MODÉLISATION ET MISE EN PLACE D'ORGANISATIONS MATHÉMATIQUES MIXTES

Mohamed-Lamine Ali Tatar, Université de Guelma, Algérie
Michèle Artaud, Université de Provence – IUFM, France
Latifa Sahraoui-Kaïdi, Université d'Annaba, Algérie

L'existence d'un enseignement des mathématiques fonctionnalisé suppose l'existence, au sein du système didactique considéré, de praxéologies mathématiques mixtes dont une partie doit permettre la fabrication des organisations mathématiques à étudier notamment au sein de parcours d'étude et de recherche (PER). Nous présentons ici les résultats, partiels encore, d'une étude des deux questions suivantes : Comment obtenir les organisations mathématiques mixtes propres à être enseignées ? Que garder de ces organisations mathématiques mixtes dans le texte du savoir ? Nous avons choisi de présenter ces résultats, au moins provisoirement, sous la forme un peu inhabituelle d'une suite d'assertions qui seront justifiées par le travail de deux exemples qui ont permis de produire ces assertions.

1. *Une organisation mathématique mixte (OMM) est le produit de la modélisation, au moins partiellement mathématique,* ***d'une question*** *le plus souvent* ***extramathématique****.*

Exemple 1 : une question de menuiserie du bâtiment
Quelle doit être la longueur des lames d'un parquet à point de Hongrie dont les lambourdes sont distantes de 30 cm ?

Exemple 2 : Une question économique
Ali va acheter de l'essence. Voici ce qu'Ali est disposé à payer pour certaines quantités d'essence.

n-ième litre	Disposition à payer	*n*-ième litre	Disposition à payer
10e litre	*5,00€*	60e litre	*1,85€*
20e litre	*4,25€*	70e litre	*1,40€*
30e litre	*3,55€*	80e litre	*1,00€*
40e litre	*2,95€*	90e litre	*0,65€*
50e litre	*2,35€*	100e litre	*0,35€*

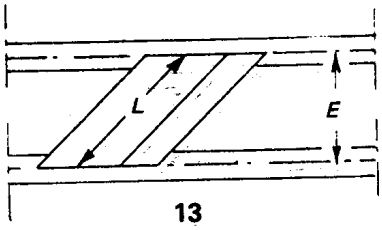
Le prix du litre d'essence sur le marché est de $p^* = 1{,}3$ € (le prix est identique pour toutes les unités achetées). Est-ce qu'Ali va réaliser un gain par rapport à ce qu'il pouvait payer ?

2. ***Les OMM*** *nécessaires à l'existence d'un enseignement des mathématiques fonctionnel* ***ne sont pas toujours visibles ou complètement visibles des institutions mathématiques ou de leur noosphère :*** *il faut alors en repérer la trace dans des organisations de savoir présentes dans d'autres institutions*

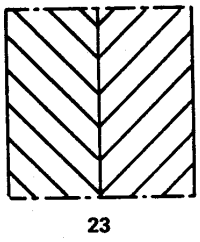
Exemple 1 : une question de menuiserie du bâtiment

Un ouvrage de menuiserie du bâtiment traitant de la question évoquée précédemment écrit ainsi[1] :

« Lambourdes – Ce sont des pièces de bois de chêne fixées à plat, en travers des solives et sur lesquelles se clouent les lames des parquets. Leur section varie suivant la portée, ordinairement 80×40*, l'épaisseur étant environ le 1/10 du vide laissé entre les poutrelles. Leur écartement d'axe en axe est variable suivant le genre du parquet ; de 30 à 35 cm pour le point de Hongrie, de 40 à 45 cm pour le parquet à l'anglaise, et 30 à 50 cm pour le bâton rompu. Pour ce dernier, les lambourdes doivent avoir 120 mm de largeur pour éviter l'éclatement des bouts de lames du parquet lors du coulage.*
Pour des lames disposées à 45° et de longueur connue, on trouve l'écartement des lambourdes correspondant et réciproquement en appliquant les formules suivantes (fig 13) :
L = longueur des lames ; E = écartement d'axe et axe.
1. connaissant L : $E = L/\sqrt{2} = L/1{,}414$
2. connaissant E : $L = 1{,}414 \times E$. »



Puis plus loin[2] : « [Parquet] à point de Hongrie, dit Fougère (fig 23) : les lames façonnées par moitié, main gauche et main droite, sont placées sous un angle de 45° ou de 60°, formant angle avec celle de la travée voisine. Les joints des travées sont rectilignes et les lambourdes leur sont parallèles ».



