# DANS LES MANUELS SCOLAIRES LA RENCONTRE ENTRE LA VALIDATION MATHÉMATIQUE ET LES VALIDATIONS NON MATHÉMATIQUES : UN EXEMPLE DE DOUBLE DIALECTIQUE DES MEDIAS ET DES MILIEUX

Richard CABASSUT, IUFM d'Alsace, Didirem Paris 7, richard.cabassut@alsace.iufm.fr

**Abstract :** The study of the teaching of the demonstration shows that the validations of the teaching of mathematics are the double transposition of the demonstrations of the mathematical institution (which produces the knowledge) and of the validations, argumentations or proofs, of other institutions (like the "everyday life"). The study of the programs of the "collège-lycée" in France, and "Gymnasium" in Baden-Württemberg, confirmed by the study of textbooks, reveals the use of various types of validation (argumentation, proof) and of arguments (of plausibility or of necessity). Didactic difficulties related to the double transposition. After having described the properties of this double transposition, one will question his extention with other situations of teaching.

Resumen: El estudio de la enseñanza de la demostración muestra que las validaciones de la enseñanza de matemáticas son la doble transposición de las demostraciones de la institución matemática (que produce el conocimiento) y las validaciones, argumentaciones o pruebas, de otras instituciones (como la "vida diaria"). El estudio de los programas del "collège-lycée" en Francia, y del "Gymnasium" en Baden-Württemberg, confirmada por el estudio de manuales, revela el uso de distintos tipos de validación (argumentación, prueba) y argumentos (de plausibilidad o necesidad). Dificultades didácticas en relación con la doble transposición aparecen. Después de haber descrito las propiedades de esta doble transposición, se preguntará su extention a otras situaciones de enseñanza. Pour valider la vérité d'une proposition, on utilise des arguments de nécessité, dont la conclusion est nécessairement vraie, au sein de démonstrations.

Nous allons étudier un média, le manuel scolaire de mathématiques dans l'enseignement scolaire. Dans ce média, nous étudions le thème de la démonstration (ou de manière plus large de la validation). Ce media est influencé par deux milieux distincts. Un premier milieu est constitué par les institutions des mathématiques savantes, qui utilisent la démonstration mathématique comme mode de validation, hors de toute intention didactique d'enseignement de cette démonstration dans l'enseignement secondaire; cette dernière intention est plutôt de la responsabilité des institutions d'enseignement secondaire. Un second milieu est constitué des autres institutions, au sens large : la vie quotidenne, la famille, les classes de sciences expérimentales, la classe de philosophie ... Dans ces institutions il n'y a pas également d'intention didactique à propos de la démonstration dans l'enseignement secondaire mathématique.

Nous allons étudier la double dialectique entre ce média, le manuel scolaire, et ces deux milieux (pour faire court mathématique et non mathématique). Nous montrerons que les institutions de l'enseignement secondaire sont le lieu d'une double transposition, de la validation mathématique et de la validation non mathématique, et que cette double dialectique a des formes et des fonctions qui peuvent s'expliquer par l'institution où elle est mise en oeuvre.

C'est pourquoi nous utiliserons une approche comparative, entre des institutions françaises et allemandes (plus précisément du Baden-Württemberg). Cette approche comparative permettra de mieux contraster les formes et les fonctions de cette dialectique.

### 1 La démonstration objet d'enseignement dans des manuels scolaires : cohabitation entre plausibilité et nécessité

#### 1.1 La démonstration comme thème d'étude

Nous avons trouvé et analysé une leçon sur la démonstration dans le manuel de Baden-Württemberg de Klasse 8, Gymnasium, Baden-Würtemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition 1995) et dans le manuel de la classe de quatrième, collection triangle, Hatier, 1998. On observe donc, dans chaque manuel, l'apparition de la démonstration comme objet d'enseignement. Dans les deux pays cette apparition est progressive. Nous avons identifié et illustré les genres de tâche suivants : découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les statuts, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), changer de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier). Alors que démontrer est un genre de tâche mathématique, par contre changer de registre, contrôler, découvrir ne sont pas des genres de tâches isolées en mathématiques mais sont intégrés au processus de démonstration. La pratique isolée de ces tâches, par exemple changer de registre de manière isolée, découvrir de manière isolée, contrôler de manière isolée au lieu d'être intégré à une activité de résolution de problème correspond à un exercice scolaire lié au phénomène de transposition didactique et au passage, pour la démonstration, du statut d'objet paramathématique à celui d'objet d'enseignement. On comprend que cet isolement peut être nécessaire pour bien identifier les tâches de ce genre et apprendre à la réaliser. Mais on comprend aussi le risque de dérive si ce travail isolé a trop d'ampleur.

