

## 1. Diseño de un compensador de adelanto de fase

El compensador de adelanto de fase persigue el aumento del margen de fase mediante la superposición de la curva de fase del diagrama de bode sobre el diagrama de bode del sistema a compensar. El diagrama de bode del compensador se sitúa de manera que el valor máximo de adelanto de fase (situado en la media geométrica de las frecuencias  $w_1$  y  $w_2$  de la figura 1) se encuentre donde se espera tener la frecuencia de cruce de ganancia.

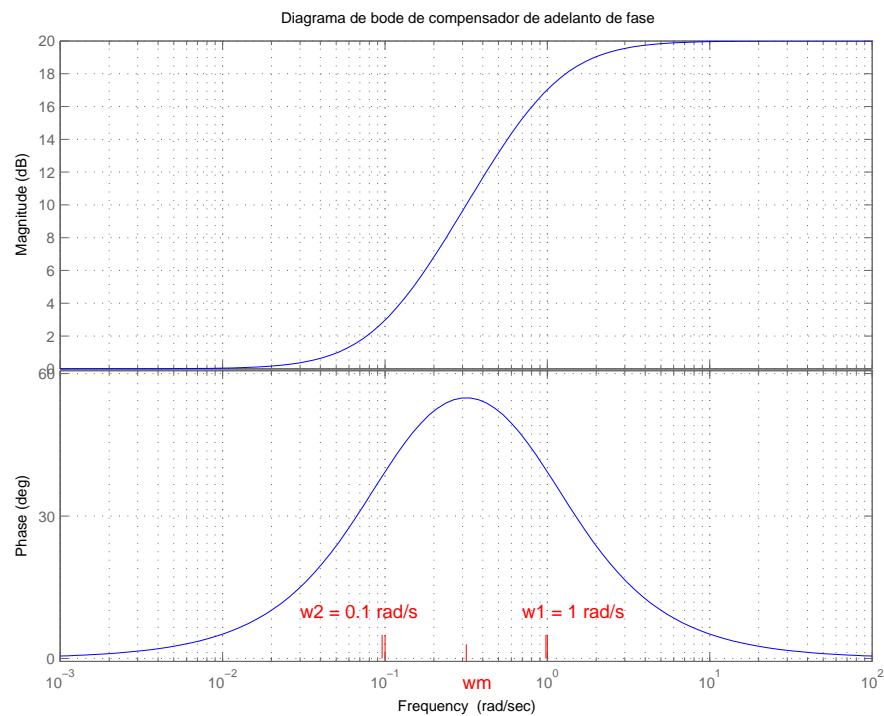


Figura 1: Diagrama de Bode de un compensador de adelanto de fase

El compensador de adelanto de fase tiene la forma general

$$G_{caf} = K_c \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

La frecuencia donde se alcanza el máximo de adelanto de fase es  $\omega_m = \frac{1}{T \sqrt{\alpha}}$  siendo la amplificación a esta frecuencia de  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ .

Conviene tener en cuenta que el compensador de adelanto de fase siempre sumará ganancias positivas sobre el sistema original (ver figura 5), llevando hacia la derecha la frecuencia de cruce de ganancia. Esto originará que el margen de fase aumente menos de lo esperado. Un adecuado diseño del compensador supone que  $\omega_m$  es suficientemente mayor que las frecuencias características del sistema. De esta forma, la ganancia positiva aportada por el compensador no será muy grande a las frecuencias características del sistema y el desplazamiento hacia la izquierda de la frecuencia de cruce de ganancia no será significativo. La disminución del margen de fase respecto de lo esperado se compensa con un cierto margen adicional entre  $5^\circ$  y  $12^\circ$ , tal como se verá en el ejemplo siguiente.

### 1.1. Ejemplo

Ejemplo de la página 624 de Ogata.

Para el sistema con función de transferencia

$$G_1(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

se quiere diseñar un compensador para el sistema de modo que la constante

de error estático de velocidad  $K_v$ , sea de  $20 s^{-1}$ , el margen de fase sea al menos de  $50^\circ$  y el margen de ganancia sea al menos de  $10 dB$ .

