(x)$ no tiene por qué representar a toda la curva C. Dicha representación solo podemos asegurar que será válida para puntos x que estén en el entorno U cuya existencia nos garantiza el teorema. Esta situación es bastante frecuente cuando pasamos de ecuaciones implícitas a ecuaciones explícitas. Así, por ejemplo, sabemos que la ecuación

   $$x^2 + y^2 = 1,$$

   representa la ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Si despejamos la variable y en un entorno del punto $P = (0,1)$ (que satisface la ecuación) tendremos que

   $$y = \sqrt{1-x^2}, \quad (x,y) \in [-1,1].$$

   Sin embargo, dicha ecuación solo representa la parte de la circunferencia situada por encima del eje OX.

Observemos que la función $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ es de clase C^1 en el intervalo abierto $(-1,1)$, siendo

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

y, por tanto, se cumple (1.18).

La parte de la circunferencia situada debajo del eje OX vendría dada por la ecuación

$$z = -\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

Problemas 1.4.32

1. *Probar que la ecuación* $y^3 + y^2 - 5y - x^2 - 2 = 0$ *define implícitamente a la variable* y *como función de* x *en un entorno del punto* $(0,2)$. *Calcular* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

   SOLUCIÓN: Consideramos la función $f(x,y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 - 2$ y comprobamos que se cumplen las hipótesis del teorema 1.4.30.

   1) $f(0,2) = 0$. ✓

   2) Las derivadas parciales

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2y - 5$$

   son continuas en un entorno de $(0,2)$ (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^2$). ✓

   3) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 11 \neq 0$. ✓

   Por tanto, existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}$ del punto 0 tal que $y = y(x)$ para $x \in U$, siendo $y(0) = 2$. Además,

   $$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

   En particular, tomando $x = 0$ en la igualdad anterior (teniendo en cuenta que $y(0) = 2$), se obtiene que

   $$y'(0) = \frac{0}{11} = 0. \qquad \square$$

2. *Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia* $x^2+y^2-4x=0$, *en el punto* $(1,\sqrt{3})$.

SOLUCIÓN: La ecuación de la recta tangente será

$$y=\sqrt{3}+y'(1)(x-1).$$

Se trata por tanto de calcular $y'(1)$. Para ello aplicamos derivación implícita. Consideramos la función $f(x,y)=x^2+y^2-4x$ y comprobamos que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita.

1) $f(1,\sqrt{3})=0.$ ✓

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

son continuas en un entorno del punto $(1,\sqrt{3})$ (lo son en todo $\mathbb{R}^2$). ✓

3) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3})=2\sqrt{3}\neq 0.$ ✓

Por tanto, existe un entorno U del punto $x=1$, tal que $y=y(x)$ para $x\in U$, siendo $y(1)=\sqrt{3}$. Además,

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{2x-4}{2y},$$

luego $y'(1)=-\frac{2x-4}{2y}\Big]_{(1,\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,\sqrt{3})$ será (ver la figura 1.10):

$$y=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1). \qquad \square$$

Las mismas consideraciones anteriores podemos hacer si tenemos ahora una ecuación de la forma

$$f(x,y,z)=0. \tag{1.19}$$

Por lo general, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen (1.19) determinan una superficie

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0\}.$$

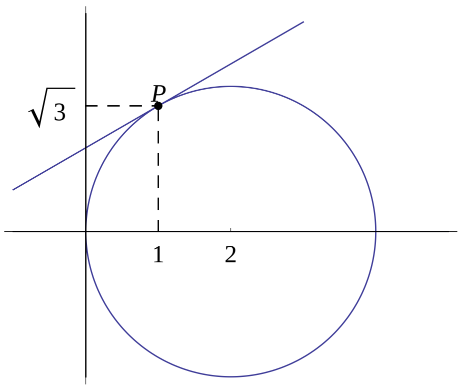


Figura 1.10: Recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4x$ en el punto $P(1, \sqrt{3})$.