La **technologie** mobilisable pour réaliser les tâches de ce genre fait cohabiter une technologie logique ou de raisonnement, présentée de manière assez sommaire, une technologie mathématique avec une emphase particulière sur la géométrie, une technologie non mathématique, constituée essentiellement par les arguments visuels (observations), pragmatiques (mesure sur des figures) ou inductifs (vérification sur quelques exemples). Cette dernière technologie non mathématique est sollicitée dans les tâches du genre « conjecturer », « tracer » ou « construire »... Les élèves sont habituées à fréquenter cette technologie, depuis l'école primaire avec la géométrie perceptive et la géométrie instrumentée, jusqu'à la géométrie de constat du début de collège. C'est ce que [Parzysz 2003] désigne sous le nom de « géométrie concrète » (G0) et « géométrie spatio-graphique (G1).

Les types de **techniques** sont peu décrites même si l'on voit apparaître quelques types de technique : démontrer la fausseté à l'aide d'un contre-exemple, démontrer la vérité en appliquant un théorème de forme conditionnelle, découvrir en reconnaissant une configuration particulière dans une figure. Dans le manuel français on évoque deux autres types de techniques : démontrer par le calcul et découvrir par conditions suffisantes.

La fonction de vérification est prise en compte dans le cas des tâches du genre « démontrer » pour vérifier la vérité et dans le cas des tâches du genre « conjecturer » pour vérifier la plausibilité. On peut supposer les fonctions de communication et de systématisation locale prises en compte dans les tâches du genre « contrôler », « changer de registre » et « démontrer », qui permettent de vérifier l'application des énoncés conditionnels, de formuler d'un registre dans l'autre, de corriger éventuellement la rédaction d'une démonstration. La fonction de découverte, associée naturellement aux tâches du genre « découvrir », et la fonction de communication peuvent également être remplies par des tâches du genre « changer de registre» qui peuvent déboucher sur

une idée plus claire dans un registre que dans un autre et qui permettent de communiquer en ayant recours à la figure. Cependant, les **fonctions d'explication ou de systématisation globale** semblent absentes de cette leçon. Nous allons maintenant observer comment des théorèmes de cours sont validés dans des manuels.

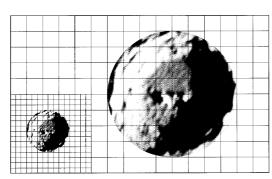
#### 3.2 La validation de théorèmes de cours

Pour étudier, nous avons choisi différents théorèmes d'après les variables suivantes : positions relatives, selon le pays, du moment de première validation du théorème, position relative de première validation du théorème par rapport à la classe de quatrième ou à la classe 8 où la démonstration est introduite, domaine mathématique du théorème, technologie mathématique mobilisable ou non.

Prenons un exemple concernant la validation de la formule de l'aire du disque et du périmètre du cercle.

**Dans un manuel allemand** de classe 10 (15-16 ans) de la même collection on a la validation suivante.

#### Aire du disque



- 1 Die beiden Bilder zeigen den Mondkrater "Kopernikus" auf zwei verschiedenen Mondkarten.
- a) Kann man den Bildern entnehmen, wie groß die Fläche des Kraters in Wirklichkeit ist?
- b) Wie viele der eingezeichneten Quadrate liegen ganz in der Kraterfläche? Warum sind es auf beiden Karten gleich viele?
- c) Gib für den Flächeninhalt des Kraters einen Näherungswert in der Flächeneinheit "I Ouadratfläche" an.
- d) Wie lautet der Näherungswert in der Einheit "1 Radiusfläche"?



Bisher haben wir Flächeninhalte von Vielecken berechnet. Nun versuchen wir, Flächeninhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Die wichtigste derartige Figur ist der Kreis.

Der Flächeninhalt des Kreises auf dem Rand ist kleiner als 16 cm², aber größer als 8 cm². Vergleicht man den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Flächeninhalt r² des Radiusquadrates, so stellt man fest: Bei allen Kreisen ist

$$2r^2 < A < 4r^2$$
 oder  $2 < \frac{A}{r^2} < 4$ .



Die Schranken 2 und 4 hängen nicht von r ab; wir können daher vermuten: Bei allen Kreisen ist der Quotient  $\frac{\Lambda}{r^2}$  die **gleiche** (zwischen 2 und 4 gelegene) Zahl, bzw: Bei allen Kreisen ist der Flächeninhalt **dasselbe** Vielfache von  $r^2$ .