En primer lugar se obtiene la constante del compensador, comprobando si simplemente con un controlador proporcional en bucle cerrado podríamos cumplir con las especificaciones. Si no es así, el valor que se obtiene de cumplir con la especificación de la constante estática (en este caso de velocidad) será la constante  $K_c$  que habrá de tener el compensador.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G_1(s) = K_c \cdot 2$$

Luego  $K_c = 10$ . Con este valor, se comprueba si el sistema original junto con esta ganancia cumple las especificaciones del margen de fase y ganancia, para lo que se traza su diagrama de Bode (fig. 2).

Se ve que el margen de ganancia es infinito, lo que es propio de sistemas de orden uno o dos. El margen de fase es aproximadamente  $18^\circ$ . La frecuencia de cruce de ganancia es  $6,16 rad/s$ . Como esta frecuencia es suficientemente mayor que las frecuencias características del sistema original, se supone un margen adicional sobre el margen de fase de  $5^\circ$ . Si estuviera más próximo, habría que subir hasta  $12^\circ$ . Por tanto el margen de fase que el compensador debe aportar es el margen de fase especificado, más el adicional, menos el original

$$M_\phi^{comp} = M_\phi^{esp} + M_\phi^{adic} - M_\phi^{orig} = 37^\circ$$

Se puede demostrar que el valor de  $\alpha$  para el compensador es tal que

$$\sin(M_\phi^{comp}) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

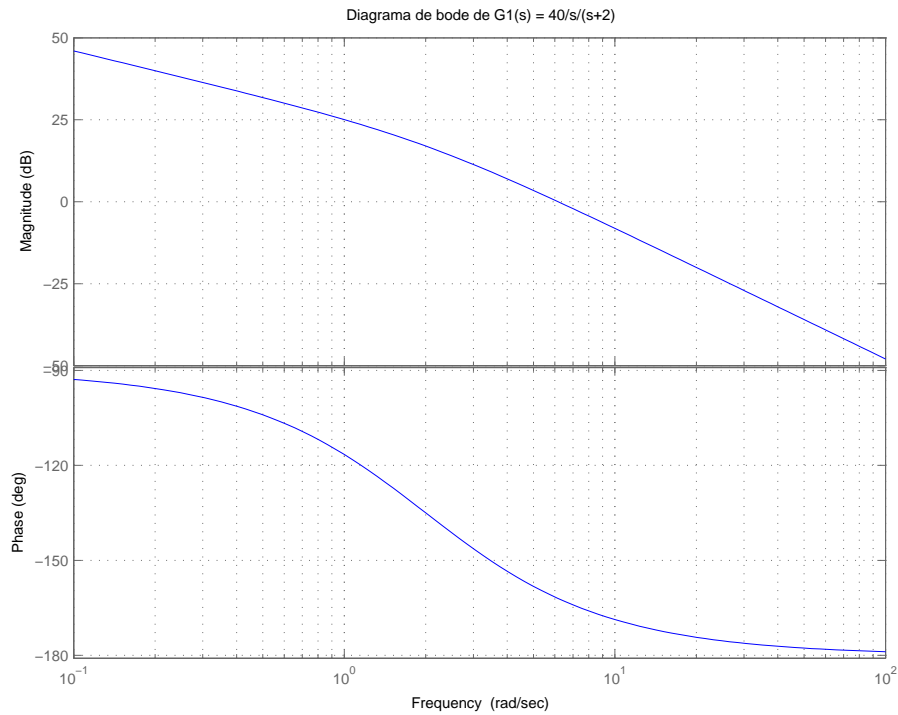


Figura 2: Diagrama de Bode del sistema con  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)}$

con lo que  $\alpha = 0,2482$ .

El ángulo de adelanto de fase máximo se da en una frecuencia que es  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ . Interesa que en la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado se tenga el máximo de adelanto de fase. Por tanto la frecuencia  $\omega_m$  será la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado.

