Ostensifs *dx* et $\int$ comme outil pour questionner le problème de l'enseignement des intégrales

Truong Luong Cong Khanh – Univ. Pédagogique Ho Chi Minh Ville
Annie Bessot – LIG UJF Grenoble
Jean-Luc Dorier – DiMaGe-Uni Genève

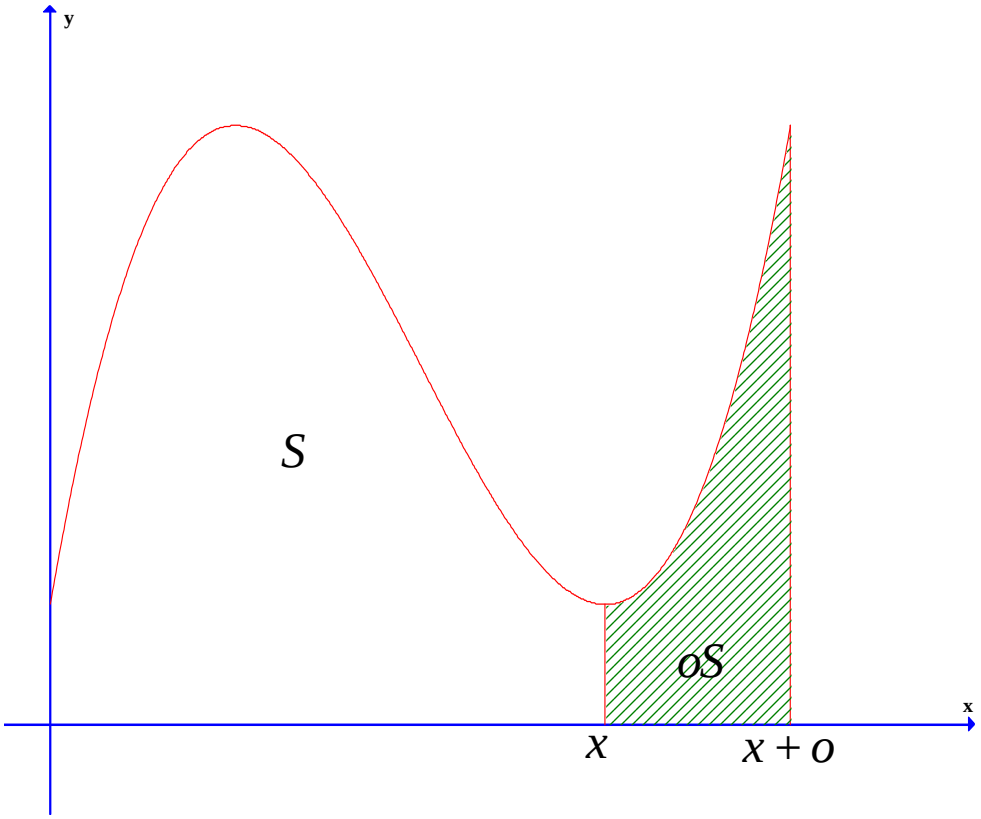
Newton (1642 - 1727)

moments = quantités infiniment petites

Calcul de S aire d'une surface plane délimitée par une courbe

- ➔ moment d'aire oS lorsque x croît d'une quantité infinitésimale notée o
- ➔ calcul du taux de variation instantanée de l'aire au point d'abscisse x noté $\frac{oS}{o}$
- ➔ $y = \frac{oS}{o}$

Lien entre quadrature et taux de variation : germe de la primitivation (antidérivation)



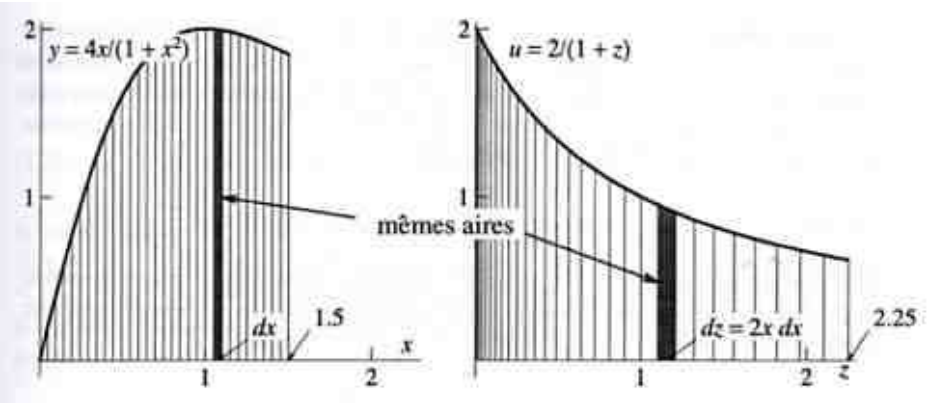
Leibniz (1646-1716)

