Le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne : exemple d'un enseignement d'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.

Laetitia BUENO-RAVEL, *CREAD – IUFM de Bretagne*, France

laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr

In this article, we study the teacher's role in the didactic transposition. For that purpose, we first introduce a new analysis level in the internal transposition process and so distinguish three levels: knowledge to be taught–"re-organised" knowledge–taught knowledge. Then, we detail the theoretical and methodological approach we have built to study teachers' practices. It's an analysis by successive zooms on the mathematical and didactical organizations set by a teacher from the domain level to the subject one (Chevallard 2002b). We study the ecology of these organizations by identifying systems of conditions and constraints teachers are subject to when defining their teaching project. Eventually, we present the use of our approach in the context of an arithmetic course in French last year of secondary science teaching (grade 12 students).

En este artículo, estudiamos el papel del professor en la tranposición didáctica. Por eso, introducimos un nuevo piso de análisis en el proceso de tranposición didáctica interna, distinguiendo así tres pisos: el saber a enseñar – el saber preparado – el saber enseñado. Depués, desarrollamos el enfoque metodológico y teórico que construímos para estudiar las prácticas docentes. Es un análisis por zooms sucesivos de las organizaciónes matematicás y didácticas construyendo por el profesor, del nivel de un dominio de estudio hasta el nivel de un sujeto de estudio (Chevallard 2002b). Estudiamos la ecología de estas organizaciónes identificando el sistema de condiciónes y obligaciónes que pesan sobre las elecciónes de los profesores. Por fin, presentamos el empleo de nuestro enfoque para estudiar la enseñanza de la aritmética en la última clase científica de liceo en Francia (alumnos de 18 años).

I. La transposition didactique interne et l'écologie des OD.

La recherche que nous présentons ici est issue de notre travail de thèse (Ravel 2003). Elle se situe dans la lignée des travaux qui, en didactique des mathématiques, se placent dans le cadre de la TAD pour analyser les pratiques des enseignants. Cette communication se propose d'aborder la question du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique.

Le concept de transposition a été introduit dans la communauté didactique par Chevallard en 1980, lors d'un cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques, pour décrire et analyser le processus de transformation du savoir mathématique savant en savoir enseigné. Ce processus se décompose en « deux étages ». Dans un premier temps : le passage du savoir savant au savoir à enseigner soit la « partie visible » de ce processus, sous la

responsabilité de la noosphère (Chevallard 1991). Dans un second temps : le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Ainsi, à la suite de la « partie visible » de la transposition commence un autre travail, plus masqué, de transformation du savoir qui se situe au sein du système d'enseignement stricto sensu : la transposition didactique interne ou le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné.

Différents acteurs prennent part à ce travail interne de transformation du savoir dont notamment les auteurs de manuels ou de ressources, au sens de Gueudet et Touche (à paraître) à destination des enseignants, les formateurs et les enseignants eux-mêmes. Nous avons choisi de nous centrer sur la place des enseignants dans cette transposition didactique interne car ce sont eux qui ont en charge l'enseignement effectif du savoir désigné comme étant à enseigner.

Nous avons repris le terme « d'apprêt didactique » à Chevallard (1991) pour étudier le rôle central de l'enseignant dans ce processus de transposition. Nous avons alors proposé d'intégrer au modèle existant un niveau d'analyse supplémentaire : le savoir « apprêté ». Il s'agit de modéliser ainsi la mise en forme, mathématique et didactique, par différents acteurs du système éducatif (enseignants, auteurs de manuels, formateurs, chercheurs etc.), du savoir désigné comme étant à enseigner en vue d'un enseignement effectif en classe. Le processus de transposition didactique interne se décompose donc en deux étapes comme le montre la figure ci-dessous :

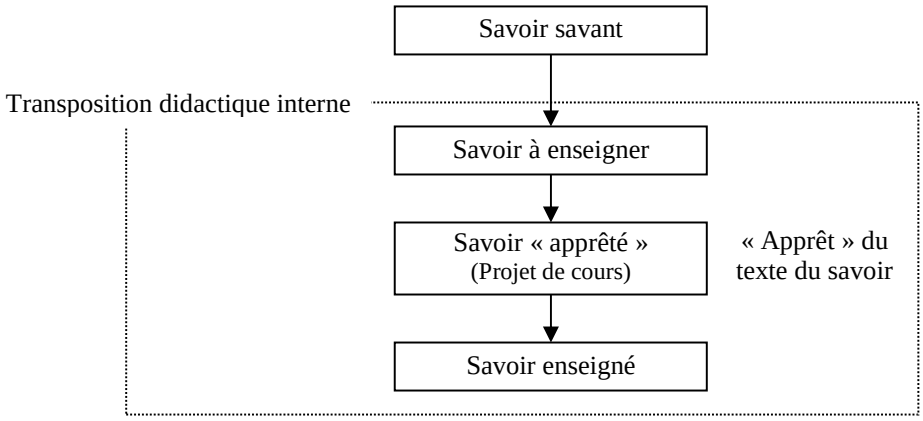


Figure 1 : Les deux étages de la transposition didactique interne.