Exemple 2 : Une question économique

Institution d'enseignement des mathématiques (1)

Edward T. Dowling (1991), « Introduction au calcul différentiel et intégral », *Gestion, Économie et Sciences Sociales, Cours et Problèmes,* Série Schaum, p.190.

Dans le chapitre 8 qui traite de l'intégration, on trouve au sein de la dernière section « 8.9 applications » un exemple sur le surplus des consommateurs.

Exemple 12. Une fonction de demande $p_1 = f(x)$, comme indiqué sur la figure *8-6(a)*, représente les différents prix que les consommateurs sont prêts à payer pour différentes quantités d'un bien. Si le marché est en équilibre au point (x_0,p_0) où tous les consommateurs payent le même prix, les consommateurs qui sont prêts à payer plus cher obtiennent un avantage. L'avantage total des consommateurs, représentés par la région ombrée, est appelé le surplus des consommateurs. En termes mathématiques :

[1] C. Riollot. *Menuiserie du bâtiment. Technologie professionnelle pratique.* Paris : Dunod, 1980. pages 28-29.
[2] *Ibidem*, page 32.

Surplus des consommateurs $= \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$.

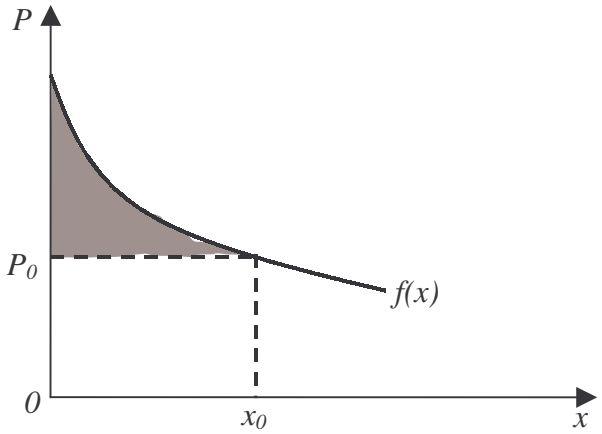


Fig. 8-6 (a)

Institution d'enseignement des mathématiques (2)

Pierre Jean Lancry (1982), « MATHECO », *Cours polycopié de mathématiques économiques, premier cycle de sciences économiques*, ECONOMICA, pp.256-257.

Dans la présentation du chapitre sur « Les intégrales », on peut lire :

Le calcul intégral est indispensable à l'analyse dynamique en Économie.
(…)
Dans le cas de l'équilibre par exemple, on peut avoir besoin de connaître les équations d'évolution des différentes variables du système. Supposons qu'une de ces variables croît à un taux constant *a*. quelle est alors son équation en fonction du temps ?
On sait que le taux de croissance ce *x* est défini par $\frac{d \log x}{dt}$. Comment passer de $\frac{d \log x}{dt} = a$ à $x=f(t)$?
L'opération qui consiste à passer d'une dérivée à la fonction s'appelle intégration. L'intégration qui apparaît alors comme l'inverse de la dérivation va donc être au centre de nombreux problèmes de dynamique économique.*

* Il convient de noter que ces applications du calcul intégral à l'Économie ne sont pas exhaustives. On peut citer en effet d'autres applications comme la recherche du coût total à partir du coût marginal ou le calcul du surplus du consommateur.