Évolution des notations Leibniziennes

Date	Notation utilisée
Avant octobre 1675	ℓ : différence de deux valeurs voisines d'une quantité infinitésimale
29 octobre 1675	$\int \ell$: somme des ℓ $\int$ remplace *omn.*
11 novembre 1675	dx : quantité infinitésimale de x dy : quantité infinitésimale de y dx/dy : rapport entre dx et dy
21 novembre 1675	$\int ydx$: aire sous la courbe, somme des aires de rectangles curvilignes infinitésimaux de dimension (y, dx) ydx remplace ℓ

Théorème de la *transmutation*, forme primitive du changement de variable, permis par les ostensifs $\int$ et dx

$$\int_0^{1,5} \frac{4x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{2,25} \frac{2}{1+z}\,dz$$



dx facteur multiplicatif désignant un côté du rectangle infinitésimal par lequel on doit multiplier l'ordonnée y, autre côté du rectangle, pour obtenir l'aire du rectangle infinitésimal en question.

Dans la transmutation, l'ostensif dx indique l'équipollence de figures

Absence de notation pour les bornes chez Leibniz et Newton

L. Euler (1707 – 1783) : notation $\int f(x)dx\left\lfloor \begin{matrix} x=a \\ x=b \end{matrix} \right\rfloor$

J. Fourier (1768 – 1830) : notation actuelle $\int_a^b f(x)dx$

Et après l'émergence des notions de *fonction* et de *limite* ?

valence sémiotique et instrumentale *dx*

-> indique (par convention) la variable d'intégration

Primitivation (ou antidérivation)

Absence dans les traités

Changement de variable
La liberté explicite de Lang (1964) vis-à-vis de l'ostensif *dx*
dx valence instrumentale de facteur multiplicatif

Théorème : Soient g une fonction à dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$, f une fonction continue sur un intervalle contenant les valeurs de g, alors $\int_a^b f(g(x))\frac{dg}{dx}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.

« la notation $\frac{dg}{dx}$ doit être lue comme un tout » dans un premier temps, et « sera conventionnellement considérée comme une fraction plus tard. »

Usage d'une règle « pratique » dite « **Chain rule** »

Chain rule : terme utilisé par Lang pour désigner la règle pratique de dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Qu'en est-il dans EMS ?

Classes terminales en France et au Viêt-nam

Calcul de primitive
Présence ou non de l'ostensif ∫ et méthodes enseignées

<table>
<tr><th></th><th>Terminale S France</th><th>Classe 12 Vietnam</th></tr>
<tr><td>Période 1</td><td>$\int f(x)dx$
• Intégration par parties
• Changement de variable implicite
ou
• Intégration par parties
• Primitivation</td><td>$\int f(x)dx$
• Intégration par parties
• Changement de variable</td></tr>
<tr><td>Période 2</td><td rowspan="2">Disparition de ∫

Primitivation</td><td>Disparition de ∫
Disparition des méthodes de calcul</td></tr>
<tr><td>Période 3 (actuelle)</td><td>Réapparition de ∫
• Changement de variable implicite</td></tr>
</table>

Usages idoines des ostensifs (selon les périodes) dans les solutions attendues par EMS vietnamienne

EXEMPLE : « Calculer les primitives des fonctions suivantes : $x^2 + x + 1$; $\sin^3 x \cos x$; $x \ln x$ »