Introduire cette nouvelle étape dans le processus transpositif permet de situer explicitement l'analyse des manuels ou de ressources à destination des enseignants dans une étude didactique de type institutionnel. Pour ces manuels ou ressources, le processus de transposition interne s'arrête au niveau du savoir apprêté. D'autre part, cela permet de clairement distinguer ce qui relève du projet de cours de l'enseignant de ce qui est enseigné. En effet, le savoir apprêté se situe à l'interface de deux « mondes » : emblématique de l'activité de l'enseignant en amont des pratiques en classe, il est également le moteur de son activité en classe. Notons qu'il existe a priori autant d'apprêts possibles du savoir à enseigner que d'enseignants (apprêtage : action de l'enseignant qui apprête le savoir à enseigner et apprêt : résultat de cette action).

Analyser le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne conduit dans un premier temps à essayer identifier quel système de contraintes et de conditions pèse sur les choix mathématiques et didactiques de ce dernier et donc sur l'apprêt qu'il d'un objet de savoir. Dans un second temps, il s'agit d'analyser les différences qui apparaissent entre le savoir apprêté et le savoir enseigné en mettant en évidence les contraintes internes relevant des régulations de la relation didactique qui se noue au sein de la classe.

Nous situons cette étude dans le cadre de la TAD. Nous modélisons les différents acteurs intervenant dans le processus de transposition didactique interne comme sujets de plusieurs institutions (Chevallard 1989). Ce point de vue amène à définir le rapport institutionnel à un objet de savoir comme renvoyant à un ensemble de pratiques sur cet objet au sein de l'institution considérée ; ces pratiques pouvant être analysées selon une organisation praxéologique. Ainsi, se poser la question de la transposition d'un objet de savoir revient à questionner la nature de cet objet transposé. Cette question renvoie « au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique » (Bosch & Chevallard 1999). On est alors amené à s'interroger sur l'écologie de ces organisations praxéologiques. Pour étudier l'écologie d'un objet mathématique dans le processus de transposition didactique interne, il convient de distinguer « deux grandes classes de conditions » (Artaud 1997) et de contraintes qui vont déterminer la « nature » et la « vie » de cet objet : l'organisation mathématique construite par l'enseignant pour l'étude de cet objet et l'organisation didactique utilisée par l'enseignant pour mettre en place cette organisation mathématique.

Comme le souligne Chevallard (2002a), le problème de l'enseignant est d' « accomplir » le type de tâche T_π « Mettre en place une certaine OM dans une classe donnée. », sachant que cette tâche se déploie en une vaste pluralité de type de tâche $T_\pi^{(k)}$. Vouloir analyser le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne soulève alors la question de l'écologie du didactique dans le système d'enseignement français actuel. Pour ce faire, il faut pouvoir décrire les OD mises en oeuvre par un enseignant. Cela nous a conduit à reprendre à notre compte les questions suivantes posées par Bosch et Gascón (2002) à propos des OD : Comment décrire les composants et la structure « fine » des OD ? Comment décrire la « dynamique » des OD ?

Dans cet article, nous allons présenter en partie 2 l'approche méthodologique que nous avons construite pour étudier de rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne dans le cas de l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. Nous la mettons ensuite en œuvre dans les parties 3 et 4 pour analyser l'enseignement d'arithmétique d'une enseignante que nous avons observée sur une année scolaire.

II. Méthodologie construite pour analyser le rôle de l'enseignant dans le processus de transposition didactique interne.

Notre étude a porté sur l'enseignement de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques. Ce contenu est réapparu dans les programmes en 1998 après une vingtaine d'années d'absence et a subi des réajustements en 2002, après quatre ans d'enseignement. Ce phénomène didactique a fourni une occasion unique pour analyser le processus de transposition interne.

La première étape, classique, de notre méthodologie est de faire une analyse institutionnelle des programmes et de manuels. Ceci permet d'identifier un système de conditions et contraintes de niveaux de détermination didactique (Chevallard 2002b) supérieur à ceux sur lesquels interviennent directement les enseignants (niveaux allant du secteur au sujet d'étude) mais qui peuvent influer sur leurs choix didactiques et mathématiques. Wozniak (2007) parle dans ce cas de système de conditions et de contraintes « exogène » à la classe. Dans un second temps, nous procédons par zooms successifs sur l'activité du professeur en prenant appui sur la dynamique des OM, à partir du découpage mathématique du programme d'arithmétique de spécialité mathématiques de 1998 en secteurs, thèmes et sujets d'étude. Cela veut dire que nous analysons les OM construites par l'enseignant ainsi que les praxéologies didactiques mises en œuvre à différents niveaux : au niveau du domaine, du secteur, du thème et du sujet d'étude.

Comme nous l'avons souligné précédemment, nous avons été confrontée à la difficulté de description des OD et de leur dynamique, quel que soit le niveau d'étude où l'on se place. Pour chaque niveau d'étude, nous choisissons d'approcher les OD par l'analyse des choix mathématiques et didactiques faits par les enseignants, en essayant autant que faire ce peut d'identifier quand quel système de conditions et de contraintes se sont faits ces choix.

Chevallard (2002a) propose, en première approximation, d'analyser une OD relative à un thème d'étude en interrogeant la manière dont elle réalise les différents moments de l'étude. Il nous a semblé délicat d'élargir cette notion de moments pour approcher les praxéologies didactiques du niveau du domaine ou du secteur d'étude.

