1.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1 En cada uno de los siguientes casos

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$.

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

se pide:

i) Determinar la frontera del conjunto A.

ii) Probar que el conjunto A es abierto

iii) Dado $X_0 \in A$, determinar un valor $r > 0$ tal que $B_r(X_0) \subset A$.

SOLUCIÓN:

a) La frontera de A está formada por los lados del cuadrado representado en la figura 1.12.(a).

$$\begin{aligned} Fr(A) =& \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\} \\ & \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Por tanto, A es un conjunto abierto ya que no contiene puntos de la frontera, o equivalentemente

$$A \cap Fr(A) = \emptyset.$$

Sea $X_0 = (x_0, y_0) \in A$. Para determinar un valor de r de tal manera que $B_r(X_0) \subset A$, calculamos la mínima distancia de X_0 a los puntos que están en la $Fr(A)$. Notaremos a esta mínima distancia por $d(X_0, Fr(A))$. En nuestro caso,

$$d(X_0, Fr(A)) = \text{mín}\{1 - x_0, 1 + x_0, 1 - y_0, 1 + y_0\} > 0.$$

Entonces podemos tomar cualquier valor r tal que $0 < r < d(X_0, Fr(A))$. En particular, si tomamos

$$r = \frac{1}{2} d(X_0, Fr(A)) = \frac{1}{2} \text{mín}\{1 - x_0, 1 + x_0, 1 - y_0, 1 + y_0\},$$

podemos asegurar que $B_r(X_0) \subset A$ (ver figura **??**).

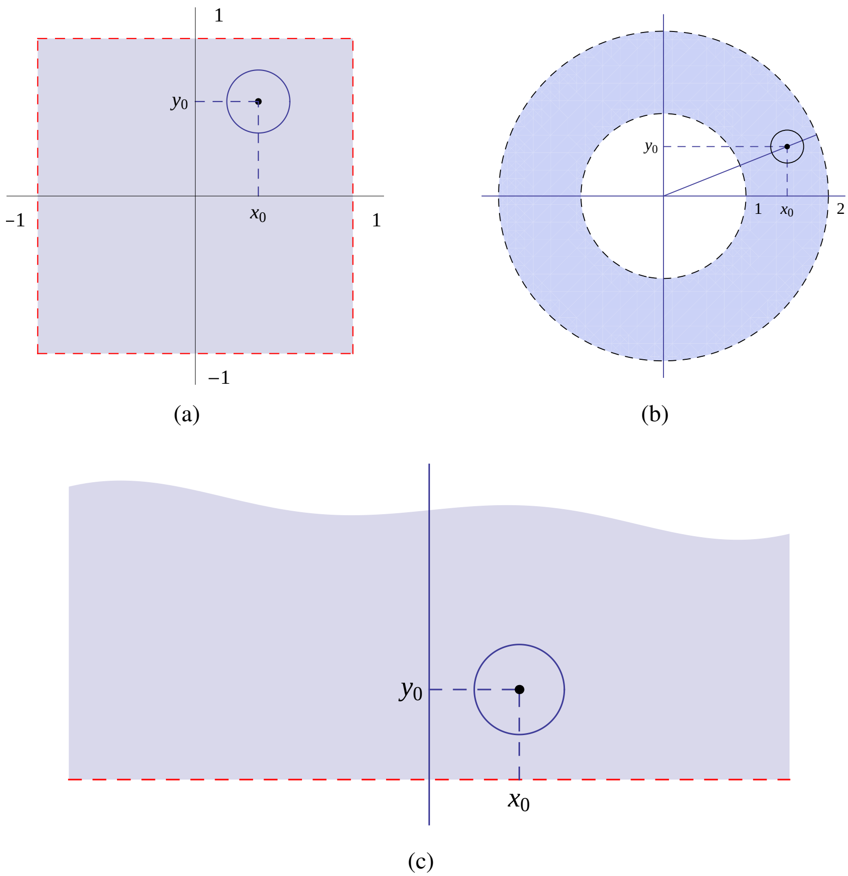

Figura 1.12: Representación del conjunto A en el ejercicio 1.1.

b) La frontera de A está formada por las circunferencias de centro $(0,0)$ y radios 1 y 2, respectivamente; es decir,

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

Dado que estas circunferencias no pertenecen al conjunto A, se tiene que $A \cap Fr(A) = \emptyset$ y, por tanto, A es un conjunto abierto.