La ganancia que aporta el compensador en la frecuencia de adelanto de fase máximo es  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 6 dB$ . Por tanto, para que el sistema compensado tenga en esa frecuencia una ganancia 1, se busca en el diagrama de Bode a qué frecuencia la ganancia del sistema es  $-6 dB$ , de forma que la ganancia del

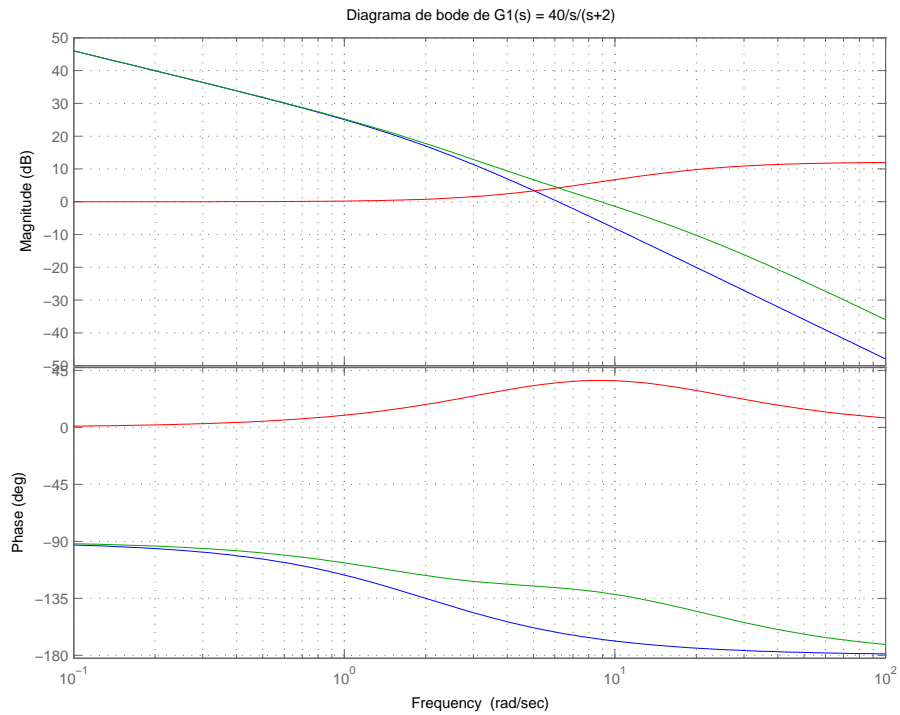


Figura 3: Diagrama de Bode del sistema con  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)}$ , del compensador y del sistema compensado

sistema compensado sea unitaria. La frecuencia es  $8,8 \text{ rad/s}$ , y esta será la frecuencia central del compensador  $\omega_m$ .

De aquí se obtienen los valores de  $T = 0,2281 \text{ s}$  y  $\alpha T = 0,056 \text{ s}$ , con lo que el compensador resulta

$$G_{caf(s)} = 10 \frac{0,2281 s + 1}{0,056 s + 1} \quad (1.1)$$

La figura 3 muestra los diagramas de Bode del sistema original (multiplicado por  $K_c$ ), del compensador (sin  $K_c$ ) y del sistema compensado.

En la figura 4 se observa en trazo discontinuo el comportamiento de los

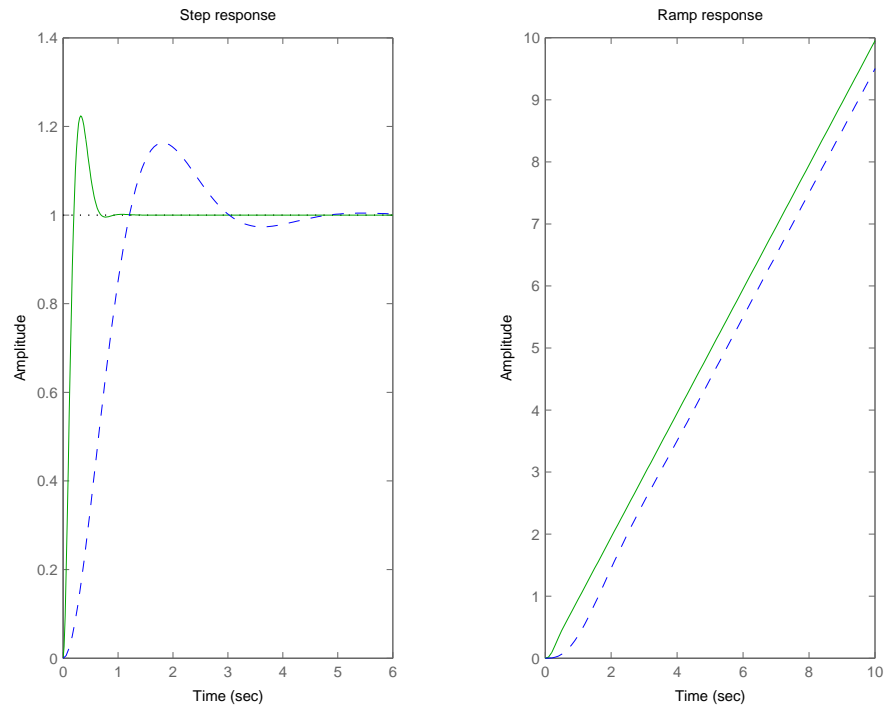


Figura 4: Respuesta del sistema  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{40}{s(s+2)}$  y del sistema compensado para entradas en escalón y rampa