Toujours selon Chevallard (2002a), une OD doit également être interrogée sur le topos qu'elle offre aux élèves. Au niveau du domaine d'étude, nous avons donc introduit la notion de mode de fonctionnement didactique pour décrire la « façon routinière » des enseignants de mener l'étude, indépendamment (du moins en partie) du contenu mathématique enseigné. Au niveau du secteur et du thème d'étude, nous proposons d'analyser les écarts pouvant exister entre les types de tâches mathématiques vus en cours et ceux évalués en devoir. Nous nous intéressons également à la chronogénèse, en prenant notamment en compte les choix des enseignants pour organiser sur l'année scolaire leur enseignement de l'arithmétique.

L'analyse des niveaux du domaine et du secteur d'étude se fait en prenant appui sur le savoir apprêté par un enseignant. Celle des niveaux du thème et du sujet d'étude est menée à partir de transcriptions de séances de classe.

Etudier le savoir apprêté par un enseignant nécessite de pouvoir décrire le projet de cours de ce dernier. Pour ce faire, nous avons suivi –sans intervenir– l'intégralité des séances d'arithmétique d'un professeur en les enregistrant et en recueillant l'ensemble des documents enseignant et élèves. Nous avons également collecté les copies de devoirs d'arithmétique annotées par le professeur. L'ensemble de ces données est complété par un entretien avec l'enseignant observé en fin d'année scolaire. Le croisement des informations recueillies permet de reconstruire le projet de cours de l'enseignant. Nous avons de plus construit un questionnaire à destination des enseignants (43 réponses) pour connaître leurs choix mathématiques au niveau du domaine d'étude par rapport au contenu du programme.

III. Le rôle de l'enseignant dans le processus de transposition didactique interne : analyse institutionnelle des OM apprêtées par les enseignants.

Nous allons tout d'abord présenter l'arithmétique à enseigner du programme de 1998 et analyser comment les enseignants se positionnent par rapport à celui-ci.

a) L'arithmétique à enseigner en Terminale S spécialité mathématique en 1998.

Par une analyse écologique comparative des programmes de terminale scientifique depuis 1886, nous avons mis en évidence les choix de transposition faits par la noosphère lors de la réintroduction de l'arithmétique en 1998. Trois fonctions sont assignées à l'arithmétique dans ces nouveaux programmes : 1) mettre en avant l'aspect algorithmique des mathématiques par le biais des principaux algorithmes d'arithmétique, 2) permettre un travail sur le raisonnement et 3) sensibiliser à l'histoire des mathématiques.

La mise en avant des algorithmes est frappante dans la description des travaux pratiques du programme et dans les commentaires qui les accompagnent. Il est par exemple question de la mise en oeuvre de l'algorithme d'essai de division par des nombres premiers successifs pour reconnaître si un entier donné est premier, algorithme qui comporte une condition d'arrêt à indiquer. Deux possibilités peuvent permettre aux enseignants de faire vivre cette niche algorithmique dans leurs classes : proposer, chaque fois que cela est possible, des démonstrations constructives des théorèmes du cours et intégrer l'outil informatique (essentiellement calculatrice programmable et tableur) dans leur enseignement d'arithmétique.

Le choix de transposition qui a été fait est novateur. Notre étude a permis d'identifier trois contraintes qui peuvent peser sur les choix didactiques et mathématiques des enseignants. Tout d'abord, cette réintroduction de l'arithmétique sous un angle arithmétique se trouve confrontée à une culture mathématique fortement ancrée chez les enseignants de lycée qui leur fait distinguer mathématiques « rigoureuses » et mathématiques « algorithmiques » avec une péjoration de ces dernières. Par ailleurs, cette introduction se heurte à des conditions « matérielles » existant dans l'institution scolaire : question de la formation des enseignants à l'utilisation des calculatrices programmables et du tableur et problème de l'équipement des établissements scolaires en matériel informatique. Cependant, sur ce dernier point, il faut

noter que les choses évoluent rapidement et que les établissements sont en 2007 beaucoup mieux équipés en matériels informatiques (salles informatiques, postes dans les salles, vidéo projecteurs, ordinateurs portables) qu'au moment des observations menées dans le cadre de cette recherche (années scolaires 2000/2001 à 2002/2003). Enfin, malgré quelques descriptions de travaux pratiques dans le programme, le manque de référence à des types de tâches mathématiques mettant en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique se révèle problématique pour mettre en oeuvre un tel contenu à enseigner.

Par souci de brièveté, nous ne développerons pas ici l'analyse institutionnelle comparative des manuels de 1978 à 2002. Cette analyse, détaillée dans Ravel (2002), a montré que si l'arithmétique avait été réintroduite dans les programmes avec une volonté affichée de promouvoir son aspect algorithmique les manuels profitaient du cours d'arithmétique pour travailler sur le raisonnement.

b) Espace de liberté des enseignants : quelle(s) conséquence(s) sur la vie des savoirs ?

Le questionnaire aux enseignants a été construit avec pour objectifs de connaître les choix mathématiques des enseignants au niveau de leur enseignement d'arithmétique dans son ensemble :

- avaient-ils choisi de donner aux élèves des démonstrations constructives du théorème de la division euclidienne, du théorème de Bézout, du théorème de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers ?
- avaient-ils introduit le PGCD avant ou après le cours sur les nombres premiers et indiquer une méthode particulière de calcul du PGCD (algorithme d'Euclide ou décomposition en produit de facteurs premiers) ?
- Quelle place avaient-ils fait à l'outil informatique dans leur cours d'arithmétique ?