Sea $X_0 = (x_0, y_0) \in A$. La distancia de este punto al origen de coordenadas es $d = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$, luego

$$d(X_0, Fr(A)) = \text{mín}\left\{2-\sqrt{x_0^2+y_0^2}, \sqrt{x_0^2+y_0^2}-1\right\} > 0.$$

Por tanto, si tomamos

$$r = \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{2-\sqrt{x_0^2+y_0^2}, \sqrt{x_0^2+y_0^2}-1\right\},$$

entonces $B_r(X_0) \subset A$ (ver figura 1.12.(b)).

c) La frontera de A está formada por el eje OX, es decir,

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Dado que los puntos del eje OX no pertenecen al conjunto A, se tiene que $A \cap Fr(A) = \emptyset$ y, por tanto, A es un conjunto abierto.

Dado $X_0 = (x_0, y_0) \in A$, se tiene que $d(X_0, Fr(A)) = y_0 > 0$, por lo que si tomamos $r = \frac{1}{2}y_0$, entonces $B_r(X_0) \subset A$ (ver figura 1.12.(c)). $\square$

Ejercicio 1.2 En cada uno de los siguientes casos,

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$.

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$.

d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \geq 2, x \geq 1, y \leq 1\}$.

e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

f) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x^2,\ -1 < x < 1\}$.

g) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 0\}$.

se pide:

i) Representar el conjunto A de $\mathbb{R}^2$.

ii) Indicar si A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.

SOLUCIÓN: La representación de cada conjunto se encuentra en la figura 1.13.

a) La frontera de A viene dada por

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

- A es cerrado ya que $Fr(A) \subset A$.
- Dado que se trata del exterior de la circunferencia, A no es acotado.
- A no es compacto, porque no es acotado.
- El conjunto A es conexo. Dos puntos cualesquiera de A pueden unirse mediante una curva continua.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(2,2)$ y $(-2,-2)$ pertenecen a A pero el segmento que los une no está contenido en A.

b) La frontera de A viene dada por

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}.$$

- Dado que $Fr(A) \not\subset A$, el conjunto A no es cerrado.
- A tampoco es abierto ya que $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A es acotado, ya que $A \subset B_1(0,0)$.
- A no es compacto, porque no es cerrado.
- A es conexo. Dos puntos cualesquiera de A pueden unirse mediante una curva continua.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(0,1)$ y $(-1,0)$ pertenecen a A y, sin embargo, el segmento que los une no está contenido en A.