Um die Vermutung zu überprüfen, denken wir uns regelmäßige Vielecke derselben Eckenanzahl n in zwei Kreise einbeschrieben. Da diese n-Ecke ähnlich sind, gilt für ihre Flächeninhalte  $A_1$  und  $A_2$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$
 oder  $\frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}$ 



D. h.: Bei festem n ist der Quotient aus n-Eck-Inhalt und Inhalt des Radiusquadrats bei allen Kreisen gleich.

Da sich der Inhalt eines n-Ecks bei hinreichend großer Eckenzahl vom zugehörigen Kreisinhalt nur beliebig wenig unterscheidet, muss in gleicher Weise auch für die Kreisinhalte gelten:





Satz: Der Quotient A: r2, d.h.:

(Flächeninhalt des Kreises) : (Flächeninhalt des Radiusquadrates)

ist bei allen Kreisen gleich.

#### **Indications de traduction:**

L'auteur commence par une activité d'approche autour d'évaluation par quadrillage d'aires.

Il poursuit en proposant la conjecture suivante, qui correspond à une argumentation.

« L'aire du disque dans la marge est plus petite que  $16\text{cm}^2$ , mais plus grande que  $8\text{ cm}^2$ . On compare l'aire A d'un disque avec l'aire  $r^2$  du carré de côté r, on constate ainsi que : pour tous les cercles on a :  $2 r^2 < A < 4 r^2$  ou  $2 < \frac{A}{r^2} < 4$ .

Les bornes 2 et 4 ne dépendent pas de r. On peut **conjecturer** que pour tous les cercles le quotient

$$\frac{A}{r^2}$$
 est le même (compris entre 2 et 4) »

Intéressons-nous à la validation de cette conjecture dans le manuel.

« Pour vérifier notre conjecture, nous considérons deux polygones réguliers de même nombre n de sommets inscrits dans deux cercles de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$ . Comme ces deux polygones sont semblables, leur aires  $A_1$  et  $A_2$  sont dans le rapport :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$
 ou  $\frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}$ .

Cela signifie que, pour un n fixé, le quotient de l'aire d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r et l'aire d'un carré de côté r est le même pour tous les cercles.

Comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques :

Théorème : Le rapport  $\frac{A}{r^2}$  est le même pour tous les disques ».

#### Analyse linéaire.

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		deux polygones réguliers à n sommets	
			respectivement inscrits dans deux	
			cercles d rayons respectifs $r_1$ et $r_2$	
2	1	triangles semblables	les deux polygones sont semblables	règles vues en
			dans le rapport des rayons	classe 9
3	2	aire des polygones	le rapport de l'aire d'un polygone	règles vues en
		semblables	régulier inscrit dans un cercle au carré	classe 9;
			du rayon de ce cercle est constant	explication
4	0 figures du	Induction visuelle	pour n suffisamment grand, l'aire d'un	explication;
	carré et de		polygone régulier inscrit dans un	propédeutique
	l'hexagone		disque diffère aussi peu qu'on le	aux limites
	inscrits dans		souhaite de l'aire du disque	
	un cercle			
5	3, 4	passage à la limite -	le rapport de l'aire d'un disque au carré	preuve
		autorité	de son rayon est constant	

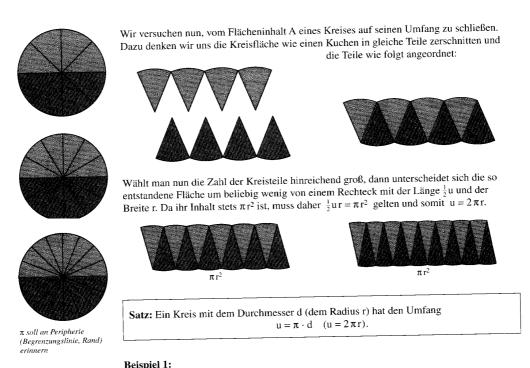
Etudions les deux pas contenant des arguments non mathématiques.

Le pas n°4 contient un argument d'induction. En effet après avoir vérifié (visuellement) que du carré à l'hexagone, l'aire du polygone régulier inscrit dans le cercle se rapproche de l'aire du cercle, il est induit que pour n suffisamment grand, l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un disque diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque. Il n'est pas produit ici de justification mathématique de cette affirmation. C'est pourquoi nous évoquons un argument d'induction, qui n'est pas un argument mathématique.

Dans le pas n°5, partant du rapport de l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle au carré du rayon de ce cercle constant, on effectue un passage à la limite. A la limite, l'aire du polygone inscrit dans le cercle est égale à celle du cercle. Donc Le rapport de l'aire de ce polygone au carré de son rayon est égal au rapport de l'aire du disque au carré de son rayon. Comme ce rapport est constant pour tous les polygones, il est constant pour tous les cercles. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne soit donnée. C'est pourquoi nous parlerons d'argument d'autorité exprimant un passage à la limite. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique.

La suite du manuel propose une validation de la formule de la circonférence du cercle.