L'analyse a posteriori des 43 questionnaires complétés a montré que la niche algorithmique de l'arithmétique vit, dans une large majorité des classes, par le biais des démonstrations constructives. Par exemple, 65% des enseignants ayant répondu ont retenu la démonstration du théorème de Bézout se basant sur l'algorithme d'Euclide contre 35% qui ont préféré la faire en s'appuyant sur l'ensemble $E=\{am+bn/(m,n)\in Z^2\}$ et la division euclidienne. Par ailleurs, les enseignants ont demandé aux élèves de programmer sur leur calculatrice un nombre important d'algorithmes. Sur 42 enseignants, 65 % ont demandé aux élèves d'avoir sur leur calculatrice plusieurs algorithmes (3 en moyenne dont les plus fréquents : la recherche du PGCD (20fois), le test de primalité (13 fois) et la décomposition en produit de facteurs premiers (12 fois)) contre 35% qui n'ont pas demandé de programmation à leurs élèves.

Ces résultats sont toutefois à nuancer par les commentaires libres faits par les enseignants quand il leur était demandé s'ils considéraient l'exercice suivant comme un exercice d'arithmétique et s'il était envisageable pour eux de le poser dans leur classe :

« Le mathématicien Lagrange conjecture la propriété suivante : tout nombre impair $n \geq 5$ peut s'écrire sous la forme $n=2p+q$, avec p et q premiers. [...] Ecrire un programme informatique permettant pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que $n=2p+q$. (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée). »

Les enseignants ont explicitement indiqué qu'ils utilisaient l'arithmétique comme lieu « privilégié » pour apprendre à raisonner et que cette maîtrise du raisonnement leur paraissait intéressante pour la formation scientifique des élèves. Ces commentaires montrent que la vie de la niche raisonnement semble assurée dans l'arithmétique apprêtée par les enseignants. Ils mettent également en évidence un nouveau système de conditions et de contraintes pouvant peser sur les choix mathématiques et didactiques des enseignants : le poids de la préparation au baccalauréat (les exercices des annales analysés ne font pas vivre la niche algorithmique mais la niche raisonnement) et la spécificité du public des élèves de terminale S spécialité mathématiques qui se destinent majoritairement vers des études scientifiques supérieures (classes préparatoires ou universités), lieu emblématique des mathématiques « rigoureuses » pour les enseignants.

Nous pouvons constater que les enseignants ont investi l'espace de liberté dont ils disposent par rapport aux instructions officielles. Leurs choix mathématiques ont transformé l'arithmétique à enseigner, mettant en avant la niche arithmétique. Le système de conditions et de contraintes identifié par notre analyse et pesant sur ces choix se situe à des niveaux de détermination supérieurs à celui du domaine d'étude « arithmétique ». Nous allons à présent approfondir la question du rôle de l'enseignant dans le processus transpositif en nous centrant sur l'étude du cours d'arithmétique d'une enseignante, P1.

IV. Le rôle de l'enseignant dans le processus de transposition didactique interne : analyse des OM et des OD mises oeuvre par P1.

Comme le soulignent Bosch et al. (2003), il est important de disposer d'une OM de référence pour interpréter les OM apprêtées et enseignées. Dans le cas de notre travail, nous avons décrit et analyser deux OM « apprêtées » de référence, l'une emblématique de l'esprit du programme de 1971 reconstruite à partir du manuel Queyzanne et Revuz de 1971 et l'autre à partir d'un cours d'arithmétique d'une brochure de l'IREM de Poitiers (Bonneval et al. 2000). Ce cours a été élaboré avec le parti pris de mettre en avant autant que possible la niche algorithmique de l'arithmétique. Pour les choix didactiques de l'enseignant, nous ne disposions pas d'OD de référence auquel nous aurions pu comparer les OD mises en place par un professeur. Il nous était en effet difficile de reconstruire une OD de référence à tous les niveaux de détermination en s'appuyant sur le cours écrit de la brochure de l'IREM de Poitiers. Nous avons donc fait le choix d'observer deux enseignantes (P1 et P2), avec deux profils différents, afin de pouvoir identifier des régularités ou des variabilités entre leurs deux pratiques. Leurs choix mathématiques et didactiques sont, chaque fois que cela est possible, analysés en étant mis en parallèle avec ceux faits dans la brochure de l'IREM de Poitiers.

Les deux enseignantes observées en 2000/20001 sont expérimentées et enseignent l'arithmétique en spécialité mathématiques depuis sa réintroduction dans les programmes en 1998. P1 a été choisie après avoir complété le questionnaire. Elle faisait partie des rares enseignants ayant intégré l'outil informatique dans leur cours d'arithmétique. Elle disait avoir fourni aux élèves les programmes qu'elle souhaitait qu'ils aient sur leur calculatrice en leur donnant des explications sur « les structures logiques If... Then... Else et Boucle. ». P2 n'avait pas accepté de remplir le questionnaire. Nous avons assisté à 13 séances d'arithmétique de 2h (dont 2 séances et demi de devoirs surveillés) dans la classe de P1 et 11 séances (dont 1 séance et demi de devoirs surveillés) dans celle de P2. Dans cet article, nous détaillerons uniquement les analyses relatives à P1.

a) Mode de fonctionnement didactique : quel topos offert à l'élève ?