Institution d'enseignement de l'économie (1)

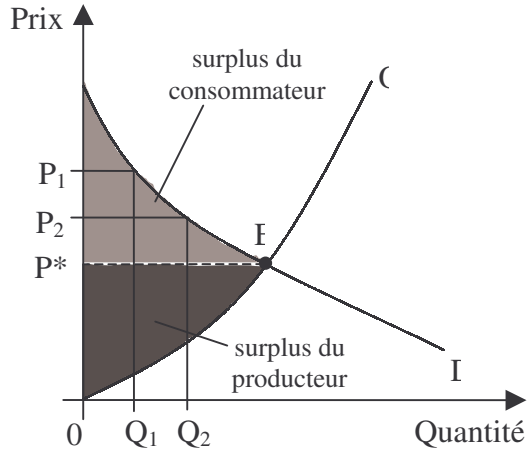
Jacques Généreux. 3e édition (2000), « Économie politique. 2. Microéconomie », *Les Fondamentaux*, Hachette Supérieur, pp. 94-95.

LES GAINS DE L'ÉCHANGE : SURPLUS DU CONSOMMATEUR ET DU PRODUCTEUR

Au point d'équilibre concurrentiel, il existe un prix de marché unique pour toutes les unités échangées (P* sur la figure 29).

Or, comme l'indique la courbe de demande, les acheteurs seraient disposés à payer un prix nettement plus élevé, par exemple P_1 pour obtenir une quantité Q_1, ou encore P_2 pour une quantité Q_2, etc.
Seule la dernière unité achetée au point E est payée au prix que les acheteurs étaient disposés à payer ; toutes les autres sont payées à un prix inférieur. Cette différence de prix mesure les gains de l'échange pour le consommateur, ou encore le « surplus du consommateur » : pour chaque unité achetée, le consommateur gagne la différence entre le prix qu'il était prêt à payer et le prix de marché ; ce surplus peut donc être mesuré sur la surface gris clair sur la figure 29.

Figure 29



Institution d'enseignement de l'économie (2)

Ali Kessab. 2e édition (2006), « La théorie économique. L'analyse microéconomique », *OPU* (Office des Œuvres Universitaires), pp. 178-181.[3]

<u>Le surplus du consommateur et le surplus du producteur :</u>

Généralement, le consommateur paye un bien moins ce qu'il était prêt à le payer. La différence entre les prix souhaités par le consommateur, et ce qu'il pouvait donc payer, et le prix effectif payé *P** est le surplus du consommateur.

…

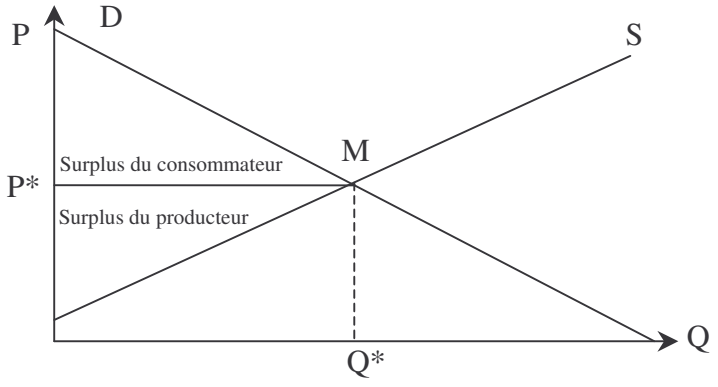


Figure II.44.

.[3] Le livre est écrit en arabe, la traduction est due à M.L Ali Tatar.

1-Calcul du surplus du consommateur
La fonction de demande est linéaire :

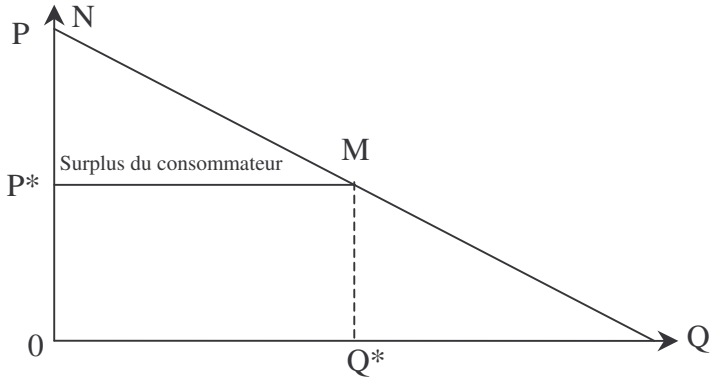


Figure II.45.

a- Quand la fonction de demande est linéaire de la forme : $Q_D = a - bp$ alors il est possible de calculer géométriquement le surplus du consommateur.