sistemas original (sin multiplicar por  $K_c$ ) y, en trazo continuo, compensado, para una entrada en escalón y rampa.

## 2. Diseño de un compensador por retardo

El compensador de retardo igualmente persigue el aumento del margen de fase pero mediante otra estrategia. El efecto primero del compensador es disminuir la ganancia del sistema compensado para frecuencias iguales o superiores a las frecuencias características del sistema, con lo que supuestamente debería trasladar la frecuencia de cruce de ganancia hacia valores

menores. Como el margen de fase se mide a la frecuencia del cruce de ganancia, y esta se conseguirá reducir, es previsible que dicho margen aumente. El diagrama de Bode de un compensador de retardo con ganancia unitaria puede ser como el mostrado en la figura 5.

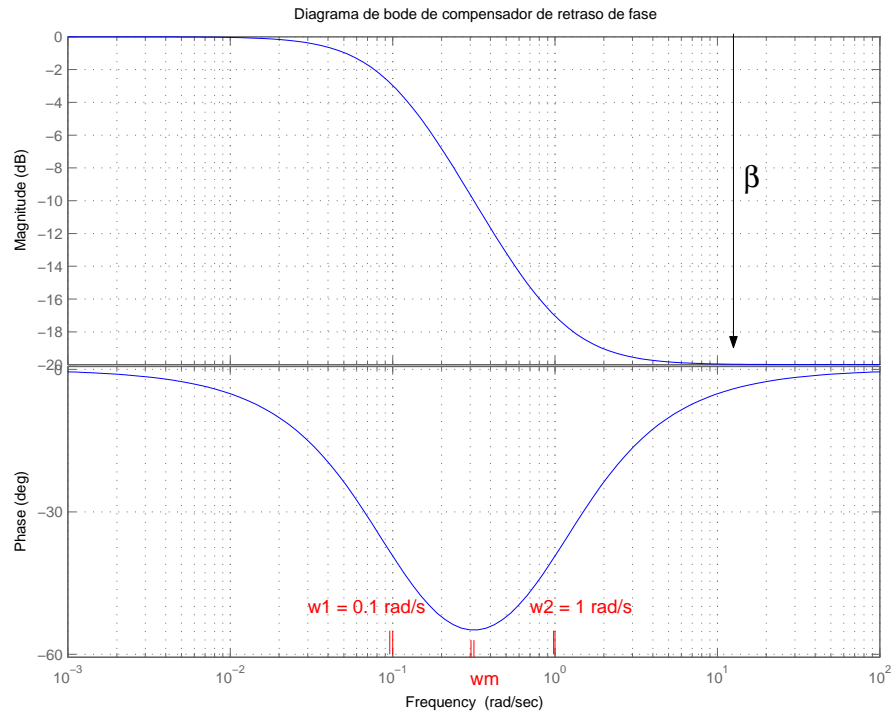


Figura 5: Diagrama de Bode de un compensador de retardo

El compensador de adelanto de fase tiene la forma general

$$G_{cr} = K_c \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} \quad \text{con } \beta > 1$$

A frecuencias suficientemente altas, el sistema original verá atenuada su amplitud en

$$\text{Atenuacion} = 20 \log \left( \frac{1}{\beta} \right) \tag{2.1}$$

que para el caso de la figura 5 vale  $-20\text{ dB}$ . Conviene tener en cuenta que el compensador de retardo sumará fases negativas sobre el sistema original (ver figura 5). Un adecuado diseño del compensador supone que  $1/T$  es suficientemente menor que las frecuencias características del sistema. De esta forma, para frecuencias del orden de la frecuencia de cruce de ganancia, la cantidad de fase negativa que se sumará en la frecuencia de cruce de ganancia no será significativa, y se podrá compensar con un cierto margen adicional entre  $5^\circ$  y  $12^\circ$ .