La ecuación (1.19) se dice que nos proporciona una representación en forma implícita de la superficie S. En efecto, si pudiéramos despejar, por ejemplo, z en función de las variables x e y como

$$z = g(x,y), \qquad (x,y) \in D,$$

donde D es un cierto dominio abierto de $\mathbb{R}^2$, entonces la superficie S sería la gráfica tridimensional de la función g, es decir,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x,y),\ (x,y) \in D\}.$$

En tal caso se dice que la ecuación (1.19) *define de forma implícita a z como función de las variables x e y*.

Como hemos indicado anteriormente, dada la ecuación (1.19) no siempre será posible despejar una variable, digamos z, en función de las restantes. Sin embargo, utilizando de nuevo la regla de la cadena podemos deducir fórmulas útiles para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ sin el conocimiento explícito de $z = g(x,y)$. En efecto, supongamos que podemos despejar $z = g(x,y)$, para $(x,y) \in D$ (aunque no conozcamos la fórmula para calcularla). Sustituyendo z en la ecuación (1.19), obtendríamos una igualdad en la que solamente figuran las variables (x,y), es decir,

$$f(x,y,g(x,y)) = 0, \quad (x,y) \in D.$$

Esto nos dice que la función $h(x,y) = f(x,y,g(x,y))$ es idénticamente nula en D y, por tanto, las derivadas parciales $\frac{\partial h}{\partial x}$ y $\frac{\partial h}{\partial y}$ se anularán también en D. Calculando estas derivadas por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Análogamente, se llegaría a que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observemos que para que las igualdades anteriores tengan sentido hemos de exigir ahora la condición de que $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, para $(x,y) \in D$.

En consecuencia, podemos enunciar un resultado análogo al teorema 1.4.30 para el caso en que tengamos una ecuación con tres variables. Este resultado nos llevará a dar una formulación más general para el caso de una ecuación con un número cualquiera de variables.

Teorema 1.4.33 (Teorema de la función implícita para una ecuación con tres variables) Sea la ecuación

$$f(x,y,z) = 0 \tag{1.20}$$

y tomemos un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $f(P) = 0$.
2) Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ son continuas en un entorno del punto P.
3) $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$.

Entonces existen un entorno abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ del punto (x_0, y_0), un entorno abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ del punto z_0 y una función

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow V \\ (x,y) &\longmapsto z = g(x,y) \end{aligned}$$

de clase C^1 tal que

$$f(x,y,g(x,y)) = 0, \quad \text{para todo } (x,y) \in U.$$

Es decir, la ecuación (1.19) define a la variable z como función de las variables x e

y, siendo $z = g(x,y)$. En particular, se cumple que $z_0 = g(x_0,y_0)$. Además,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{para todo } (x,y) \in U. \tag{1.21}$$

Observaciones 1.4.34

1. De nuevo la condición 1), $f(x_0,y_0,z_0) = 0$, nos garantiza que la ecuación (1.20) tiene al menos una solución.

2. De igual forma, la condición 3), $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$, junto con el hecho de que $\frac{\partial f}{\partial z}$ es continua en un entorno del punto P (ver condición 2)) nos permite asegurar que la función $\frac{\partial f}{\partial z}$ tampoco no se anulará para puntos próximos a P, lo que nos dice que las igualdades (1.21) tienen sentido al menos para para puntos que estén próximos a P.

3. Insistimos nuevamente en el hecho de que el teorema 1.4.33 es un teorema local: la existencia de la función g tal que $z = g(x,y)$ solo está asegurada para valores de (x,y) en un entorno U del punto (x_0,y_0). Desde un punto de vista geométrico esto viene a decirnos que si la ecuación (1.20) representa la ecuación implícita de una superficie S en el espacio (ver tema 3), entonces la ecuación explícita $z = g(x,y)$ no tiene por qué representar a toda la superficie S. Dicha representación solo podemos asegurar que será válida para puntos (x,y) que estén en el entorno U cuya existencia nos garantiza el teorema. Así, por ejemplo, la ecuación

   $$x^2 + y^2 = z^2,$$

   representa la ecuación de un cono. Si despejamos la variable z en un entorno del punto $P = (1,0,1)$ (que satisface la ecuación) tendremos que

   $$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

   Sin embargo, dicha ecuación solo representa la parte del cono situada en el semiespacio superior ($z \geq 0$). La parte que cae en el semiespacio inferior ($z \leq 0$) negativo vendría dado por la ecuación

   $$z = -\sqrt{x^2+y^2}.$$

Problema 1.4.35 *Probar que la ecuación* $x^2+y^2+z^2-16=0$ *define a la variable* z *como una función de* x *e* y *en un entorno del punto* $(\sqrt{15},0,1)$. *Verificar las fórmulas* (1.21) *para las derivadas parciales* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *y calcular dichas derivadas en el punto* $(\sqrt{15},0,1)$.