Surplus du consommateur = aire du triangle NEM.
Surplus du consommateur = ½ la base×La hauteur
= ½ (EM) (EN).

Remarque : Il est possible d'utiliser la méthode de l'intégrale d'une fonction linéaire et c'est ce que nous allons appliquer quand la fonction n'est pas linéaire.

b- Quand la fonction de demande n'est pas linéaire alors il est possible d'utiliser l'intégrale pour calculer le surplus du consommateur.

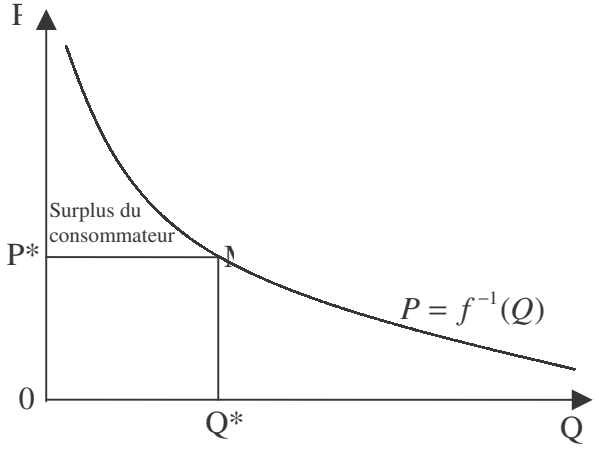


Figure II.46.

Nous avons utilisé $P = f^{-1}(Q)$ au lieu de $Q = f(p)$ car nous avons dit précédemment que généralement on suppose que la fonction de demande admet une réciproque (Voir la demande).

Si nous supposons : $P = \Psi(Q) = f^{-1}(Q)$, que Q^* représente la quantité demandée quand le prix est de P^* alors nous pouvons calculer le surplus du consommateur de la façon suivante.

$$C_S = \int_0^{Q*} \Psi(Q)\, dQ - P * Q *$$

3. *Le processus de modélisation* *fait pour l'essentiel* ***partie de l'organisation didactique*** *permettant de mettre en place l'organisation mathématique mixte : on n'en voit donc que très partiellement la trace dans les organisations de savoir mixtes (OSM, avec éventuellement S = M). En outre* ***ce que l'on en voit dépend du savoir sur lequel porte l'intention didactique.***

Exemple 1 : une question de menuiserie du bâtiment

L'extrait cité dans la partie précédente met l'accent sur la notion de lambourdes et sur la pose du parquet : ce sont ces éléments technologico-théoriques qui sont mis en avant ; la « formule » est, quant à elle, considérée comme allant de soi. En outre, si l'on trouve trace de la dite formule dans le cas d'un angle de 45°, l'ouvrage reste muet en ce qui concerne celui d'un angle de 60°.

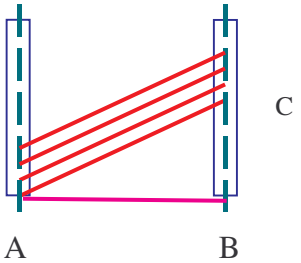
Exemple 2 : Une question économique

$S = M$ (Mathématiques)	$S = E$ (Économie)
La place de la notion de surplus du consommateur est négligeable. Elle est citée comme exemple dans la section « applications » et on ne la retrouve plus que dans des exercices d'application directe de l'intégrale dans le 1er document ; elle ne figure que dans une note de bas de page dans le 2e document sans aucun développement.	La place de la notion du surplus du consommateur, bien qu'elle ne soit pas très importante, est bien marquée faisant partie du chapitre sur « la concurrence pure et parfaite » pour le 1er document et faisant partie du chapitre qui concerne les applications de l'équilibre pour le 2e document.
Premier document Assimilation forte et franche de la notion du surplus du consommateur avec la formule intégrale.	La relation entre l'intégrale et le surplus du consommateur n'apparaît pas dans le premier document et apparaît comme un cas particulier dans le deuxième document.
Utilisation ostensive d'un graphe pour montrer le lien entre l'aire mais aucune trace du travail de modélisation qui permet d'aboutir à la notion d'intégrale.	L'explication graphique est privilégiée pour la définition du surplus pour le 1er document et pour étudier différents cas pour le 2e document.
Une définition du surplus du consommateur est donnée avec la fonction de demande, cette fonction étant considérée comme transparente.	Des traces graphiques concernant le travail de modélisation de la question économique dans le 1er document qui, bien que minimes, peuvent faire penser à l'aire qui représente le surplus mais pas à l'intégrale. Une définition du surplus du consommateur est donnée avec la fonction de demande, cette fonction étant considérée comme transparente. .