P1 consacre la moitié de ses séances à des séances de cours et l'autre moitié à des séances d'exercices ou de devoirs surveillés, comme le montre le tableau ci-dessous :

Cours	Exercices	T.P.	Programmation	D.S.	Total
6 séances	2,5 séances et demie	1 séance	1séance	2 séances et demie	13 séances (26h)

Tableau 1 : Répartition des séances d'arithmétique de P1 classées par type.

Les séances de cours commencent par un cours magistral de P1 au tableau de 45 minutes au maximum et se poursuivent par un travail des élèves en autonomie sur fiches d'exercices, P1 passant dans les rangs. Les séances d'exercices s'appuient intégralement sur le même type de travail en autonomie des élèves, P1 faisant que très rarement passer un élève au tableau (pendant la séance de T.P.) pour corriger un exercice. Les corrigés sont distribués sous forme de fiches d'une séance à l'autre. Ils peuvent présenter différentes résolutions possibles pour un même exercice. Le mode de fonctionnement mis en place pour la séance de programmation ressemble, comme nous le verrons par la suite, à celui d'une séance de cours.

Le mode de fonctionnement de P1 se caractérise par une dichotomie très marquée du point de vue de la topogénèse. Les élèves et l'enseignante occupent à tour de rôle l'ensemble de l'espace par rapport au savoir. Leurs places sont clairement définies : c'est tout d'abord à P1 que revient la responsabilité de gérer le cours avant de donner individuellement à l'élève la responsabilité de l'avancée du travail, en l'organisant par un système de fiches d'exercices et de fiches corrigées. Ces fiches corrigées proposent régulièrement plusieurs résolutions possibles pour un même exercice et peuvent donner des indices supplémentaires pour les exercices optionnels plus difficiles. P1 crée ainsi une mémoire collective de la classe sur les seuls objets du cours. Ce mode de fonctionnement permet à P1 de différencier son enseignement en fonction du niveau des élèves. L'OM que tous les élèves doivent avoir rencontrée et travaillée correspondants à la première partie de la fiche et les prolongements sont disponibles en fin de fiche. Dans l'entretien que nous avons eu avec elle, P1 souligne que ce choix lui permet « à la fois d'être plus disponible pour les élèves les plus faibles de la

classe en se disant que les plus rapides, ils avancent presque tous seuls et qu'on n'a pas à aller les voir. ». Cette technique didactique est une réponse de P1 à la tâche « gestion de l'hétérogénéité ». Elle lui donne également les moyens de faire face à la contrainte forte qui pèse sur tout enseignant de spécialité : préparer les élèves au post-bac et ce, tant au niveau du contenu mathématique par les prolongements qu'elle propose dans les fiches d'exercices qu'au niveau des méthodes de travail en développement l'autonomie des élèves.

Dans le cas du mode de fonctionnement didactique de P1, la topogénèse semble organiser la chronogénèse. En effet, les choix didactiques de P1 structurent l'avancée du temps didactique : il s'agit d'organiser chaque séance de 2h avec un minimum de cours pour pouvoir garder un maximum de temps pour les exercices en autonomie sur fiche. Dans cette organisation, les exercices sont le moteur de l'activité de la classe ; nous parlons alors d'une organisation centrée sur la praxis.

Pour revenir à la question du rôle de l'enseignant dans la transposition interne de l'arithmétique, le mode de fonctionnement didactique de P1 ne s'oppose pas, a priori, à la vie de la niche algorithmique dans le savoir apprêté et enseigné par P1. En effet, au niveau de la partie cours sous la responsabilité de P1, cette dernière peut faire le choix de donner des démonstrations constructives des théorèmes de la division euclidienne, de Bézout et de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers. Par ailleurs, au moment du travail sur fiche, elle peut également proposer une variété d'exercices mettant en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique, notamment en proposant des exercices de type programmation sur calculatrice ou des exercices à faire avec un tableur.

Dans la suite de cet article, nous allons présenter brièvement les choix mathématiques faits par P1 au niveau de l'arithmétique apprêtée en les comparant à ceux fait dans le cours de la brochure de l'IREM de Poitiers. Nous allons également analyser l'arithmétique enseignée par P1 en nous centrons sur l'analyse de la séance de programmation.

b) *Choix mathématique au niveau du domaine d'étude : analyse écologique du savoir apprêté par P1.*

Comme nous l'avons souligné précédemment, nous considérons le cours de la brochure de l'IREM de Poitiers comme un cours référence pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique en classe. Dans ce cours en effet, le théorème de la division euclidienne, la définition du PGCD et le théorème de Bézout sont introduits en prenant appui sur des activités à faire avec un tableur. Ce choix mathématique est rendu possible par des décisions en amont concernant les conditions et les méthodes de travail des élèves. A la tâche didactique « organisation des structures des séquences » (niveau du domaine et du secteur d'étude), les auteurs de ce cours ont une technique didactique qui consiste à organiser les séquences en trois temps : « activités, synthèse et éléments de cours, exercices ».Une autre technique consiste à faire travailler les élèves « par petits groupes pour favoriser les échanges sur les méthodes, les conjectures. » (Bonneval & al. 2000). Trois médias (Chevallard 2005) sont à disposition des élèves : le tableur Excel, le logiciel de calcul formel Derive et leur

calculatrice programmable. Ces techniques didactiques associées aux trois médias proposés aux élèves rendent a priori possible la vie de la niche algorithmique de l'arithmétique dans ce cours. Par ailleurs, la démonstration de l'existence de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers est faite par la méthode dite de « descente ».