c) La frontera de A viene dada por

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

- A es abierto, porque $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

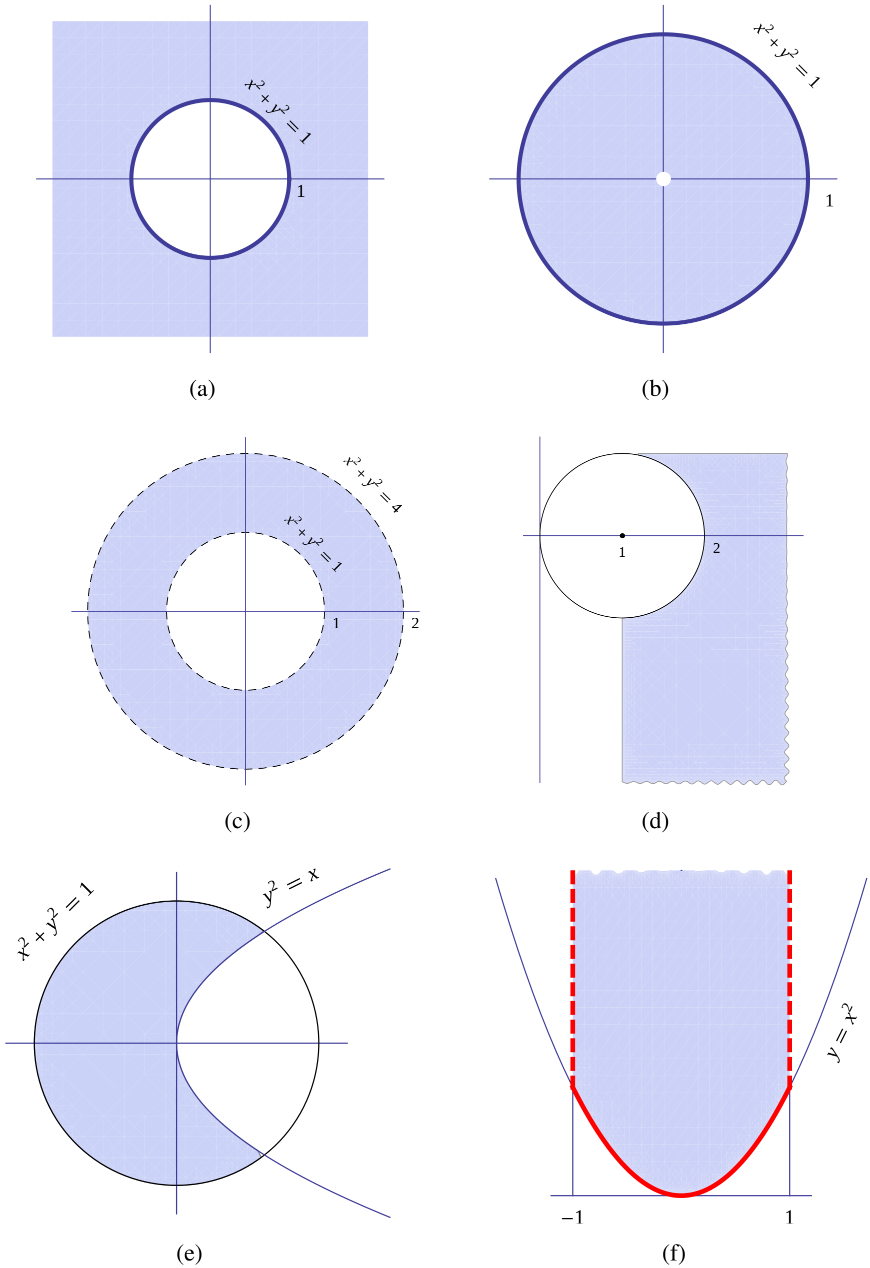

Figura 1.13: Representación del conjunto A en el ejercicio 1.2.

- A no es cerrado, ya que $Fr(A) \not\subset A$.
- A es acotado, ya que $A \subset B_2(0,0)$.
- A no es compacto, porque no es cerrado.
- A es conexo. Dos puntos cualesquiera de A pueden unirse mediante una curva continua.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(\frac{3}{2},0)$ y $(-\frac{3}{2},0)$ pertenecen a A, pero el segmento que los une no está contenido en A.

d) La ecuación $x^2+y^2=2x$ representa una circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1. La frontera del conjunto A vendrá dada por:

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ x \geq 1\} \\ \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2\}.$$

Por tanto,

- A no es abierto, porque $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A es cerrado, ya que $Fr(A) \subset A$.
- A no es acotado.
- A no es compacto, porque no es acotado.
- A es conexo. Dos puntos cualesquiera de A pueden unirse mediante una curva continua.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(1,1)$ y $(-1,1)$ pertenecen a A y, sin embargo, el segmento que los une no está contenido en A.

e) Calculamos la abscisa del punto de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la parábola $y^2=x$,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x \end{cases} \Rightarrow\ x^2+x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, la frontera del conjunto A (ver figura 1.13.(e)) vendrá dada por:

$$Fr(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ -1 \leq x \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right\} \\ \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right\}.$$

Luego,

- A no es abierto, porque $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A es cerrado, ya que $Fr(A) \subset A$.
- A es acotado porque $A \subset B_1(0,0)$.
- A es compacto, porque ser cerrado y acotado.
- A es conexo. Dos puntos cualesquiera de A pueden unirse mediante una curva continua.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(\frac{1}{2},1)$ y $(-\frac{1}{2},1)$ pertenecen a A, pero el segmento que los une no está contenido en A.

f) La frontera del conjunto A viene dada por

$$\begin{aligned} Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1\} \\ \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\} \cup \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\} \end{aligned}$$

- A no es abierto, porque $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A no es cerrado, ya que $Fr(A) \not\subset A$.
- A no es acotado.
- A no es compacto, porque no es acotado.
- A es convexo. Dados dos puntos cualesquiera de A el segmento que los une está contenido en A.

g) $A = \emptyset$, luego A es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo. □

Ejercicio 1.3 Decidir sobre la existencia de los siguientes límites. En caso afirmativo, calcularlos

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$.