4. *Constituer une* ***organisation mathématique mixte « fonctionnelle »*** *suppose donc de restituer une partie au moins du processus de modélisation dans l'organisation de savoir,* ***soit de déplacer la frontière entre le didactique et le savoir, et cela à la fois du point de vue mathématique et du point de vue du savoir S avec lequel s'opère la mixité.*** On trouve là une ***conversion concrète*** du conditionnement des organisations de savoir par les organisations didactiques qui ont permis de les produire.

Exemple 1 : une question de menuiserie du bâtiment
On peut par exemple proposer la description suivante.

En menuiserie du bâtiment, on pose avec un angle de 45° ou de 60° les lames d'un parquet à point de Hongrie sur des lambourdes, qui sont des pièces de bois supportant les lames du parquet. La figure ci-contre donne un modèle graphique de la situation. Il s'agit connaissant l'écartement avec lequel on va poser les lambourdes de déterminer la longueur des lames. Cela nécessite ainsi de calculer la longueur du segment [AC] connaissant AB et l'angle en A.



Comme cos ∠A = AC/AB, il vient AC = ABcos45 = AB $\sqrt{2}/2$ ou AC = AB cos 60 = AB/2.

L'organisation mathématique mixte précédente peut ainsi permettre de produire la notion de cosinus d'un angle géométrique.

Exemple 2 : Une question économique

Reformulation de la question économique
Quel est le surplus du consommateur ?
Soit, quelle est la différence entre le montant payé et le montant qu'Ali aurait été prêt à payer ?

Quel est le montant payé ?

Quel est le montant qu'il aurait été prêt à payer ?

Nous disposons, dans le tableau des données, de ce qu'Ali est prêt à payer pour quelques différentes *q*-ième quantités.

Si on avait ce montant pour toutes les quantités, le montant qu'il serait prêt à payer pour l'achat d'une quantité q* serait la somme des montants des *q*-ième quantités inférieures ou égales à q*.

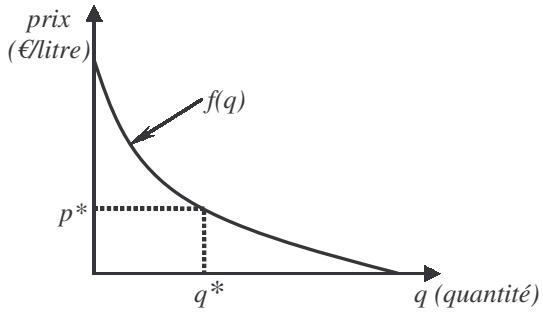
p*q*, tel que p*= 1,3€ et q*= ?

Quelle est la quantité q* achetée par Ali quand le prix est p* ?

Ali achète la quantité q* tel que le montant qu'il est disposé à payer pour la $(q^*)^{\text{ième}}$ quantité soit égale à sa valeur sur le marché. Nous ne connaissons pas les dispositions à payer d'Ali pour les différentes quantités successives.

Modèle graphico-mathématique

Construire un modèle graphico-analytique de cette relation (énième quantité, prix) matérialisé par une courbe continue et donc d'une fonction réelle continue *f(q)* décroissante où la variable *q* représente la q^e quantité et son image *f(q)* le prix que Ali est disposé à concéder pour cette q^e quantité.



Le modèle *f(q)* des dispositions à payer du consommateur Ali

Cette fonction continue *f(q),* où les différentes quantités sont représentées sur l'abscisse et les niveaux de prix en ordonnée, représente une fonction de demande inverse d'Ali.