Période 1	$x^2 + x + 1$	Primitivation $\int(x^2 + x + 1)dx = [\int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx] = x^3/3 + x^2/2 + x + C$
	$\sin^3 x \cos x$	• Changement variable (explicite) Calcul de $\int \sin^3 x \cos x\, dx$ par $u = \sin x$ • Changement variable (implicite) $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \sin^4 x/4 + C$
	$x \ln x$	Intégration par parties Calcul de $\int x \ln x\, dx$ en posant $u = \ln x$, $dv = x dx$
Période 2	$x^2 + x + 1$	Primitivation [Primitive $x^2 = x^3/3$. Primitive $x = x^2/2$. Primitive $1 = x$] $\Rightarrow$ Primitives $x^2 + x + 1 = x^3/3 + x^2/2 + x + C$
	$\sin^3 x \cos x$	Primitivation $(\sin^4 x/4)' = \sin^3 x \cos x \Rightarrow$ Primitives $\sin^3 x \cos x = \sin^4 x/4 + C$
	$x \ln x$	Primitivation $((x^2/2)\ln x)' = x \ln x + x/2$ $\Rightarrow ((x^2/2)\ln x)' - (x^2/4)' = x \ln x$ $\Rightarrow$ Primitives $x \ln x = (x^2/2)\ln x - x^2/4 + C$
Période 3 (actuelle)	$x^2 + x + 1$	Primitivation $\int(x^2 + x + 1)dx = [\int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx] = x^3/3 + x^2/2 + x + C$
	$\sin^3 x \cos x$	Changement de variable (implicite) $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \sin^4 x/4 + C$
	$x \ln x$	Intégration par parties (implicite) $\int x \ln x\, dx = \int d(x^2/2.\ \ln x) - \int (x/2)dx = (x^2/2)\ln x - x^2/4 + C$

Calcul d'intégrale $\int_a^b f(x)dx$
Méthodes associées

<table>
<tr><th></th><th>Terminale S France</th><th>Classe 12 Vietnam</th></tr>
<tr><td>Période 1</td><td>• Intégration par parties
• Changement de variable implicite
ou
• Intégration par parties
• Primitivation</td><td rowspan="3">• Intégration par parties
• Changement de variable</td></tr>
<tr><td>Période 2</td><td>• Intégration par parties
• Primitivation</td></tr>
<tr><td>Période 3 (actuelle)</td><td>• Intégration par parties
• Primitivation +
• Interprétation en termes d'aire</td></tr>
</table>

Comparaison EMS actuelles France Viêt-nam : ostensifs ∫ et *dx*

Ostensif		France	Viêt-nam
Absence ou présence de ∫		*Absence* Pas d'amalgame primitive / intégrale → calcul de primitive ≠ calcul d'intégrale	*Présence* Amalgame primitive / intégrale → calcul de primitive = calcul d'intégrale
Valence *dx*	sémiotique	Indicateur de variable d'intégration	• Indicateur de variable d'intégration • facteur algébrique
	instrumentale		•Indicateur de variable d'intégration •Élément différentiel

Le statut problématique de l'intervalle d'intégration

Une conséquence de l'amalgame primitive / intégrale ?

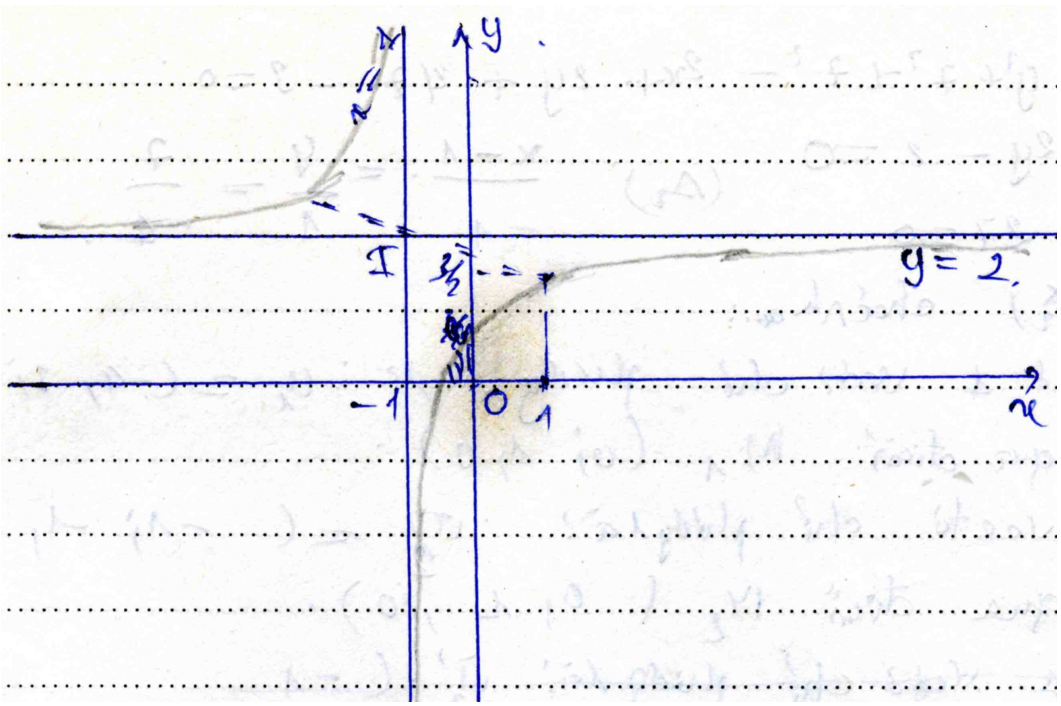
Non rattachement du calcul d'intégrale à la notion d'aire