## 2.1. Ejemplo

Ejemplo de la página 633 de Ogata.

Para el sistema con función de transferencia

$$G_1(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+1)}$$

se quiere diseñar un compensador para el sistema de modo que la constante de error estático de velocidad  $K_v$  sea de  $5\text{ s}^{-1}$ , el margen de fase sea al menos de  $40^\circ$  y el margen de ganancia sea al menos de  $10\text{ dB}$ .

En primer lugar se obtiene la constante del compensador, comprobando si simplemente con un controlador proporcional en bucle cerrado podríamos cumplir con las especificaciones. Si no es así, el valor que se obtiene de cumplir con la especificación de la constante estática (en este caso de velocidad) será la constante  $K_c$  que habrá de tener el compensador.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G_1(s) = K_c$$



Luego  $K_c = 5$ . Con este valor, se comprueba si el sistema original junto con esta ganancia cumple las especificaciones del margen de fase y ganancia, para lo que se traza su diagrama de Bode (fig. 6).

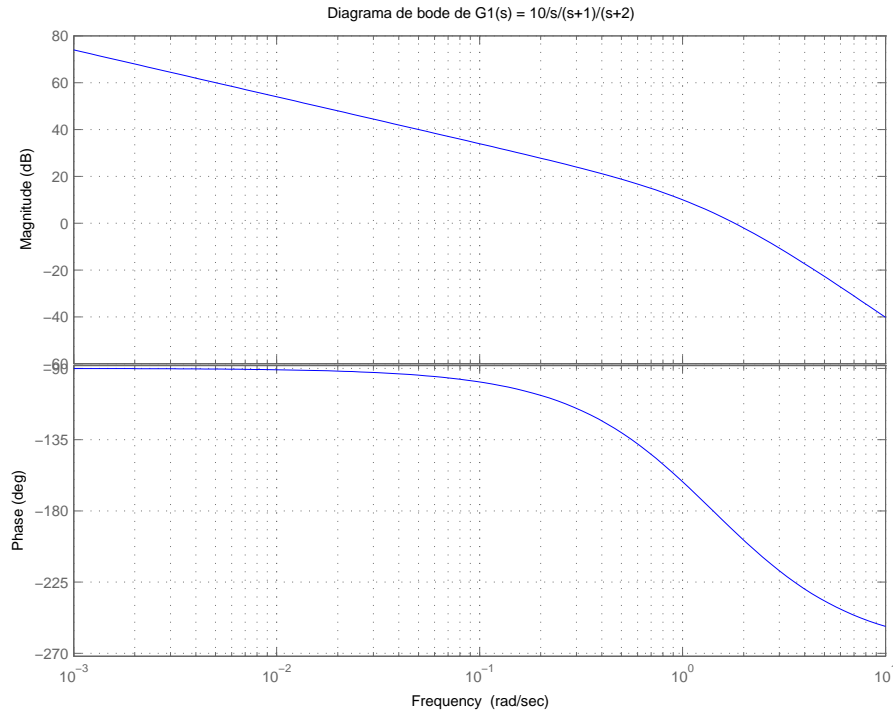


Figura 6: Diagrama de Bode del sistema con  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+1)}$

El sistema no es de orden uno o dos, por lo que el margen de ganancia no será infinito. De hecho es  $-4,5 \text{ dB}$ , es decir, que el sistema con esa ganancia de 5, resulta ser inestable. El margen de fase, lógicamente también negativo, es  $-13^\circ$ . La frecuencia de cruce de ganancia es  $1,8 \text{ rad/s}$ .

En principio, no se tiene mucha información de dónde centrar el compensador de retardo. Se escogerá un margen adicional de  $8^\circ$ , intermedio entre  $5^\circ$

y  $12^\circ$ . Por tanto, el margen de fase que se debe buscar para el sistema será de

$$M_\phi = M_\phi^{esp} + M_\phi^{adic} = 48^\circ$$

El sistema original presenta una fase de  $-132^\circ$  a la frecuencia de  $0,5 \text{ rad/s}$ . Será esta la frecuencia de cruce de ganancia deseada para el sistema compensado.