#### Périmètre du cercle



- a) Hat ein Kreis den Radius  $r = 0.75 \, \text{m}$ , so gilt  $u = \pi \cdot 1.50 \, \text{m} \approx 4.71 \, \text{m}$ .
- b) Bei einem Fahrrad hat jedes Rad einen Durchmesser von 80 cm; also gilt für den Radumfang  $u = \pi d \approx 3,14 \cdot 80 \text{ cm} \approx 2,51 \text{ m}.$

Legt das Fahrrad z.B. 1 km zurück, so ist die Anzahl der Radumdrehungen ungefähr (1000: 2,51), also etwa 398.

#### **Indications de traduction:**

Après la validation de la formule de l'aire A d'un disque de rayon r indiquant que le rapport A sur  $r^2$  est constant, le livre définit le nombre  $\pi$  comme étant ce rapport constant.

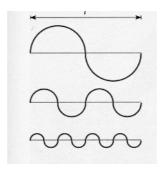
Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de  $\pi$  (méthode d'Archimède,...)<sup>1</sup>.

On établit ensuite le théorème ci-dessus sur le périmètre du cercle.

On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci avant.

« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre et de largeur un rayon ». Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut  $\pi$  fois le carré du rayon, on en déduit que le périmètre du cercle vaut  $\pi$  fois le diamètre.

On signale cependant par la figure ci-dessous qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment



#### Analyse linéaire.

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		3 disques découpés respectivement	
			en 8, 12, 16 secteurs identiques	
2	1	constat visuel	l'aire de la surface reconfigurée se	explication
			rapproche de plus en plus de celle	
			d'un rectangle de hauteur le rayon r	
			du disque et de base un demi	
			périmètre de cercle	
3	2	induction	on peut choisir un nombre de	explication,
			secteurs suffisamment grand pour	propédeutique
			que l'aire de la surface recomposée	
			diffère aussi peu qu'on le souhaite	
			de l'aire d'un rectangle de longueur	
			un demi-périmètre (½ u) de cercle	

pages 75, 83, 84

\_

			et de largeur un rayon r				
4	3	autorité	l'aire du disque vaut l'aire du				
		(passage à la	rectangle précédent (interprétation)				
		limite)					
5	2	formules de	l'aire du disque vaut :	aire c	du d	lisque	vue
		l'aire du disque	$\pi$ r $^2$ ;	précéd	emm	ent, air	e du
		et de l'aire du	l'aie du rectangle vaut : ½ u×r	rectang	gle vu	ie en c	lasse
		d'un rectangle		5.			
6	4, 5	calcul	le périmètre d'un cercle de rayon r				
			vaut $2\pi$ r.				

Etudions les pas contenant des arguments non mathématiques.

Le pas n°2 est un constat visuel avec 8 secteurs puis 16 secteurs de l'apparition d'une figure se rapprochant d'un parallélogramme. Ici la recomposition des secteurs en espèce de parallélogramme pourrait se montrer avec les propriétés géométriques disponibles en classe 10. Le recours au constat visuel permet de simplifier l'exposé.

Par contre le pas n°3 contient un argument d'induction. En effet après l'avoir vérifié sur quelques cas, on conclut qu'on peut choisir un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre (½ u) de cercle et de largeur un rayon r. Il n'est pas produit ici de justification mathématique de cette affirmation. C'est pourquoi nous évoquons un **argument d'induction**, qui n'est pas un argument mathématique.

Dans le pas n°4, par passage à la limite, on déduit que l'aire du disque vaut l'aire du rectangle précédent. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne puisse être donnée à ce niveau de classe. C'est pourquoi nous parlerons d'**argument d'autorité** exprimant un **passage à la limite**. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique.

**Dans un manuel français** de classe sixième, « le nouveau Pythagore », on trouve la validation suivante concernant la formule de la circonférence du cercle.

#### Périmètre du cercle

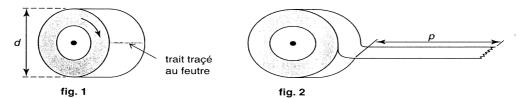
Périmètre du cercle.

### $\dot{\mathbf{A}}$ la recherche de $\pi$

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

#### A. Expériences, mesures et calculs

1. Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif. Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban (fig. 1).



Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

2. Mesurer la longueur p du ruban déroulé (fig. 2). Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) p =			
Diamètre (cm) d =			
<i>p</i> ÷ <i>d</i> ≈			

#### **B.** Conclusion

- 1. Que constate-t-on dans ce tableau?
- 2. Compléter la phrase :

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. Compléter la formule :  $p = \pi \times ...$  avec  $\pi \approx ...$ 

**Analyse linéaire :** On propose de reconstruire une validation attendue à partir des questions posées et du contexte.

0	1 /	\ 1	1 .	
n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		différents cercles (de rouleaux de	
			rubans adhésifs d'élèves de la classe)	
2	1	constat visuel (mesure)	pour chaque cercle le périmètre et le	
			diamètre valent	
3	2	calcul	pour chaque cercle, le rapport	découverte/
			périmètre sur diamètre vaut environ	plausibilité
				(calcul
				approché)
4	3	induction (autorité)	pour tout cercle le rapport précédent	plausibilité
			est constant et est noté $\pi$ avec $\pi \approx$	
5	4	calcul	le périmètre d'un cercle de diamètre D	
			vaut π D	

La technique de mesure du pas n°2 est **pragmatique** car justifiée par le constat visuel. Elle remplit une fonction de **découverte** de la constance du rapport périmètre/diamètre.

Elle pourrait mener, à l'aide d'un raisonnement inductif, à une argumentation affirmant le résultat probable. En l'absence de démonstration mathématique possible dans cette classe compte tenu des technologies mobilisables, on préfère utiliser l'autorité du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai, s'appuyant sur l'induction à partir des mesures. En imposant le résultat comme vrai, le recours à l'argument d'autorité remplit la fonction de preuve qui ne peut être remplie par une démonstration mathématique en l'absence de technologie mobilisable adéquate permettant le passage à la limite. Le résultat serait imposé comme vrai car utilisé par la suite comme élément de technologie justifiant des calculs de périmètre de cercle. Il y a un principe didactique du théorème admis qui consiste à utiliser l'argument d'autorité pour valider des théorèmes à mobiliser pour la suite de la scolarité, qu'on retrouve dans les programmes parfois sous la mention « preuve admise » lorsque l'absence de technologie mobilisable ou les contraintes de la situation d'enseignement (manque de temps, difficultés de la classe, manque d'intérêt...) ne le permettent pas: «À ce propos, les études expérimentales (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves ne les confondent avec des démonstrations : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré » [Ministère 1998, p.43]. On pourra regretter ici que la distinction entre conjecturer et démontrer ne soit pas aussi claire dans l'énoncé de l'activité ci-dessus, et qu'il n'apparaisse pas clairement que le résultat est admis.

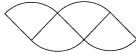
**Aire du disque :** Le manuel de 5ème (1é-13 ans), suite du manuel précédent, propose une validation de la formule de l'aire du disque.

## Entre nous Objectos : • Utiliser la formule du perimètre du

 Dacouvrir la formule de l'aire d'un disque.

#### A. Découpage et collage

- 1. Dessiner et découper 4 disques de mêmes dimensions.
- 2. Couper le premier disque en 4 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 4 secteurs.



Remarques :
• Un peu de patience : la formule

- est au hout.

   Les collages sont
  plus aisés et plus
  propies avec du
  papier autocoliant.
- 3. Couper le second disque en 8 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 8 secteurs.
- 4. Même travail avec 16 secteurs (et avec 32 si vous voulez).

#### B. Formule

- 1. À quoi ressemble la figure obtenue en collant tête-bêche des secteurs nombreux et très fins?
- En déduire une formule pour calculer l'aire d'un disque.
- 2. Un disque compact fait 12 cm de diamètre. *Peu importe son air! Calculer son aire.*

#### Analyse linéaire.

On propose de reconstruire une validation attendue à partir des questions posées et du contexte.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		4 disques découpés respectivement en 4, 8,	
			16, 32 secteurs identiques	
2	1	constat visuel,	la surface reconfigurée ressemble de plus en	explication/
		induction	plus à un parallélogramme de hauteur le	découverte/
			rayon R du disque et de base un demi	persuasion
			périmètre de cercle	
3	2	autorité	l'aire du disque vaut l'aire du	vérification
			parallélogramme précédent	
4	4	formules de l'aire		
		d'un	$\pi R^2$	
		parallélogramme		
		et périmètre d'un		
		cercle		
5	3, 4	calcul	l'aire du disque de rayon R vaut :	
			$\pi R^2$	

Cette validation constitue une preuve puisque la conclusion est affirmée comme conclusion nécessaire d'une suite de déductions.

La technique du pas n°2 est **pragmatique** (découpage, reconfiguration). Cette technique est une **explication** puisqu'elle montre, par reconfiguration, le lien entre l'aire du parallélogramme et celle du disque. Elle est justifiée par **constat visuel** et une induction à partir des 4 découpages.

Le pas n°3 utilise l'**autorité** du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai mais en s'appuyant également sur les résultats des techniques pragmatiques.

Une démonstration mathématique ne nous apparaît pas possible compte tenu de la technologie mobilisable en cinquième qui ne permet pas, par exemple, le passage à la limite implicite dans le pas  $n^{\circ}2$ .