SOLUCIÓN: Sea $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-16$. Veamos que se cumplen las condiciones del teorema 1.4.30.

1) $f\big(\sqrt{15},0,1\big)=\big(\sqrt{15}\big)^2+0^2+1^2-16=0.$ ✓

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=2z,$$

son continuas en un entorno del punto $(\sqrt{15},0,1)$ (lo son en todo $\mathbb{R}^3$). ✓

3) $\frac{\partial f}{\partial z}\big(\sqrt{15},0,1\big)=2\neq 0.$ ✓

Por tanto, existe un entorno $U\subseteq\mathbb{R}^2$ del punto $\big(\sqrt{15},0\big)$, tal que $z=g(x,y)$ para $(x,y)\in U$, siendo $g\big(\sqrt{15},0\big)=1$. Además,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{y}{z}.$$

En particular,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\big(\sqrt{15},0\big)=-\sqrt{15}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\big(\sqrt{15},0\big)=0.$$

Observemos que, en este ejemplo, es posible despejar directamente la variable z en función de las variables x e y,

$$z=g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}, \qquad (x,y)\in D,$$

siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 16\}$. Dicha función es además de clase C^1 en el conjunto

$$\operatorname{int}(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<16\},$$

y se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{2\sqrt{16-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z}. \qquad \square$$

Observación 1.4.36 El teorema 1.4.30 puede extenderse fácilmente para el caso en que tengamos una ecuación implícita con n variables,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$(n \geq 2)$ y estemos interesados en ver si una de ellas, digamos x_n, se puede expresar en función de las restantes en un entorno de un punto P tal que $f(P) = 0$. En este caso, la condición 3) del teorema 1.4.30 vendrá dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \neq 0.$$

Teorema general de la función implícita

El teorema 1.4.30 se puede extender al caso en que tengamos un sistema formado por varias ecuaciones. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un sistema de dos ecuaciones de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x,y,z,u,v) = 0, \\ f_2(x,y,z,u,v) = 0, \end{array} \right. \tag{1.22}$$

y admitamos que es posible despejar las variables u y v como funciones de las variables x, y, z en un entorno de un punto $P(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, es decir,

$$u = u(x,y,z), \qquad\qquad v = v(x,y,z), \tag{1.23}$$

para valores de (x,y,z) en un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ del punto (x_0, y_0, z_0). Sustituyendo (1.23) en (1.22), se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} &f_1(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)) = 0, \\ &f_2(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)) = 0. \end{aligned}$$

para $(x,y,z) \in U$, es decir, las funciones

$$\begin{aligned} h_1(x,y,z) &= f_1(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)), \\ h_2(x,y,z) &= f_2(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)), \end{aligned}$$

son idénticamente nulas en el entorno U y, por tanto, también serán nulas sus derivadas parciales. Si derivamos respecto de x, aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Aplicando la regla de Cramer podemos despejar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Observemos que para que las igualdades anteriores sean posibles hemos de imponer la condición de que el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

El determinante anterior se denomina *jacobiano de las funciones f_1 y f_2 respecto de las variables u y v*, y se denota por

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}.$$

Consideremos ahora un sistema de m ecuaciones y $n+m$ incógnitas de la forma

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0, \\ f_2(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0, \\ \qquad\vdots \\ f_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Estamos interesados en establecer las condiciones bajo las cuales es posible despejar las variables $y_1,y_2,\cdots,y_m$, en función de las variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Con objeto de simplificar la notación, observemos que el sistema (1.24) puede escribirse en forma simplificada como

$$f(X,Y) = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ denota el vector nulo en $\mathbb{R}^m$, sin más que considerar las variables $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_m)$ y la función vectorial

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,$$

de variables X,Y cuyas funciones componentes son las funciones $f_1,f_2,\ldots,f_m$ que definen el sistema (1.24).