SOLUCIÓN:

a) Hacemos el cambio a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left[\begin{array}{c} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta \end{array}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}.$$

Observemos que la función obtenida no depende de θ, luego el límite podrá calcularse directamente como una función de una variable. Aplicando la regla de l'Hôpital se tiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \left(\frac{0}{0} = \text{Indet}\right) = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho}{\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}} = \lim_{\rho\to 0} 2\sqrt{1+\rho^2} = 2.$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

b) Hacemos el cambio a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{c} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta \end{array}\right] = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta) = 0.$$

El límite obtenido es independiente de θ. Además, observamos que

$$|F(\rho,\theta)-L| = \rho|\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta| = \Psi(\rho)\Phi(\theta),$$

donde $\Psi(\rho)=\rho$ y $\Phi(\theta)=|\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta|$. Puesto que

I) $\lim\limits_{\rho\to 0}\Psi(\rho)=0$, y

II) $\Phi(\theta)=|\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta|\leq 2$ (está acotada),

el resultado 1.3.14 nos asegura que existe el límite, siendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

c) Si calculamos el límite siguiendo la dirección dada por la recta $y = x$, se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

En cambio, si calculamos el límite siguiendo la parábola $y = x^2 - x$, obtenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \left(x^2 - 2x + 2\right) = 2.$$

Por tanto, concluimos que no existe el límite.

d) Teniendo en cuenta la igualdad

$$A^B = e^{B\log A}, \quad \text{con } A > 0,$$

se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^h, \qquad h = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}.$$

Para calcular este límite utilizamos que

$$\log(1+x) \sim x \quad \text{para } x \to 0.$$

En nuestro caso,

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow x^2y^2 \to 0 \Rightarrow \log(1+x^2y^2) \sim x^2y^2,$$

luego

$$h = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right]$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = 0.$$

El límite obtenido es independiente de θ. Además, observamos que

$$|F(\rho,\theta) - L| = \rho^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = \Psi(\rho)\Phi(\theta),$$

donde $\Psi(\rho) = \rho^2$ y $\Phi(\theta) = \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$. Puesto que

I) $\lim_{\rho\to 0} \Psi(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0$, y

II) $\Phi(\theta) = \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \leq 1$ (está acotada),

el resultado 1.3.14 nos asegura que existe el límite, siendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0. \tag{1.35}$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^h = e^0 = 1.$$

e) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x \sim x$ para $x \to 0$, se tiene

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow xy \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(xy) \sim xy.$$

Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$ □

Ejercicio 1.4 Calcular los siguientes límites, en caso de que existan:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2-4)}{(y+2)\operatorname{sen} x}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos y)\operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$

SOLUCIÓN:

a) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x \sim x$ para $x \to 0$, se tiene

$$(x,y) \to (0,-2) \Rightarrow y^2-4 \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(y^2-4) \sim y^2-4.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2-4)}{(y+2)\operatorname{sen} x} &= \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^3(y^2-4)}{(y+2)x} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2(y+2)(y-2)}{(y+2)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,-2)} x^2(y-2) = 0.
\end{aligned}$$

b) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x \sim x$ para $x \to 0$ y que $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ para $x \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos y)\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2(x^2+y^2)} = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{2}\rho\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0.
\end{aligned}$$

El límite obtenido es independiente de θ. Además, observamos que

$$|F(\rho,\theta)-L| = \frac{1}{2}\rho|\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta = \Psi(\rho)\Phi(\theta),$$

donde $\Psi(\rho)=\frac{1}{2}\rho$ y $\Phi(\theta)=|\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta$. Puesto que

I) $\lim_{\rho\to 0}\Psi(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2}\rho = 0$, y