P1 quant à elle bâtit l'ensemble de son cours d'arithmétique à partir d'une axiomatique sur les propriétés des parties de **N**. Cela lui permet de revenir sur le principe de récurrence car selon elle « c'est un des grands modes de raisonnement en arithmétique [qui] n'est pas acquis en fin de première S. ». Elle démontre le théorème de la division euclidienne dans **Z** en s'appuyant sur l'ensemble $E=\{n \in \mathbf{N}, nb>a\}$ pour la démonstration de l'existence du quotient et du reste et sur une démonstration par l'absurde pour la démonstration de l'unicité de ce couple. Elle définit le PGCD de deux entiers relatifs a et b non nuls comme le plus grand élément de $D_1 \cap D_2$ où D_1={diviseurs de a appartenant à **N**} et D_2={diviseurs de b appartenant à **N**}. P1 choisit également de prouver le théorème de Bézout par la démonstration utilisant la division euclidienne utilisant de façon sous-jacente, la notion d'idéal avec l'ensemble $E=\{am+bn, m \in \mathbf{Z} \text{ et } n \in \mathbf{Z}\}$. Elle utilise ainsi explicitement la propriété « toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément », de même qu'un raisonnement par l'absurde. Elle ne démontre pas le théorème d'existence d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers.

Sa décision de construire son cours sur une axiomatique des propriétés des parties de **N**, liée à l'idée qu'elle se fait de la formation mathématique qu'elle doit apporter à ces élèves, guide ses choix de démonstration des principaux théorèmes au programme. Ceux-ci ne favorisent pas la vie de la niche algorithmique. Notons également que le mode de fonctionnement didactique de P1 exclut a priori toute activité d'introduction des principaux objets de savoir. Ceci rend difficilement envisageable l'utilisation du média tableur dans son cours d'arithmétique tel qu'il a pu être introduit dans le cours présenté dans la brochure de l'IREM de Poitiers.

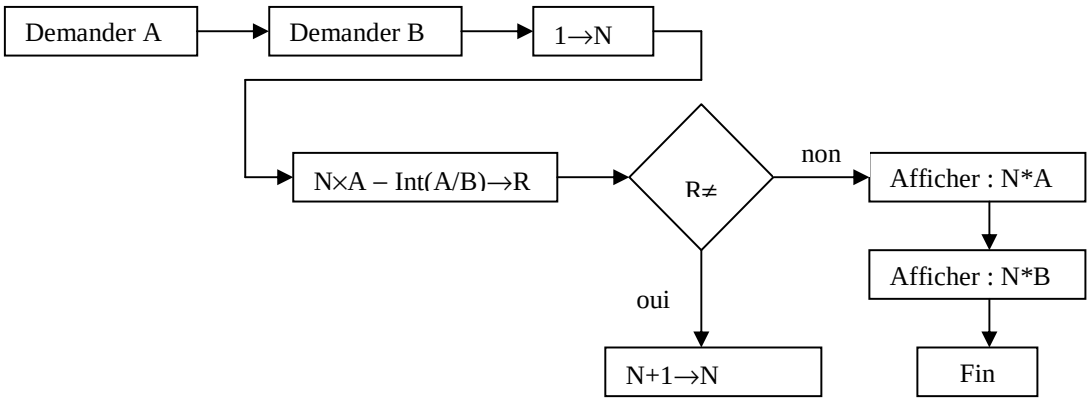
c) *Analyse de la séance de programmation de P1 : quel(s) écart(s) entre le savoir apprêté et le savoir enseigné ?*

P1 consacre sa cinquième séance d'arithmétique à l'écriture de deux programmes pour calculatrices : « Comment déterminer si un nombre N est premier ou non ? » et « Décomposer un nombre en facteurs premiers ». Nous allons dans un premier temps analyser comment ce contenu est traité dans la brochure de l'IREM de Poitiers.

Test de primalité et décomposition en produit de facteurs premiers dans la brochure de l'IREM de Poitiers.

Dans cette brochure, le cours d'arithmétique commence par 9 séquences de 2 heures sur « l'unité » divisibilité. Vient ensuite une coupure d'environ 6 semaines consacrée à l'étude des isométries. Ensuite, 4 séquences de 2 heures sont dédiées à « l'unité » sur les nombres premiers. Dans « l'unité » divisibilité, une place particulière est donnée à la programmation des calculatrices. Les auteurs ont choisi pour cela de donner aux élèves des exercices du type :

« Que fait l'algorithme suivant :



Ecrire le programme correspondant dans votre calculatrice et le tester (on pourra aussi réfléchir au cas où A est négatif). »

Ce choix permet de faire travailler les élèves sur la notion d'algorithme sans leur donner le programme « clé en main » à entrer dans leur calculatrice. Il montre que dans une démarche de programmation, il faut dans un premier temps concevoir soigneusement l'algorithme que l'on souhaite programmer (notamment : conditions initiales, itération et critère d'arrêt) puis écrire cet algorithme dans un langage de programmation.