Teorema 1.4.37 (Teorema general de la función implícita) Consideremos el sistema de ecuaciones escrito en forma vectorial

$$f(X,Y) = \mathbf{0}, \tag{1.25}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ es una función vectorial de $n+m$ variables $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ y m componentes $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Sea $P = (X_0, Y_0)$ un punto en $\mathbb{R}^{n+m}$ y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) El punto P satisface el sistema (1.25), es decir, $f(P) = f(X_0, Y_0) = \mathbf{0}$.

2) La función f es de clase C^1 en un entorno del punto P.

3) El jacobiano

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(P) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{(P)} \neq 0.$$

Entonces, existen un entorno U del punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$, un entorno V del punto $Y_0 \in \mathbb{R}^m$ y una función

$$\begin{aligned} g : U \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m \\ X &\longmapsto Y = g(X) \end{aligned}$$

de clase C^1 tal que $g(X_0) = Y_0$ y

$$f(X, g(X)) = 0, \quad \text{para todo } X \in U, \tag{1.26}$$

es decir, el sistema (1.25) define a la variable $Y = (y_1, \cdots, y_m)$ como función de la variable $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ del punto X_0, siendo

$$Y = g(X), \qquad X \in U. \tag{1.27}$$

Observaciones 1.4.38

1. Observemos que si denotamos por $(g_1, g_2, \cdots, g_m)$ a las funciones compo-

nentes de g, la igualdad (1.27), $Y = g(X)$, es equivalente a decir que

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_m = g_m(x_1, x_2, ..., x_n), \end{array}\right. \qquad \text{para todo } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U.$$

2. A partir de la igualdad (1.26) y aplicando la regla de la cadena, se pueden deducir fórmulas explícitas para calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

   Sin embargo, es preferible obtener el valor de las mismas aplicando la regla de la cadena en cada caso particular.

Problema 1.4.39 *Mostrar que en un entorno del punto $P = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$ el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} xu + yvu^2 = 2, \\ xu^3 + y^2v^4 = 2, \end{array}\right.$$

define a las variables u y v como funciones de x e y. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$.

SOLUCIÓN: Consideramos las funciones,

$$f_1(x, y, u, v) = xu + yvu^2 - 2$$
$$f_2(x, y, u, v) = xu^3 + y^2v^4 - 2$$

y comprobamos que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita:

1. El punto $P(1, 1, 1, 1)$ satisface las ecuaciones del sistema. $\checkmark$
2. Las derivadas parciales

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = u, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = vu^2, & \dfrac{\partial f_1}{\partial u} x + 2uvy, & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} = yu^2, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = u^3, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2yv^4, & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} = 3xu^2, & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} = 4y^2v^3, \end{array} \tag{1.28}$$

   son continuas en un entorno del punto P (lo son en todo $\mathbb{R}^4$). $\checkmark$

3. El jacobiano

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} x+2uvy & yu^2 \\ 3u^2x & 4v^3y^2 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

es distinto de cero. ✓

Por tanto, podemos asegurar la existencia de un entorno abierto U del punto $(x_0,y_0) = (1,1)$ de tal forma que $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ para $(x,y) \in U$, siendo $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = 1$.

Para calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$, derivamos las dos ecuaciones con respecto a x pero teniendo en cuenta que $u = u(x,y)$ y que $v = v(x,y)$.

$$\begin{cases} u + (x+2yuv)\frac{\partial u}{\partial x} + yu^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ u^3 + 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1.29}$$

El sistema (1.29) puede resolverse aplicando la regla de Cramer tomando como incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, resultando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -u & yu^2 \\ -u^3 & 4y^2v^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+2uvy & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x+2yuv & -u \\ 3xu^2 & -u^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x+2uvy & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{vmatrix}}$$

En el punto $P = (1,1,1,1)$, es decir, tomando $x = y = u = v = 1$, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}. \tag{1.30}$$

Una forma más fácil de resolver el problema sería tomar $x = y = u = v = 1$ directamente en el sistema (1.29), obteniendo

$$\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = -1. \end{cases}$$

Finalmente, resolviendo el sistema anterior por la regla de Cramer se llega a (1.30).