II) $\Phi(\theta) = |\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta \le 1$ (está acotada),

el resultado 1.3.14 nos asegura que existe el límite, siendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos y)\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} = 0.$$

c) Haciendo el cambio a coordenadas polares, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\rho} = \cos\theta+\operatorname{sen}\theta.$$

Como el límite obtenido depende de θ, concluimos que no existe el límite.

d) Hacemos el cambio a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right] = \lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^3\theta+\rho\,\mathrm{sen}^4\,\theta)=0.$$

El límite obtenido es independiente de θ. Además, teniendo en cuenta que $\rho\to 0$, se cumple que

I) $|F(\rho,\theta)-L| = \rho^2|\cos^3\theta+\rho\,\mathrm{sen}^4\,\theta| \leq \rho^2\,(1+\rho) = \Psi(\rho)$,

II) $\lim\limits_{\rho\to 0}\Psi(\rho) = \lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\,(1+\rho)=0$.

Aplicando el resultado 1.3.12 concluimos que existe el límite, siendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$ □

Ejercicio 1.5 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{\log(1+x^2+y^2)}, \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0), \quad f(0,0)=0.$$

SOLUCIÓN: Observemos que la función f es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ hemos de analizar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0).$$

Para calcular este límite usamos que $\log(1+x)\sim x$ para $x\sim 0$. En nuestro caso,

$$(x,y)\to(0,0)\Rightarrow x^2+y^2\to 0\Rightarrow \log(1+x^2+y^2)\sim x^2+y^2.$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 \overset{(1.35)}{=} f(0,0).$$

Por tanto, f es continua en el punto $(0,0)$ y, en consecuencia, f es continua en $\mathbb{R}^2$. □

Ejercicio 1.6 Calcular la matriz derivada en los puntos que se indican para cada una de las funciones siguientes

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} y \cos z)$, en el punto $(1,0,\pi)$.

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (2t^2, t^2+1, \log t)$, en el punto $t=1$.

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, en $(0,\frac{\pi}{2})$.

d) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta \operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi)$, en el punto $(0,\frac{\pi}{2},\pi)$.

SOLUCIÓN:

a) Las funciones componentes de la función f son

$$f_1(x,y,z) = x\operatorname{sen} z, \qquad f_2(x,y,z) = x\operatorname{sen} y\cos z,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} Df(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} z & 0 & x\cos z \\ \operatorname{sen} y\cos z & x\cos y\cos z & -x\operatorname{sen} y\operatorname{sen} z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} Df(1,0,\pi) &= \left.\begin{pmatrix} \operatorname{sen} z & 0 & x\cos z \\ \operatorname{sen} y\cos z & x\cos y\cos z & -x\operatorname{sen} y\operatorname{sen} z \end{pmatrix}\right|_{(1,0,\pi)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Las funciones componentes de la función f son

$$f_1(t) = 2t^2, \qquad f_2(t) = t^2+1, \qquad f_3(t) = \log t.$$

Por tanto,

$$Df(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \Rightarrow Df(1) = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 2t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}\right|_{t=1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Las funciones componentes de la función f son

$$f_1(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad\qquad f_2(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Por tanto,

$$\mathrm{D}f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$\mathrm{D}f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\Bigg\rfloor_{(0,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Las funciones componentes de f son

$$f_1(r,\theta,\phi) = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad\qquad f_2(r,\theta,\phi) = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,$$
$$f_3(r,\theta,\phi) = r\cos\phi.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}f(r,\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En particular,

$$\mathrm{D}f\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ejercicio 1.7 Para $f(x,y) = xe^{x^2y}$, hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y evaluarlas en el punto $(1, \ln 2)$.

SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y} + 2x^2ye^{x^2y} = e^{x^2y}(1+2x^2y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,\ln 2) = 2\left(1+2\ln 2\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{x^2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,\ln 2) = 2. \qquad \square$$

Ejercicio 1.8 Si $u = z\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$ donde $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - s^2$, $z = 2r^2 - 3s^2$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$.

SOLUCIÓN: Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ &= -6r\frac{yz}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 4\frac{z}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 4r\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= -2\frac{yz}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 2s\frac{z}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 6s\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned} \qquad \square$$

Ejercicio 1.9 Hallar $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$ para la función dada por

$$w = xy + yz + xz,$$

siendo $x = s\cos t$, $y = s\,\mathrm{sen}\,t$, $z = t$.