Les auteurs ne poursuivent pas cette démarche dans le cas des deux programmes sur les nombres premiers (primalité et décomposition). Pour le test de primalité, ils choisissent de demander aux élèves de rechercher l'algorithme à la maison car celui-ci est plus complexe que ceux vus précédemment. Ils envisagent même que le professeur fournisse un programme aux élèves. Par ailleurs, ils réservent le programme de décomposition en facteurs premiers d'un nombre aux « fans de programmation. ». Ils expliquent ce choix de rendre facultatif ce programme par le fait que « le problème essentiel de ce programme réside dans le fait que l'on doit connaître la liste des nombres premiers pour faire une décomposition ou alors tester la primalité de chaque diviseur. Il y a donc de nombreux tests à réaliser qui compliquent l'écriture du programme. ». Comme nous pouvons le constater, les auteurs de ce cours privilégient ici la méthode algorithmique de décomposition en facteurs premiers d'un nombre à la main. Les choix des algorithmes qu'ils font programmer aux élèves montrent que celui-ci n'est pas pour eux le plus pertinent pour travailler sur la notion d'algorithme par le biais de la programmation avec les élèves.

Test de primalité et décomposition en produit de facteurs premiers dans le cours de P1.

Dans l'entretien que nous avons eu avec P1, celle-ci définit explicitement ses objectifs par rapport à l'usage de la calculatrice dans sa classe :

« La calculatrice, ça permet une plus grande richesse au niveau des exercices mais pour moi par exemple, ça ne dispense pas de justement bien comprendre ce qu'est un algorithme, bon par exemple en faisant le théorème de Bézout à la main. C'est un peu des approches complémentaires et je crois que pour les élèves ce qui m'intéressent le plus, c'est à la fois un peu d'initiation à la programmation mais très élémentaire, c'est-à-dire les structures de

boucle ou les tests conditionnels et puis surtout qu'ils apprennent à être cohérents dans les démonstrations et à s'autocontrôler. »

Au niveau du savoir apprêté, la séance de programmation est ainsi pour objectifs des concepts de programmation qui permettent de travailler sur les conditions initiales, l'itération et le critère d'arrêt d'un algorithme. Cependant, l'analyse de cette séance semble montrer que ces objectifs ne sont pas atteints.

Tout d'abord, au niveau du savoir enseigné, P1 conserve dans cette séance de programmation le même mode de fonctionnement didactique que dans une séance de cours. Elle montre et explique au tableau les programmes que les élèves vont avoir à rentrer dans leur calculatrice en utilisant comme support des transparents manuscrits contenant : 1) une explication du programme comportant parfois quelques exemples numériques, 2) le programme écrit en deux langages de programmation (Casio et Texas) et 3) un exemple sur lequel tester le programme (Voir Annexe). Les élèves doivent donc écouter P1 et entrer ensuite sur leur calculatrice le programme déjà écrit dans un langage de programmation. Dans la seconde partie de la séance, les élèves travaillent sur une fiche d'exercices sur les nombres premiers. P1 passe dans les rangs pour répondre aux questions et pour aider les élèves qui auraient décidé de rentrer les programmes dans leur calculatrice. P1 ne propose donc pas de tâche qui pourrait faire travailler les élèves sur les algorithmes (notamment lors du passage de la conception de l'algorithme à son écriture dans un langage de programmation).

Par ailleurs, comme les élèves ne disposent pas tous de la même calculatrice, le discours de P1 est parasité par des références incessantes au langage de programmation de telles ou telles marques de calculatrices (TI80, 81, 92, 89, les Texas, les vieilles Casio, les Casio noires, les Casio, les Casio plus perfectionnées, les HP 40). Voulant expliquer à l'ensemble des élèves quel programme entrer dans sa calculatrice individuelle, son cours d'introduction sur les concepts de base de programmation se transforme en liste des instructions disponibles dans telles ou telles calculatrices, équivalentes à telle instruction dans un autre type de machine. Ceci est d'autant plus marqué que l'un des programmes qu'elle a choisis de donner, la décomposition en facteurs premiers, est un de ceux non proposé dans la brochure de l'IREM de Poitiers car estimé trop complexe à programmer. Le mode de fonctionnement didactique de P1 associé au choix de proposer des algorithmes déjà écrits dans un langage de programmation ne semble pas permettre d'atteindre les objectifs définis au niveau du savoir apprêté lorsqu'il existe une grande variété de calculatrices dans la classe. L'hétérogénéité du niveau des élèves en programmation est également une contrainte rendant difficile la conduite d'une telle séance organisée selon cette structure didactique binaire.

Notons pour finir que P1 mène cette séance en essayant d'intéresser les élèves aux notions de programmation malgré deux contradictions qu'elle évoque explicitement : savoir programmer est « un objectif trop difficile pour la classe de terminale » et cette compétence « ne fera pas partie des évaluations. ». Elle justifie le fait de proposer malgré tout une telle séance en expliquant que pour elle, cela fait partie de la « culture générale » que les élèves doivent avoir en sortant de terminale.

V. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré que le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné pouvait modifier considérablement les objets de savoir inscrits dans le programme. Ainsi, malgré la volonté de promouvoir l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans les curriculums, celle-ci n'a pas été relayée par les manuels et les enseignants. L'arithmétique est alors devenue le lieu idéal pour l'enseignement du raisonnement. Quatre facteurs principaux peuvent expliquer ce phénomène : 1) favoriser l'aspect algorithmique est en rupture avec les représentations dominantes de ce qu'est l'activité mathématique, 2) des contraintes d'ordre matériel freinent l'utilisation de l'outil informatique dans les classes, 3) il y a un manque flagrant de références et d'habitudes pour la mise en place d'un enseignement « algorithmique » de l'arithmétique et enfin, 4) la majorité des élèves de spécialité mathématiques se dirigeant vers des cursus scientifiques post-bac (notamment les classes préparatoires aux grandes écoles), les enseignants souhaitent les faire travailler d'avantage sur le raisonnement que sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique.