Prenons $f(q) = \frac{1}{2400}q^2 - \frac{1}{10}q + 6$ comme modèle qui approxime les dispositions à payer d'Ali pour les différentes quantités q possibles. *f(q)* est définie seulement sur l'intervalle : $[0,\ f^{-1}(0)] = [0, 120]$.[4]

La quantité achetée quand le prix est *p*=1,3€/l* est donnée par : $q^* = f^{-1}(p^*) = f^{-1}(1{,}3) \approx 64{,}14l$, la valeur numérique étant obtenue en résolvant l'équation du second degré $\frac{1}{2400}q^2 - \frac{1}{10}q + 6 = 1{,}3$, $q \in [0 ; 120]$.

---

[4] On a choisit une fonction quadratique, $f(q) = a\,q^2 + b\,q + c$, en tenant compte de deux données qui ne figurent pas dans le tableau des dispositions d'Ali à payer pour certaines quantités d'essence :

– À partir de quel prix Ali décide-t-il de n'acheter aucune quantité d'essence ? On a supposé, d'après les données du tableau, que si le prix du litre d'essence égale ou dépasse 6 €, Ali n'achètera pas d'essence. $(f(0) = 6 \Leftrightarrow c = 0)$.

– Quelle est la quantité qu'Ali est disposé à acheter quand le prix est nul ? On a supposé, d'après les données du tableau, qu'Ali achètera au maximum 120 litres d'essence $(f(120) = 0 \Leftrightarrow 14400a + 120b + 6 = 0)$.

On a ajouté à cela une troisième donnée , en supposant que la fonction *f* admet un minimum pour *q=120 : c*e qui donne $f'(q) = 0$ pour *q=120*, soit $(240a + b = 0 \Leftrightarrow b = -240a)$.

On obtient ainsi la fonction quadratique : $f(q) = \frac{1}{2400}q^2 - \frac{1}{10}q + 6$.

Ce choix a été fait dans un souci de ne pas trop alourdir les calculs. Il est bien entendu possible de choisir d'autres modèles de fonctions quadratiques on non, en utilisant par exemple différents modèles de régression (régression polynomiale, logarithmique, ...).

Montant payé = $p^*q^*=1,3\times 64,14=83,39€$

Le montant disposé à payer par Ali noté D vérifie

$$S_n^{\inf} \le D \le S_n^{\sup}$$

$$S_n^{\inf} = \frac{q^*}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{iq^*}{n}\right)$$

$$S_n^{\sup} = \frac{q^*}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{iq^*}{n}\right)$$