SOLUCIÓN: En primer lugar, observemos que para $s = 1$ y $t = 2\pi$, se tiene que $x = 1$, $y = 0$, $z = 2\pi$.

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = (y+z)\cos t + (x+z)\,\mathrm{sen}\, t,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -s(y+z)\,\mathrm{sen}\, t + s(x+z)\cos t + x + y.$$

Finalmente, sustituyendo se llega a

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1,2\pi) = 2\pi, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(1,2\pi) = 2(\pi+1). \qquad \square$$

Ejercicio 1.10 Transformar la expresión

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

mediante el cambio de variable $x+y=u$, $x-y=v$.

SOLUCIÓN: Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Ahora calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

De igual forma se llega a que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0. \qquad \square$$

Ejercicio 1.11 Sean las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = u, \qquad x + y = v.$$

Razonar cerca de qué puntos pueden despejarse x e y en función de u y de v.

SOLUCIÓN: Consideremos un punto $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ que verifique el sistema dado por las ecuaciones anteriores. Aplicando el teorema de la función inversa podemos asegurar que podemos despejar x e y en función de u y de v en un entorno del punto (u_0, v_0) siempre que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(P) \neq 0.$$

Calculando este jacobiano se tiene

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_{(P)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(P)} = 2(x_0 - y_0) \neq 0.$$

Por tanto, los puntos buscados son aquéllos en que $x_0 \neq y_0$. $\square$

Ejercicio 1.12 Si $u = x^3 y$, encontrar $\frac{du}{dt}$ si $x^5 + y = t$ y $x^2 + y^2 = t^2$.

SOLUCIÓN: Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 3x^2 y x'(t) + x^3 y'(t).$$

Se trata por tanto de calcular $x'(t)$ e $y'(t)$ cuando x e y vienen dadas de forma implícita por el sistema

$$x^5 + y - t = 0, \qquad x^2 + y^2 - t^2 = 0. \tag{1.36}$$

Consideremos las funciones

$$f(x,y,t) = x^5 + y - t, \qquad\qquad g(x,y,t) = x^2 + y^2 - t^2.$$

Dado que

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 10x^4y - 2x = 2x(5x^3y-1),$$

el teorema de la función inversa nos asegura que podemos despejar $x = x(t)$ e $y = y(t)$ en un entorno de cualquier punto que verifique el sistema (1.36) y tal que

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad 5x^3y - 1 \neq 0.$$

En tal caso, derivando respecto de t en ambas ecuaciones de (1.36) se tiene

$$5x^4x'(t) + y'(t) = 1, \qquad\qquad 2xx'(t) + 2yy'(t) = 2t,$$

de donde se obtiene

$$x'(t) = \frac{y-t}{x(5x^3y-1)}, \qquad\qquad y'(t) = \frac{5x^3t-1}{5x^3y-1}.$$

Finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{3x^2y(y-t)}{x(5x^3y-1)} + \frac{x^3(5x^3t-1)}{5x^3y-1} = \frac{3xy(y-t)+x^3(5x^3t-1)}{5x^3y-1}. \qquad \square$$

Ejercicio 1.13 Probar que las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 0 \end{cases}$$

definen a x, y, z como funciones de u y v en un entorno del punto $(x,y,z,u,v) = \left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$. Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial x}{\partial v}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

SOLUCIÓN: Consideramos las funciones

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z,u,v) &= x^2 - y\cos(uv) + z^2\\
f_2(x,y,z,u,v) &= x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 - 2,\\
f_3(x,y,z,u,v) &= xy - \operatorname{sen} u \cos v + z.
\end{aligned}$$

Comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) El punto $P = \left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$ satisface el sistema dado por las tres ecuaciones.

2) Las derivadas parciales de las funciones f_1, f_2 y f_3 respecto de las variables x, y, z, u y v son continuas en un entorno del punto P (ya que lo son en todo $\mathbb{R}^5$).