Bac Vietnam 2005

Problème 1 (3,5 points)

Étant donnée la fonction $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ ayant pour graphique (C).

1. Étudier la fonction et dessiner son graphique. (2 points)
2. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et le graphique (C). (0,75 point)
3. Écrire l'équation de la tangente au graphique (C) en sachant que cette tangente passe par le point A(-1; 3). (0,75 point)



L'abscisse du point d'intersection entre (C) et l'axe des abscisses est la solution de l'équation :

$\dfrac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ (car $x = 1$ n'est pas solution de l'équation)

L'aire : $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left|\frac{2x+1}{x+1}\right| dx = \int_{-1}^{0} \left(2 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(2x - \ln|x+1|\right)\Big|_{-1}^{0}$

Stratégies observées pour le problème 1, question 2 : « Calcul d'aire »

(1) Déterminer graphiquement la surface (2) Écrire $\int_a^b f(x)dx$		Nombre copies	Pourcentage
Calcul correct		92	67 %
Erreurs	a, b ? Combinatoire sur nombres présents sur graphique	25	18 %
	f(x) ? Combinatoire sur les équations présentes	2	1,5 %
	a, b ? et *f(x)* ?Combinatoire sur nombres et équations	6	4 %
	Autres	2	1,5 %
Sans réponse		11	8 %
Total		138	100 %

Le calcul d'intégrale séparé de l'aire
Bac Vietnam 2005 (suite)

Calculer l'intégrale I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin^2 x)\cos x dx$. (0,75 point)

Linéarisation I1 + I2, intégration par parties (IP) de I1			Nombre copies	Pourcentage
Attendue Linéarisation avant IP (I1)	I2	**a.** Changement de variable implicite	35	25 %
		b. Changement de variable explicite	32	23 %
		c. Transformation trigonométrique	21	15 %
		d. t = $\sin^2$x	1	1 %
Ministère IP (I1) avant linéarisation	I2	**a.** Changement de variable implicite	2	1,5 %
		b. Changement de variable explicite		
		c. Transformation trigonométrique	4	3 %
Erreur : Manipulations de l'ostensif dx			7	5 %
Autres erreurs			3	2 %
Sans réponse			33	24 %
Total			138	100 %

Erreurs dues aux manipulations de l'ostensif dx : valences instrumentale et sémiotique observées

Solution	Manipulations observées
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin^2 x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin^2 x)$	Oubli de cosxdx : ➔ dx facteur algébrique inutile => dx = cos$xddx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$	Ré-apparition de dx, comme remplaçant de cosxdx
$= \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$	Obtention de $x^2/2$ $\rightarrow$ dx : indicateur de variable d'intégration
$= \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right)\right\|_0^{\frac{\pi}{2}}$	obtention de $x/2$ – sin2$x/4$ $\rightarrow$ dx : indicateur de variable d'intégration
$= \frac{\pi^2+2\pi}{8}$	Calcul valeur numérique

Pourquoi cette richesse des valences pour *dx* dans EMS Viêt-nam ?

	Terminale S France	**Classe 12 Viêt-nam**
Notion de différentielle	hors programmes de toutes périodes	Enseignement de la différentielle *avant* intégration $dy = y'.\Delta x$ $y = x \Rightarrow dy = (x)'\Delta x = \Delta x$ $dy = y'.dx$
Valences sémiotiques	indicateur de variable d'intégration	indicateur de variable d'intégration facteur algébrique
Valences instrumentales		indicateur de variable d'intégration élément différentiel

- Permanence de la valence d'indicateur de variable d'intégration
- Disparition fréquente de *dx* dans les écritures des élèves ⇒ Valence de facteur algébrique inutile
- Fragilité de la valence d'élément différentielle