Cette étude de la transposition didactique interne nous a conduit à analyser le rôle de l'enseignant dans le processus de transposition didactique interne. Pour cela, nous avons été amenée à nous interroger sur la question de la description des OM et des OD construites par un enseignant. Nous avons construit une méthodologie d'analyse spécifique pour prendre en compte un temps long d'enseignement (plus d'une dizaine de séances) et approcher les OD construites par les professeurs à tous les niveaux d'étude considérés.

Un des résultats que nous pouvons tirer de nos analyses est l'importance du poids des niveaux de déterminations peu spécifiques sur les transformations, mêmes locales, d'un savoir. Dans le cas de P1, son mode de fonctionnement didactique permet en grande partie d'expliquer pourquoi les objectifs qu'elle s'est fixés par rapport aux concepts de base de programmation n'ont pas pu être atteints.

Il nous semble par ailleurs que la méthodologie que nous avons proposée est pertinente pour analyser non seulement le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne mais aussi des temps d'enseignement longs. Le principe de zooms successifs sur les pratiques du professeur en se plaçant successivement sur le savoir apprêté puis sur le savoir enseigné et celui d'approcher les OD par l'analyse des choix des professeurs a été utilisé dans le cadre d'une recherche[1] sur l'analyse des genèses instrumentales des enseignants utilisant une base d'exercices en ligne. Il reste cependant beaucoup de travail à faire pour progresser dans la description des OD mises en place par un professeur. Une perspective que nous essayons de travailler actuellement est de nous appuyer sur les outils théoriques développés par Sensevy (2002).

Bibliographie

[1] Voir pour cela l'article de Bueno-Ravel et Gueudet , « Genèse instrumentale pour l'enseignant : Tâches et techniques didactiques instrumentées par une base d'exercices en ligne. » proposé dans ce colloque.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul, M. & al. (eds.), *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 1101-139, Houlgate.

Bonneval, L.M. & al. (2000). *Enseigner l'arithmétique*, IREM de Poitiers (ed.).

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19.1, 77-123, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch, M., Gascón, J. (2001). Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In Dorier, J.-L., & al, (eds), *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 21-30, La Pensée Sauvage, Corps.

Bosch, M. & al. (2003). El professor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23.1, 79-135, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique année 1988-1989*, 211-236, LSD-IMAG, Grenoble.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La pensée Sauvage éd. 2nde édition.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In Dorier, J.-L., & al, (eds), *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 3-20, La Pensée Sauvage, Corps.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulations. In Dorier, J.-L., & al, (eds), *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 41-56, La Pensée Sauvage, Corps.

Chevallard Y. (2005) Steps towards a new epistemology in mathematics education, *Actes du colloque CERME 4*, San Feliu de Guixols, Espagne.

Gueudet, G. & Trouche, L. (à paraître). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? in Bloch I. et Conne F. (eds.), *Actes de la XIVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage Editions.

Ravel, L. (2002). Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères – IREM*, n°49, 93-116, Topiques éditions.

Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. L'exemple de l'arithmétique en Terminale S Spécialité Mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00162790

Sensevy, G. (2002). Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur :un essai de mise à l'épreuve, In Venturi, P. & alii. (eds), *Etudes des pratiques effectives : l'approche des didactiques*, 3-36, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Wozniak, F. (2007). Conditions and constraints in the teaching of statistics: th escale of levels of determination, à paraître dans les *actes du colloque CERME 5*, Larnaca, Chypre.

Comment reconnaître que B divise A ?

Critère $\frac{A}{B}$ est un entier

Touche $\boxed{\text{FPart}}$ sur TI dans MATH NUM

FPart (52/5) = 0,4 car $\frac{52}{5} = \underbrace{10}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{0,4}_{\text{FPart}}$

Touche sur CASIO Frac (52 ÷ 5) = 0,4

$\frac{A}{B}$ est un entier équivaut à FPart (A/B) = 0 ou Frac

---

Comment déterminer si un nombre N est premier ou non ?

On va tester la division par 2 puis par tous les entiers impairs 3 = 2+1 ; 5 = 3+2 ; 7 = 5+2 ; 9 = 7+2 etc ... car il est inutile de retester les multiples de 2 et la machine fait rapidement les divisions alors qu'il est long de tester parmi les nombres impairs ceux qui sont premiers. Il suffit de tester les entiers $D \leq \sqrt{N}$ ou tels que $D^2 \leq N$

Sur CASIO

```
" N ␣ PREMIER " : ? → N
2 → D : 1 → C
Lbl 1
If D² ≤ N
Then If Frac (N/D) = Ø
Then " DIVISEUR " : D ▲
Else D+C → D : 2 → C
Goto 1
If End
Else " PREMIER " ▶
End.
```

Sur Texas

```
PROGRAM : PREMIER
Disp " N ␣ PREMIER? "
INPUT N
2 → D
1 → C
Lbl 1
If D² ≤ N
Then
If FPart (N/D) = Ø
Then
Disp " DIVISEUR ", D
Else
D+C → D
2 → C
Goto 1
End
Else
Disp " PREMIER "
End.
```

Pour tester le programme :
703 est divisible par 19 ; 853 est premier.

- 359 -