3) El jacobiano

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}\right]_{(P)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}_{(P)} = \begin{vmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix}_{(P)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(P)} = 6 \neq 0. \tag{1.37}$$

Por tanto, es posible despejar

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v), \tag{1.38}$$

en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

Para calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$, derivamos respecto de u cada una de las ecuaciones, teniendo en cuenta (1.38), y evaluamos en el punto P:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0\right) \Rightarrow 2x\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\cos(uv) + yv\operatorname{sen}(uv) + 2z\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2\right) \Rightarrow 2x\frac{\partial x}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u} - v\cos(uv) + 4z\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(xy - \operatorname{sen} u\cos v + z = 1\right) \Rightarrow y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} - \cos u\cos v + \frac{\partial z}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto P se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ 2\dfrac{\partial x}{\partial u} + 2\dfrac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo (ver la fórmula (1.37)). Entonces, la única solución es la trivial, es decir,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0.$$

De igual manera, derivando parcialmente respecto de v cada una de las ecuaciones, teniendo en cuenta (1.38), y evaluando en el punto P, se llega al sistema

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0 \\ 2\dfrac{\partial x}{\partial v} + 2\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

cuya solución nos proporciona:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{12}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

Ejercicio 1.14 Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - 4 = 0 \\ yz + xz - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a y, z como funciones de x en un entorno del punto $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. Calcular $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ en el punto $x = 2$.

SOLUCIÓN: Consideremos las funciones

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4, \qquad g(x, y, z) = yz + xz - xy - 1,$$

y comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita

1) El punto $P = (2,1,1)$ satisface las dos ecuaciones del sistema.

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = z - y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = z - x, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = y + x,$$

son continuas en un entorno del punto P (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^3$).

3) El jacobiano

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\right]_{(P)} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(P)} = \left|\begin{matrix} 2y & -2z \\ z-x & y+x \end{matrix}\right|_{(P)} = \left|\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{matrix}\right| = 4 \neq 0.$$

Por tanto, por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $x = 2$ donde es posible despejar $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Para calcular $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, derivamos respecto de x en cada una de las ecuaciones del sistema teniendo en cuenta que $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + y^2 - z^2 - 4 = 0\right) \Rightarrow 2x + 2yy' - 2zz' = 0,$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(yz + xz - xy - 1 = 0\right) \Rightarrow zy' + yz' + z + xz' - y - xy' = 0.$$

Para calcular $y'(2)$ y $z'(2)$, evaluamos el sistema en el punto $P(2,1,1)$,

$$\left\{\begin{array}{l} 2y' - 2z' = -4 \\ -y' + 3z' = 0 \end{array}\right.$$

cuya solución nos da

$$y'(2) = \frac{\left|\begin{matrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{matrix}\right|} = -3, \qquad z'(2) = \frac{\left|\begin{matrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{matrix}\right|} = -1. \qquad \square$$

Ejercicio 1.15 Probar que el sistema

$$\begin{cases} y^2+z^2-x^2+5=0 \\ e^y+x-z^2=0 \end{cases}$$

define implícitamente a y, z como funciones de x en un entorno del punto $(x,y,z)=(3,0,2)$. Calcular $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ y $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}$ en el punto $x=3$.

SOLUCIÓN: Consideremos las funciones

$$f(x,y,z)=y^2+z^2-x^2+5, \qquad g(x,y,z)=e^y+x-z^2,$$

y comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) El punto $P=(3,0,2)$ satisface las dos ecuaciones del sistema.

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=2z,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=e^y, \qquad \frac{\partial g}{\partial z}=-2z,$$

son continuas en un entorno del punto P (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^3$).

3) El jacobiano

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\right]_{(P)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}_{(P)}=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ e^y & -2z \end{vmatrix}_{(P)}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Por tanto, por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $x=2$ donde es posible despejar $y=y(x)$ y $z=z(x)$.

Para calcular $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ y $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}$, derivamos respecto de x en cada una de las ecuaciones del sistema teniendo en cuenta que $y=y(x)$ y $z=z(x)$.