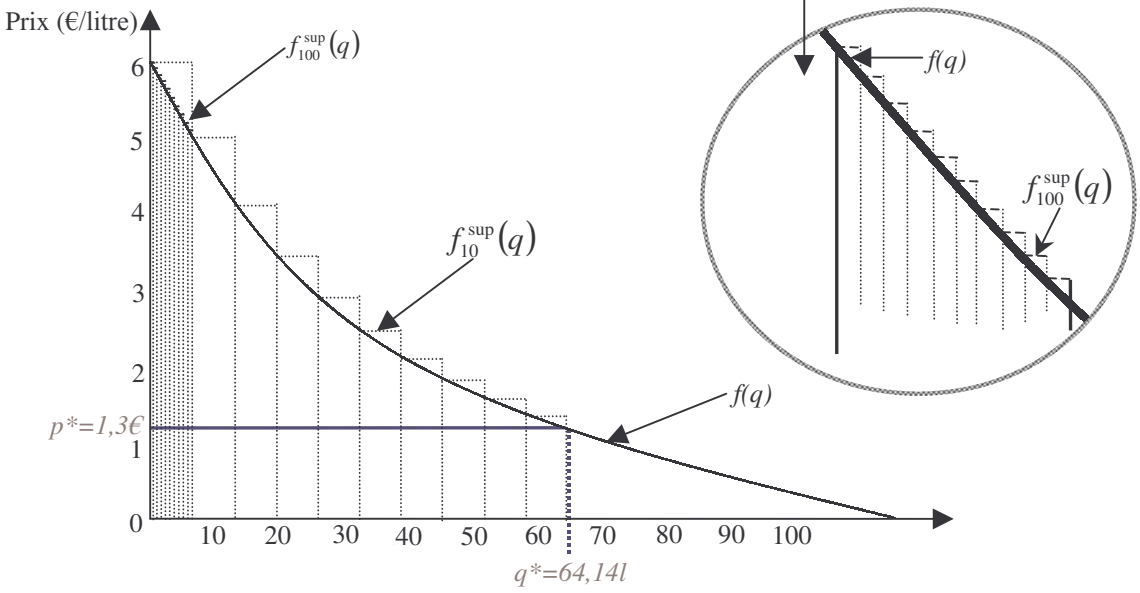


Figure A. Les dispositions à payer du consommateur selon le modèle $f_{100}^{\sup}(q)$

$$f_n^{\sup}(q) = \begin{cases} f\left(\frac{i}{n}q^*\right) \;\; si\, q \in \left[\frac{i}{n}q^*, \frac{i+1}{n}q^*\right[, \; i = \overline{0,1...n-1} \\ f(q^*) \;\; si\, q = q^* \end{cases}$$

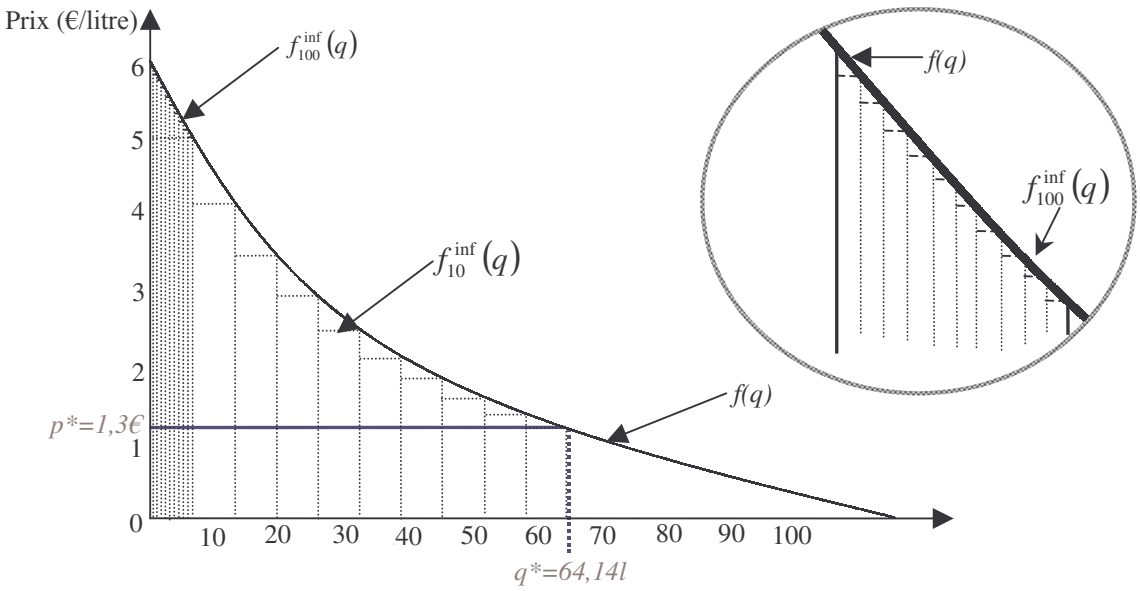


Figure B. Les dispositions à payer du consommateur selon le modèle $f_{100}^{\inf}(q)$

$$f_n^{\inf}(q) = \begin{cases} f\left(\frac{i+1}{n}q^*\right) \ \ si\, q \in \left]\frac{i}{n}q^*, \frac{i+1}{n}q^*\right], \ i = \overline{0,1...n-1} \\ f(0) \ \ si\, q = 0 \end{cases}$$

$$S_n^{\sup} = \frac{2(q^*)^3 - 720(q^*)^2 + 86400\,q^*}{14400} + \frac{-3(q^*)^3 + 720(q^*)^2}{14400\,n} + \frac{3(q^*)^3}{14400\,n^2}$$