La frecuencia de corte más alta del compensador ( $1/T$ ) debería ser entre 2 y 10 veces menor de esta frecuencia. Si se escoge 2, el Bode de fase interferirá demasiado y habría que aumentar el margen adicional a  $12^\circ$ . Si se escoge 10, se podría bajar este margen adicional a  $5^\circ$ , pero daría lugar a frecuencias demasiado bajas que implican constantes de tiempo muy altas, lo cual no es conveniente. Se deja en 5 veces menor y se da por bueno un margen de seguridad de  $8^\circ$ .

Por tanto, la mayor frecuencia de cruce del compensador de retardo se sitúa en  $0,1 \text{ rad/s}$ , que corresponde a  $T = 10 \text{ s}$ .

Por otro lado, a  $0,5 \text{ rad/s}$ , la ganancia es de 18.4 dB. Como  $0,5 \text{ rad/s}$  es la frecuencia de cruce de ganancia deseada, aplicando una atenuación de -18.4 dB, se consigue que el sistema compensado tenga una amplitud de 0 dB a la frecuencia de  $0,5 \text{ rad/s}$ . Por tanto esta atenuación, que corresponde a un valor de 8,32, será la que el compensador de retardo debe conseguir. Por tanto el valor  $\beta$ , tal como se explicó anteriormente y se muestra en la figura 5, equivale a esta atenuación, es decir  $\beta = 8,32$ .

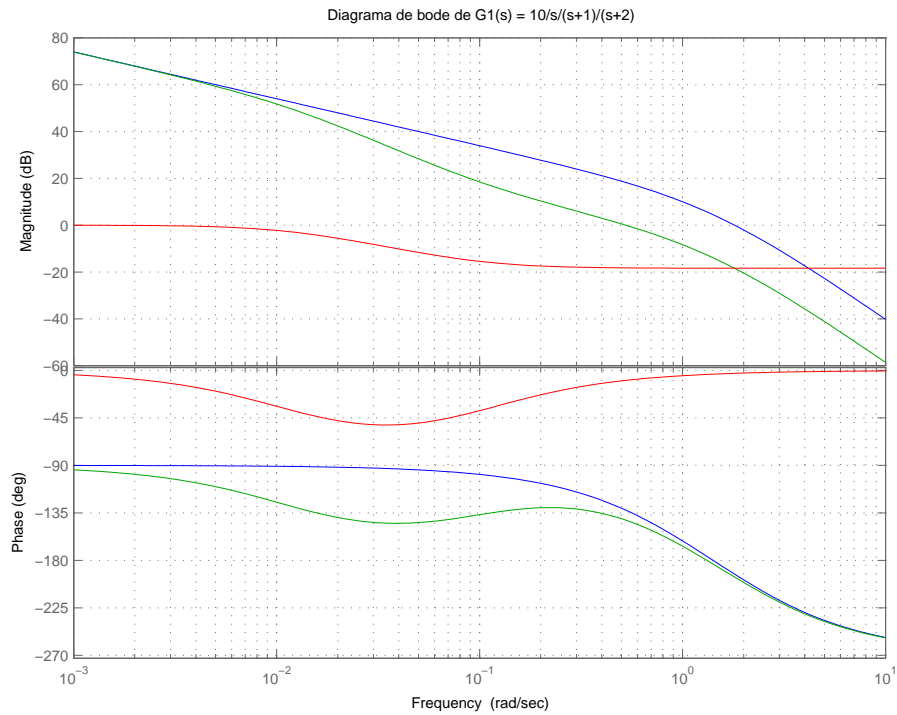


Figura 7: Diagrama de Bode del sistema con  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$ , del compensador y del sistema compensado

El compensador de retardo queda finalmente

$$G_{cr(s)} = 5 \frac{10s + 1}{83,2s + 1} \quad (2.2)$$

La figura 7 muestra los diagramas de Bode del sistema original (multiplicado por  $K_c$ ), del compensador (sin  $K_c$ ) y del sistema compensado.

En la figura 8 se observa en trazo discontinuo el comportamiento de los sistemas original (sin multiplicar por  $K_c$ ) y, en trazo continuo, compensado, para una entrada en escalón y rampa.