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(y^2+z^2-x^2+5=0\right)\Rightarrow 2yy'+2zz'-2x=0,$$
$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(e^y+x-z^2=0\right)\Rightarrow e^yy'+1-2zz'=0$$

Para calcular $y'(3)$ y $z'(3)$, evaluamos el sistema en el punto $P(3,0,2)$,

$$\begin{cases} 4z' = 6 \\ y' - 4z' = -1 \end{cases}$$

de donde se obtiene $y'(3) = 5$, $z'(3) = \frac{3}{2}$. □

Ejercicio 1.16 Probar que para $r > 0$, el sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $x = x(z)$ e $y = y(z)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$. Calcular $\frac{dx}{\mathrm{dz}}$ y $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dz}}$ en el punto $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN: Consideremos las funciones

$$f(x,y,z) = x^2 + z^2 - r^2, \qquad g(x,y,z) = y^2 + z^2 - r^2,$$

y comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) El punto $P = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ satisface las dos ecuaciones del sistema.

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z,$$

son continuas en un entorno del punto P (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^3$).

3) El jacobiano

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right]_{(P)} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix}\right|_{(P)} = \left|\begin{matrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{matrix}\right|_{(P)} = \left|\begin{matrix} \frac{2r}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2r}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right| = 2r^2 \neq 0.$$

Por tanto, por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$ donde es posible despejar $z = z(z)$ y $y = y(z)$.

Para calcular $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$, derivamos respecto de z en cada una de las ecuaciones del sistema teniendo en cuenta que $x = x(z)$ y $y = y(z)$:

$$\frac{d}{dz}\left(x^2+z^2=r^2\right) \Rightarrow 2xx'(z)+2z=0,$$
$$\frac{d}{dz}\left(y^2+z^2=r^2\right) \Rightarrow 2yy'(z)+2z=0,$$

de donde se obtiene

$$x'(z) = -\frac{z}{x}, \qquad y'(z) = -\frac{z}{y}.$$

En particular, sustituyendo en el punto P se obtiene

$$x'\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = -1, \qquad y'\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = -1. \qquad \square$$

Ejercicio 1.17 Probar que la ecuación

$$x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$$

define una función impllícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = \left(0,\sqrt{2},1\right)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

SOLUCIÓN: Consideremos la función

$$f(x,y,z) = x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) - 1,$$

y comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) El punto $P = \left(0,\sqrt{2},1\right)$ satisface las ecuación.

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 - z^3\,\mathrm{sen}(xz), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\cos(xz) - xz^2\,\mathrm{sen}(xz),$$

son continuas en un entorno del punto P (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^3$).

3) $\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 2z\cos(xz) - xz^2 \operatorname{sen}(xz)\big|_{(P)} = 2 \neq 0.$

Por tanto, por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $(0,\sqrt{2})$ donde es posible despejar $z = z(x,y)$. Además se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\sqrt{2}) = -\frac{2xy - y^2 - z^3 \operatorname{sen}(xz)}{2z\cos(xz) - xz^2 \operatorname{sen}(xz)}\bigg|_{(0,\sqrt{2},1)} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,\sqrt{2}) = -\frac{x^2 - 2xy}{2z\cos(xz) - xz^2 \operatorname{sen}(xz)}\bigg|_{(0,\sqrt{2},1)} = 0. \qquad \square$$

Ejercicio 1.18 Probar que la ecuación

$$y^2x - x^2y + x\operatorname{sen} z = 2$$

define una función implícita $x = x(y,z)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (1,-1,0)$. Calcular $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$ en el punto $(-1,0)$.

SOLUCIÓN: Consideremos la función

$$f(x,y,z) = y^2x - x^2y + x\operatorname{sen} z - 2,$$

y comprobemos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita:

1) El punto $P = (1,-1,0)$ satisface las ecuación.

2) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy + \operatorname{sen} z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x\cos z,$$

son continuas en un entorno del punto P (de hecho lo son en todo $\mathbb{R}^3$).

3) La derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = y^2 - 2xy + \operatorname{sen} z\big|_{(1,-1,0)} = 3 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $(-1,0)$ donde es posible despejar $x = x(y,z)$. Además se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial y}(-1,0) = -\frac{2xy - x^2}{y^2 - 2xy + \operatorname{sen} z}\Bigg\rfloor_{(1,-1,0)} = 1,$$
$$\frac{\partial x}{\partial z}(-1,0) = -\frac{x\cos z}{y^2 - 2xy + \operatorname{sen} z}\Bigg\rfloor_{(1,-1,0)} = -\frac{1}{3}. \qquad \square$$