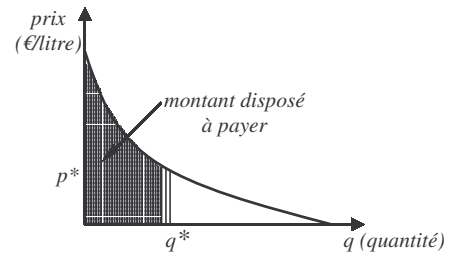
$$S_n^{\inf} = \frac{2(q^*)^3 - 720(q^*)^2 + 86400\,q^*}{14400} - \frac{-3(q^*)^3 + 720(q^*)^2}{14400\,n} + \frac{(q^*)^3}{14400\,n^2}$$

$S_n^{\inf}$ et $S_n^{\sup}$ sont deux suites adjacentes de limite :

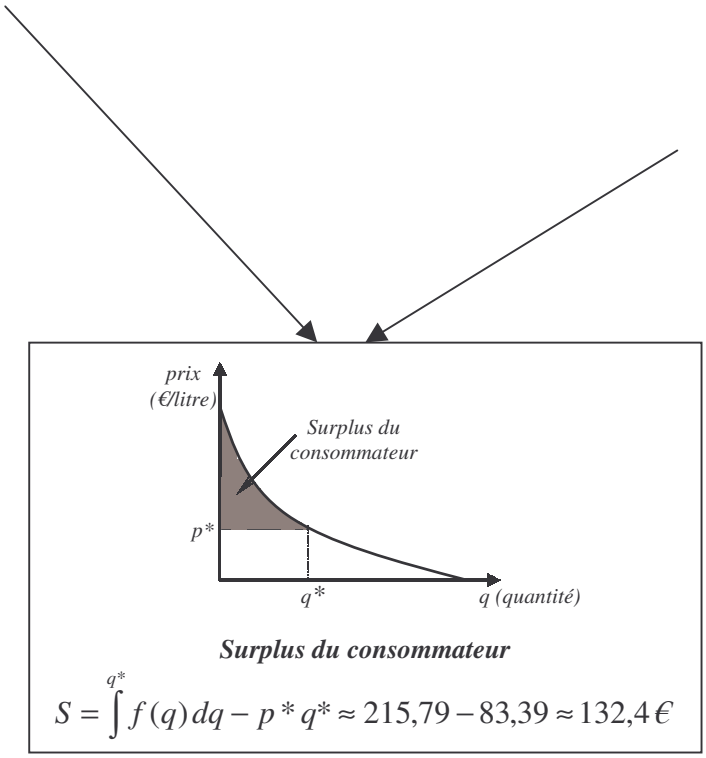
$$\lim_{n\to\infty} S_n^{\inf} = \lim_{n\to\infty} S_n^{\sup} = \frac{2(q^*)^3 - 720(q^*)^2 + 86400\,q^*}{14400} \approx 215{,}79\ €.$$

$$D = \lim_{n\to\infty} S_n^{\inf} = \lim_{n\to\infty} S_n^{\sup}$$

$$D = \int_0^{q^*} f(q)\,dq = \int_0^{64,14} \frac{1}{2400}q^2 - \frac{1}{10}q + 6\,dq = 215{,}79\,€$$



***D* = aire du domaine hachuré**



Suivant la fonction didactique donnée à cette organisation mathématique mixte vis-à-vis de l'organisation mathématique relative à l'intégration, on sera amené :

– à développer le calcul de l'aire (choix effectué ici) ;
– à développer le lien entre intégrale (définie à partir de l'aire) et primitive ;
– à développer les deux aspects mentionnés.

5. Le ***développement de PER*** reposant sur des organisations mathématiques mixtes suppose ainsi :

– que l'on fabrique les ***organisations mathématiques mixtes appropriées*** ;
– que l'on ***change le rapport à l'institutionnalisation*** des institutions considérées, en amenant à consigner dans le texte du savoir mathématique des ingrédients inédits et/ou qui feraient ordinairement partie de l'organisation de l'étude ou encore d'autres organisations de savoir.

Dans certaines institutions didactiques – le système de formation des économistes par exemple –, deux disciplines ainsi vont conditionner les organisations mathématiques mixtes et les organisations de l'étude qui les mettent en place : les mathématiques et le savoir (économique par exemple) avec lequel va s'opérer la mixité.