Enfin on notera que pour passer de l'argumentation à la démonstration on utilise un argument d'autorité. Mais cet argument à lui seul pourrait ne pas suffire à persuader les élèves, c'est pourquoi on a recours un argument pragmatique, plus persuasif.

Enfin la technologie mathématique utilise les formules d'aire du parallélogramme (mobilisable en cinquième) et de périmètre du cercle (mobilisable en sixième).

#### Comparaison entre les deux manuels

 Les technologies non mathématiques sont analogues : une technique pragmatique de découpage/recomposition des secteurs est justifiée par constat visuel et un argument d'autorité.

- Dans l'institution française, on n'a pas formulé l'induction du passage à la limite sous forme générique (comme dans le cas allemand). Plusieurs hypothèses peuvent être formulées : difficulté cognitive pour des élèves de classe de cinquième à recevoir un raisonnement de passage à la limite, absence de fonction préparatoire à l'enseignement des limites du fait de l'éloignement des classes de sixième et cinquième par rapport à la classe de première où sont introduites les limites. Par contre, dans l'institution allemande la fonction préparatoire à l'enseignement des limites (**fonction propédeutique de la fonction découverte**), explicitement mentionnée dans les programmes de classe 10, peut expliquer cette formulation. Le programme précise en effet : «Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul »<sup>2</sup> [Ministerium 4/1994, p.481]
- Les technologies mathématiques sont différentes : dans l'institution française, formule de l'aire d'un parallélogramme, calcul ; dans l'institution allemande, triangles semblables, formule de l'aire d'un rectangle et calcul.
  - Dans l'institution française, on a commencé par valider la formule du périmètre en sixième et c'est cette formule qu'on utilise pour valider la formule de l'aire; sans doute parce que, ne disposant pas de la technologie sur le rapport des aires de figures semblables utilisée dans la validation allemande, il n'était pas aisé de mettre en place un argument pragmatique pour mesurer les aires (à l'exception des techniques de quadrillage assez inconfortables ou des techniques utilisant des logiciels de géométrie plane avec calcul d'aires); par contre cet argument paraît plus facile à mettre en place pour mesurer les périmètres; on voit donc que la disponibilité de technologies mathématiques peut influencer l'ordre de présentation des validations.

On observe la coexistence d'arguments mathématiques et d'arguments pragmatiques, visuels, d'induction, ou d'autorité. On aurait pu se contenter d'un seul argument d'autorité admettant le résultat. La volonté de remplacer les arguments mathématiques non mobilisables par d'autres types d'arguments vise à remplir des fonctions de la validation (explication, propédeutique, plausibilité) que le seul argument d'autorité remplit mal.

#### 4 Double dialectique et double transposition

Parmi les **technologies** didactiques mises en évidence on note :

-

<sup>&</sup>quot;Den Schülerinnen und Schülern werden die Probleme bei der Bestimmung von Umfang und Inhalt des Kreises sowie des Rauminhalts bestimmter Körper verständlich. Sie bekommen Einblick, wie eine propädeutische Grenzwertbetrachtung die Berechnung ermöglicht"

- le principe en Bade-Wurtemberg comme en France de recours à la figure (par exemple dans la somme des angles du triangle);
- le principe en Bade-Wurtemberg comme en France du renoncement au formalisme (en Bade-Wurtemberg comme en France par exemple dans le théorème de Pythagore);
- en Bade-Wurtemberg le principe de rédaction implicite et concise (recours à codage, recours à figure, implicite dans calcul algébrique, ...) (par exemple dans la somme des angles d'un triangle, l'équation du second degré, ...);
- en France le principe français de rédaction explicite (marqueurs de statuts, explication de démarche, ...) (par exemple dans les équations et inéquations du second degré);
- en France le principe du théorème admis (que nous n'avons pas observé en Bade-Wurtemberg).

Les **technologies** non mathématiques du type arguments visuels, pragmatiques, d'induction, d'autorité, apparaissent :

- lorsque la technologie mathématique n'est pas complètement mobilisable (géométrie de l'ordre pour la somme des angles d'un triangle, passage à la limite pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, théorème des accroissements finis pour les variations de la fonction carrée) ou lorsque l'on veut réaliser certaines fonctions de la validation (explication pour la somme des angles d'un triangle, propédeutique pour le périmètre et l'aire d'un cercle, explication pour le théorème de Thalès, systématisation pour les formules de volumes ou pour les variations de la fonction élévation au carré);
- lorsque des technologies mathématiques mobilisables ne sont pas mobilisées pour des raisons didactiques (principe du renoncement au formalisme (théorème de Pythagore, inéquation du second degré) ou à cause des fonctions assignées à la validation (systématisation pour la variation de la fonction carrée dans le manuel allemand, explication pour le théorème de Pythagore).