Otra forma de calcular las derivadas parciales es tener en cuenta que al sustituir $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en las funciones f_1 y f_2 se obtienen las igualdades:

$$f_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0, \qquad f_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0,$$

para todo $(x,y) \in U$, lo que nos dice que las funciones

$$h_1(x,y) = f_1(x,y,u(x,y),v(x,y)), \qquad h_2(x,y) = f_2(x,y,u(x,y),v(x,y)),$$

son idénticamente nulas en U y, por lo tanto, sus derivadas parciales serán 0. Derivando las funciones h_1 y h_2 respecto de x, aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta (1.28), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u + (x+2yuv)\frac{\partial u}{\partial x} + yu^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial h_2}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u^3 + 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0,
\end{aligned}$$

lo que nos da de nuevo el sistema (1.29). □

1.5 Teorema de la función inversa

Un caso especial del teorema general de la función implícita 1.4.8 es el llamado *teorema de la función inversa*. Ahora se trata de resolver el sistema de n ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n) = y_1,\\ \qquad\vdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n) = y_n,\end{cases}$$

para $x_1,\ldots,x_n$ como funciones de las variables $y_1,\ldots,y_n$, es decir, estamos tratando de invertir el sistema. Esto es análogo a, por ejemplo, calcular la inversa de $y = e^x$, que es $x = \ln y$. En este caso, sin embargo, tratamos con funciones de varias variables. La cuestión de la existencia de la solución se responde con el teorema general de la función implícita considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = f_1(x_1,\cdots,x_n) - y_1 = 0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ F_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = f_n(x_1,\cdots,x_n) - y_n = 0.\end{cases}$$

La condición para que $x_1,\ldots,x_n$ se puedan despejar en función de $y_1,\ldots,y_n$ en un entorno un punto $(X_0,Y_0)\in\mathbb{R}^{n+n}$ tal que $F_1(X_0,Y_0)=\ldots=F_n(X_0,Y_0)=0$ será que

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(X_0,Y_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}_{(X_0,Y_0)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}_{(X_0)}$$
$$=\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial x_1,\ldots,x_n)}(X_0)\neq 0.$$

Teorema 1.5.1 (Teorema de la función inversa) Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \qquad\vdots\\ y_n=f_n(x_1,\cdots,x_n),\end{cases}$$

y sea $(X_0,Y_0)\in\mathbb{R}^{n+n}$ un punto que satisface el sistema. Si las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad i=1,\cdots,n,$$

son continuas en un entorno del punto X_0 y el jacobiano

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X_0)\neq 0, \tag{1.31}$$

entonces existen un entorno $U\subseteq\mathbb{R}^n$ del punto X_0, un entorno $V\subseteq\mathbb{R}^n$ del punto Y_0 y una función biyectiva $g=(g_1,\cdots,g_n):V\to U$ de clase C^1 tal que

$$\begin{aligned} x_1&=g_1(y_1,\cdots,y_n)\\ &\ \ \vdots\\ x_n&=g_n(y_1,\cdots,y_n)\end{aligned}$$

para todo $(y_1,\cdots,y_n)\in V$. Además, se cumple que

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(X)=\left[\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}(Y)\right]^{-1},\quad \text{para todo } X\in U,\ Y\in V. \tag{1.32}$$

Observaciones 1.5.2

1. Teniendo en cuenta que $y_i = f_i(x_1,\dots,x_n)$, $i = 1,\dots,n$, la condición (1.31) suele escribirse en la forma:

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(X_0) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right|_{X_0} \neq 0.$$

   Además, como $x_i = g_i(y_1,\dots,y_n)$, $i = 1,\dots,n$, la igualdad (1.32), se escribe también como:

$$\left.\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{(X_0)} = \left[\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right]^{-1}_{(Y_0)}. \tag{1.33}$$

2. La igualdad (1.32) es en realidad mucho más fuerte. Si consideramos la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1,\dots,f_n)$, y la función $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g = (g_1,\dots,g_n)$, entonces se cumple que

$$\mathrm{D}g(Y) = \big(\mathrm{D}f(X)\big)^{-1}, \qquad X \in U,\ Y \in V,$$

   es decir, las matrices derivadas de las funciones f y g son matrices inversas.