Realmente la respuesta transitoria es peor. La pareja polo-cero cerca del

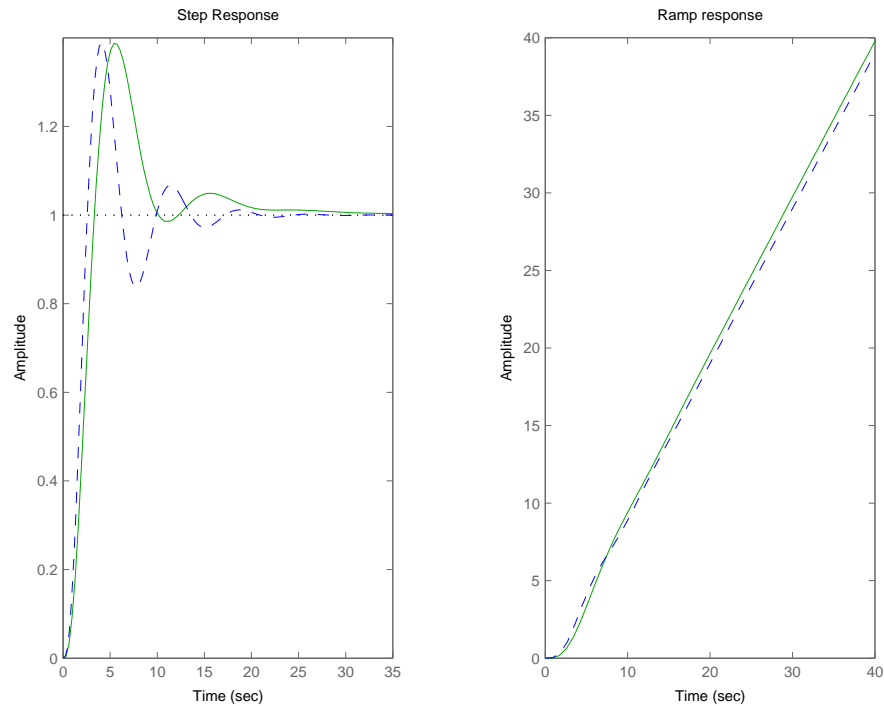


Figura 8: Respuesta del sistema  $K_c \cdot G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$  y del sistema compensado para entradas en escalón y rampa

origen produce una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta escalón, aumentando el tiempo de asentamiento. Sin embargo, el error en régimen permanente disminuirá en el caso de excitación en rampa.

### 3. Comparación de las compensaciones de adelanto y retardo

1. La compensación de adelanto proporciona el resultado deseado mediante su contribución al adelanto de fase, mientras que la compensación de retardo logra el resultado a través de su propiedad de atenuación a

altas frecuencias.

2. La compensación de adelanto suele usarse para mejorar los márgenes de estabilidad. La compensación de adelanto da una frecuencia de cruce de ganancia más alta que la que puede obtenerse con la compensación de retardo. La frecuencia de cruce de ganancia más alta significa un mayor ancho de banda. Un ancho de banda grande implica una reducción en el tiempo de asentamiento. Si se desea un ancho de banda grande o una respuesta rápida, debe emplearse la compensación de adelanto. Sin embargo, si hay señales de ruido, tal vez no es adecuado un ancho de banda grande, porque esto hace al sistema más sensible a las señales de ruido, debido al incremento de la ganancia a altas frecuencias. Se ve la cierta equivalencia entre un compensador de adelanto y un regulador PD, mientras que un compensador de retardo equivale a un PI.
3. La compensación de adelanto requiere un incremento adicional en la ganancia para compensar la atenuación inherente a la red de adelanto. Esto significa que la compensación de adelanto requiere una ganancia mayor que la que precisa la compensación de retardo. Una ganancia mayor casi siempre implica mayor espacio, mayor peso y un coste más elevado.
4. La compensación de adelanto puede generar grandes señales en el sistema. Estas señales no son deseables porque pueden originar saturaciones en el sistema.

5. La compensación de retardo reduce la ganancia del sistema a altas frecuencias permitiendo aumentarla a bajas frecuencias, con lo que aumenta la precisión en estado estacionario. Al reducir la ganancia a altas frecuencias, los ruidos a altas frecuencias que contiene el sistema se atenúan, aunque al reducirse el ancho de banda del sistema, éste responde a una velocidad más lenta.
6. La compensación de retardo introduce una combinación polo-cero cerca del origen que genera una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta transitoria.