Les technologies non mathématiques précédentes cohabitent avec des technologies mathématiques, c'est ce qui illustre le phénomène de double transposition. D'une part on adapte (on transpose) la démonstration mathématiques en remplaçant des arguments mathématiques mobilisables (exemple du théorème de Pythagore) ou non (exemple de la formule de l'aire et du périmètre en Bade-Wurtemberg, exemple de la somme des angles d'un triangle) par des arguments non mathématiques. On transpose une validation mathématique en validation didactique. D'autre part on ne se contente pas d'arguments non mathématiques (par exemple du seul argument d'autorité, ou encore d'un seul argument pragmatique de mesure, ou encore d'un seul argument visuel). On complète ces arguments non mathématiques par des arguments mathématiques (par exemple dans les formules de l'aire et du périmètre du cercle, dans le théorème de Thalès), qui assurent à l'argumentation une qualité mathématique: on transpose une validation non mathématique en une validation didactique. C'est le phénomène de double transposition qui constitue la validation didactique comme lieu de la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments non mathématiques.

Concernant les **techniques** mises sen œuvre on observe :

- **différentes registres** (figure, graphique, tableau, ...) pour alléger le formalisme alors que la

technologie mathématique est mobilisable (dans le théorème de Pythagore avec la technologie des angles mobilisable ; dans l'inéquation du second degré avec la technologie des inégalités et avec la technique de disjonction des cas par lecture graphique);

différentes techniques mathématiques justifiant une démonstration (méthode des aires pour le théorème de Pythagore, méthode du tableau des signes pour l'inéquation du second degré en France, recours à la figure pour l'inéquation du second degré en Bade-Wurtemberg). Il peut arriver qu'une même technique puisse être justifiée au choix, par des arguments mathématiques, ou par des arguments non mathématiques (induction, argument visuel, argument pragmatique, argument d'autorité) (exemple du théorème de Pythagore). Dans les observations faites il est difficile de déterminer le rôle des différentes variables : domaine mathématique concerné, technologies mathématiques mobilisables, techniques mobilisables, rang de la classe, pays concerné, thème étudié, ...

Nous avons cependant montré que les fonctions de la validation pouvaient, en partie, expliquer le type d'arguments, de technologie ou de technique mis en œuvre. Nous avons observé que la **fonction d'explication** était plus fréquente dans les validations observées dans les manuels allemands, ce qui s'accompagnait d'un recours à des registres figuraux, graphiques ou pragmatiques plus fréquents (exemple de l'inéquation du second degré, des variations de la fonction élévation au carré). Il reste cependant délicat de discerner si les différences observées correspondent à des fluctuations de manuels ou reposent sur des différences entre pays. On peut juste remarquer que ces observations corroborent nos observations des textes officiels: plus de poids à la fonction d'explication dans le Bade-Wurtemberg, et plus de poids à la fonction de communication discursive notamment dans la rédaction écrite en France.

Différentes difficultés didactiques ont été repérées du fait de cette double transposition.

La première difficulté se situe au **niveau théorique**. Cette double transposition entraîne en général une cohabitation de deux théories différentes, une théorie sociale et une théorie mathématique. Une des grandes difficultés est que ces théories reposent en général sur des conceptions de la vérité différentes, voire incompatibles. La conception pragmatique de la vérité s'accommode mal d'une conception logique. Les objets, les technologies seront également différents. Ici un **contrat implicite** va essayer de négocier la cohabitation de ces deux théories au sein d'une théorie didactique qui essaiera de synthétiser ces deux théories. Dans le domaine de la géométrie, les travaux de Parzysz, Houdement et Kuzniak proposent différents niveaux théoriques intégrant cette double transposition. Nous avons également vu comment les programmes officiels suggèrent cette cohabitation : progressivité, passage du local au global, distinction entre validations de théorèmes de cours et démonstrations lors de la résolutions d'exercices ou de problèmes.

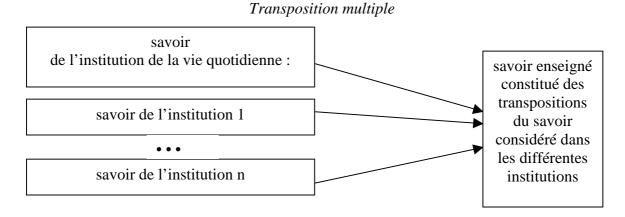
La seconde difficulté se situe au **niveau de la distinction entre technologie et technique**. Nous avons montré que certaines techniques pragmatiques, visuelles voire inductives ne sont qu'une manière moins formelle d'appliquer des éléments de technologie mathématique. Comment savoir si le recours à la figure repose sur une justification visuelle non mathématique, sur une justification mathématique mobilisable mais non formalisée, sur une justification mathématique non mobilisable? C'est à nouveau le recours au **contrat implicite** qui est sensé régler cette cohabitation. Nous avons vu des recours à la figure aussi bien pour le théorème de Pythagore en  $4^{\text{ème}}$ /Klasse 9, qu'à propos de la démonstration graphique du théorème des gendarmes en première S

ou de la démonstration du théorème sur les variations d'une fonction dérivable d'après le signe de sa dérivée en Klasse 11.