Problemas 1.5.3

1. *Consideremos el sistema dado por las ecuaciones*

$$u = x^2 + y^2, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

   Probar que en un entorno del punto $P = (x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,1,2,1)$ *es posible invertir el sistema, es decir, podemos despejar las variables x e y en función de u y v. Hallar* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

   SOLUCIÓN: Veamos que se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa:

   a) El punto P satisface las ecuaciones del sistema. ✓

   b) Las derivadas parciales,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x},$$

son continuas en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(1,1)$. En efecto, dado que las derivadas parciales son continuas en el conjunto

$$D=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\neq 0\},$$

podemos tomar como entorno cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^2$ centrada en el punto $(1,1)$ y de radio $r<1$ (ver figura 1.11). ✓

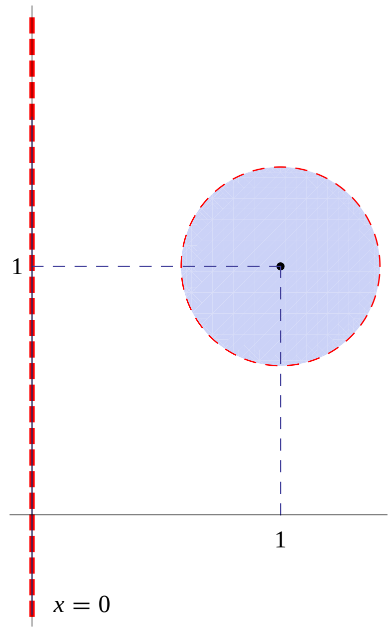


Figura 1.11: Entorno en $\mathbb{R}^2$ del punto $(1,1)$ donde las funciones u y v son de clase C^1.

c) El jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,1)}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}_{(1,1)}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=4$$

es distinto de cero. ✓

Por tanto, existen un entorno $U\subseteq\mathbb{R}^2$ del punto $(x_0,y_0)=(1,1)$, un entorno $V\subseteq\mathbb{R}^2$ del punto $(u_0,v_0)=(2,1)$ y una función biyectiva y de clase C^1,

$$\begin{aligned}g:V&\longrightarrow U\\(u,v)&\longmapsto(x,y)=(g_1(u,v),g_2(u,v)),\end{aligned}$$

es decir, se pueden despejar x e y como funciones de u y de v, siendo

$$x = g_1(u,v), \qquad\qquad y = g_2(u,v),$$

para todo $(u,v) \in V$. Para calcular el jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ podemos utilizar la igualdad (1.33). En nuestro caso,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2}, \qquad (1.34)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2}{2(x^2+y^2)}.$$

Observemos que el jacobiano anterior viene dado en términos de x e y. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones será deseable poder expresarlo en términos de u y de v. En nuestro caso, esto es posible ya que de la primera ecuación del sistema se tiene que $x^2+y^2 = u$. Por otra parte, despejando y en la segunda ecuación, se obtiene $y = xv$, y sustituyendo en la primera se llega a

$$u = x^2 + x^2v^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{u}{1+v^2},$$

de donde se concluye finalmente que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{1}{2(1+v^2)}.$$

La igualdad anterior puede obtenerse directamente a partir de (1.34) sin más que tener en cuenta que $v = \frac{y}{x}$. En efecto, de (1.34), se tiene

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = 2(1+v^2).$$

Ahora, aplicando (1.33), se obtiene directamente

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2(1+v^2)}. \qquad \square$$

2. *Consideremos el sistema lineal dado por las ecuaciones*

$$u = x + y, \qquad v = x - y.$$

Probar que para cualquier punto P que satisfaga el sistema se cumple que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}.$$

SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Dado que se trata de un sistema lineal con matriz de coeficientes regular (determinante no nulo), las ecuaciones son inversibles en todo $\mathbb{R}^2$, es decir, podemos despejar x e y en función de u y de v. Además, en este caso, se pueden calcular las ecuaciones inversas:

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad\qquad y = \frac{u-v}{2}.$$

Además se obtiene que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}. \qquad \square$$