La troisième difficulté concerne **les contrats** implicites. D'une part ces contrats implicites ne sont pas explicités clairement aux enseignants, par exemple les programmes officiels ne précisent pas clairement que le recours à la figure est toléré dans la géométrie de l'ordre ou quel niveau de rigueur est exigible dans une rédaction. Il s'en suit une grande hétérogénéité des conceptions chez les enseignants, relevée par différents auteurs [Houdebine et al 1998 p.69], [Antibi 1996, p.356]. En conséquence la perception du contrat par l'élève serait - elle aussi d'une grande variabilité. Faut-il expliciter ces contrats ? Est-ce possible ? Est-ce souhaitable ?

#### **5 Conclusion**

On pourrait essayer d'étendre ce concept en transposition multiple concernant la transposition de savoirs multiples dans une situation d'enseignement.



Ce phénomène de transposition multiple ne doit pas être confondu avec une autre problématique qui concerne ce que Chevallard [2001 a, 2001 b] appelle les mathématiques mixtes et les mathématiques codisciplinaires. Une distinction est à faire entre d'une part la cohabitation de savoirs différents issus d'institutions différentes dans un même sujet d'étude (ce qui rappelle parfois certaines situations interdisciplinaires), et d'autre part pour un même savoir (dans notre exemple la validation) la possibilité de le considérer du point de vue de deux institutions différentes dans lesquelles il peut être étudié (ce qui rappelle parfois certaines situations transdisciplinaires).

Nous parlerons de double transposition uniquement dans ce dernier cas si le même savoir du point de vue de deux institutions est transformé pour être enseigné dans une institution d'enseignement des mathématiques.

Ces dernières années on observe une multiplication des situations d'enseignement des mathématiques où le savoir mathématique côtoie, en situation d'enseignement, d'autres savoirs ou connaissances : la modélisation avec le savoir sur une situation du monde réel , l'enseignement des mathématiques dans une langue étrangère avec des savoirs linguistiques, l'enseignement des mathématiques dans un environnement de TIC avec un savoir instrumental ... La scénarisation didactique de ces situations relèvent-elles des mathématiques mixtes ou codisciplinaires, ou bien de la trouble transposition? On observe également le développement d'une approche de l'enseignement et de la formation par une entrée par des compétences transversales à des savoirs disciplinaires

distincts. Là encore la réflexion didactique doit permettre de distinguer ce qui relève de transpositions multiples, de mixités disciplinaires, de codisciplinarité et de juxtaposition de disciplines, en mesurant les enjeux, les risques et les chances.

#### 5 Bibliographie:

ANTIBI André (1997) Graphique, démonstration et rigueur, bulletin APMEP N°411, juillet 1997.

CABASSUT Richard (2005) *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne,* Thèse, Université Paris 7. téléchargeable sur <a href="http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/97/16/index.html">http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/97/16/index.html</a>

CHEVALLARD Yves (2001a) Les mathématiques et le monde : dépasser « l'horreur instrumentale ». Quadrature, n° 41 (janvier-février-mars 2001), p. 25-40.

(2001b) Les TPE comme problème didactique. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2001.Didirem. Paris 7.

HOUDEBINE Jean et al.(1998) La démonstration: écrire des mathématiques au collège et au lycée, Hachette éducation.

HOUDEMENT Catherine, KUZNIAK Alain (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, in *Educational Studies in Mathematics*, 40 : 283-312.

MINISTÈRE Français de l'Education (2001) L'enseignement des sciences qu lycée, in BOEN HS n°2 du 30/8/2001, Ministère de l'Education

(2002) Mathématiques accompagnement des programmes., Edition CNDP, CDROM. Téléchargeable le 28/1/06 sur : <a href="http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHPR01.htm">http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHPR01.htm</a>

MINISTERIUM für Kultus und Sport Baden-Würtemberg (1994/4) *Bildungsplan für das Gymnasium*, Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag, 4/1994.

(2001a) Bildungsplan für die Kursstufe des Gymnasiums, Lehrplanheft 3/2001, Neckar-Verlag,

(2001b) Bildungsplan für das Allgemein Bildende Gymnasium mit Achtjährigem Bildungsgang, Lehrplanheft 6/2001, Neckar-Verlag

PARZYSZ Bernard (2003) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, in *Carnets de route de la Copirelem, Concertum*, tome 2, éditeur ARPEME, Paris