El problema de la enseñanza de la geometría en la Educación General Básica chilena y una propuesta para su enseñanza en aula

Lorena Espinoza; Joaquim Barbé; Dinko Mitrovich; Daniela Rojas
Grupo Félix Klein
Universidad de Santiago de Chile

Resumen

Nos situamos dentro de la problemática general de la enseñanza de Geometría en la Educación General Básica chilena y nos centramos, más específicamente, en el primer ciclo de la enseñanza (6-10 años). A partir de los resultados del proyecto de investigación Fondecyt que aborda el problema del *estancamiento de los niveles de logros de aprendizaje de los estudiantes en Enseñanza Básica*[1], y utilizando las herramientas esenciales de la TAD (Chevallard, 1999; Bosch *et al.* 2003), caracterizamos las principales organizaciones matemáticas de cada uno de los ejes que atraviesan el currículo de la Básica, particularmente del eje de geometría. Derivado de este análisis identificamos una serie de disfunciones de carácter *curricular* que podrían dificultar la enseñanza de la geometría en las escuelas y, por tanto, el aprendizaje de los niños. Asimismo, el análisis de la *dimensión fáctica* nos permitió detectar qué aspectos de la enseñanza de la geometría dificultan la gestión de los profesores de este ciclo en aula, y cuáles la facilitan. Postulamos que, parte importante de las dificultades en la enseñanza de la geometría en Básica están relacionadas con el tipo de actividad matemática que se propone en los programas oficiales y libros de texto para que los estudiantes realicen, y con las condiciones bajo las cuales los profesores deben gestionar sus procesos de estudio en las escuelas.

Sobre la base de la evidencia empíricamente recogida, nuestro trabajo de investigación continuó, en el contexto de la Estrategia LEM, con la elaboración de unas propuestas de enseñanza que permitirían superar tales dificultades y lograr que niños y profesores desarrollen un auténtico trabajo matemático[2].

Siguiendo los principios fundamentales de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1983), para cada proceso elaboramos una situación fundamental que permitiera el primer encuentro y la exploración de los niños de una problemática que involucra alguna noción o propiedad fundamental de la geometría en estudio. En el caso que presentamos aquí, la problemática es relativa a una propiedad fundamental de los polígonos de más de tres lados, en particular de los cuadriláteros. Se trata de la *no rigidez* de los cuadriláteros, o bien que, existen infinitos cuadriláteros cuyos lados tienen las mismas medidas. Esta situación genérica permite originar una familia de problemas que, al ir variando las variables didácticas de la situación, van "exigiendo" al estudiante la elaboración, utilización o adaptación de importantes conocimientos geométricos. En particular, emerge el teorema que relaciona el paralelismo de los lados opuestos de un cuadrilátero con la igualdad de medida de dichos lados en los paralelogramos. Además, se contemplan actividades que permiten gestionar las restantes *dimensiones* del proceso de estudio.

A través de la experimentación de este proceso en 300 aulas chilenas, hemos podido determinar condiciones bajo las cuales es posible gestionar la enseñanza de la geometría siguiendo procesos de estudio como el propuesto. Hemos precisado cómo funciona esta propuesta didáctica en las aulas, hemos podido contrastar nuestras hipótesis de aprendizaje, e identificar aspectos de la propuesta que dificultan la gestión del proceso por parte de los profesores y aquellos que lo facilitan.

1. El problema de la enseñanza de la geometría en Chile

[1] Proyecto Fondecyt Nº 1050342 financiado por la Comisión Nacional para la Investigación y Desarrollo de Chile.

[2] Este trabajo de desarrollo y transferencia ha sido financiado por el Ministerio de Educación de Chile.

La geometría es en Chile, y muy probablemente en varios países del mundo, una de las áreas de la matemática que presenta mayores dificultades para ser enseñada y aprendida. Esta problemática es especialmente sensible en la Escuela Básica. Nuestra investigación, y otros estudios realizados en este ámbito (Espinoza, Barbé, 2004; OCDE, 2004), muestran que los profesores de estos niveles educativos, debido a su escasa formación matemática y didáctica, tienen serias dificultades para ir más allá de una enseñanza de la geometría centrada en la clasificación rígida y *formal* de figuras y cuerpos, en la memorización de propiedades y en el cálculo de áreas y perímetros. Por ello, tienden frecuentemente a postergar la enseñanza de la geometría para finales del año escolar, terminando por enseñarla superficialmente por cuestiones de tiempo y disponibilidad en las escuelas.

Esta deficiencia en la enseñanza de la geometría responde a una problemática compleja en la que intervienen múltiples factores, que no puede ser atribuida únicamente a insuficiencias en las prácticas pedagógicas, ni tampoco a dificultades cognitivas de los alumnos. El trabajo de investigación que aquí presentamos se centra específicamente en el primer ciclo de enseñanza de la escuela básica (6-10 años), y aborda la problemática de carácter científico y social adoptando un punto de vista sistémico que se apoya en las principales nociones de la Teoría Antropológica de lo didáctico de Y. Chevallard (1997, 1999), recoge los últimos resultados de la investigación en didáctica de la geometría (Chamorro, 2003; Vecino, 2003), y la analiza en términos de tres dimensiones: *curricular*, *fáctica* e *institucional*.

La dimensión *curricular* aborda la problemática desde la perspectiva del conocimiento que la postura oficial, a través del marco curricular, planes y programas y libros de texto, establece que se debe enseñar como mínimo en geometría en la escuela básica. Este análisis nos permite determinar el tipo de *organizaciones matemáticas* (OM) que la institución oficial propone actualmente, su grado de *completitud* y *coherencia* y la *articulación* de éstas dentro de la programación de la enseñanza establecida. La dimensión *fáctica*, por su parte, se refiere a la forma en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las escuelas, cuando alumnos, conducidos por un profesor, estudian la geometría escolar. El análisis de esta dimensión permite determinar las *organizaciones didácticas* (OD) que profesores y alumnos construyen efectivamente en la escuela para realizar el estudio y, con ello, el margen de viabilidad que podrían tener propuestas de enseñanza que pretendieran contribuir a superar las dificultades detectadas en el sistema. Este segundo nivel de análisis lo realizamos mediante las nociones de *praxeología didáctica*, tanto del profesor como del alumno, la teoría de los *momentos didácticos* y la noción de *contrato didáctico*. La dimensión *institucional* se refiere a los aspectos que están más allá de la sala de clases y que se sitúan a nivel de la institución, y que afectan fuertemente el desarrollo de los procesos didácticos. La práctica del profesor, lejos de ser una actividad "autónoma", se encuentra sometida a todo tipo de imposiciones institucionales que gobiernan los aspectos generales que afectan el entorno del estudio, es decir, los aspectos no específicos del contenido matemático en estudio, y que constituyen lo que Chevallard *et al.* han denominado *contrato escolar* (Chevallard, *et al.*, 1997). El análisis de esta dimensión permite identificar aquellos factores que facilitan la realización de la enseñanza, y también de aquellos que la dificultan.

Luego de caracterizar y comprender el problema de la enseñanza de la geometría en básica, nuestra investigación continuó elaborando propuestas de enseñanza concretas que permitieran avanzar hacia una mejora significativa del problema. Interesaba que los profesores, a través de vivir una experiencia de enseñanza específica, adquirieran una forma de entender las matemáticas y su enseñanza tal, que les permitiera transmitir una *práctica* y así gestionar procesos de estudios efectivos.

Siguiendo los principios fundamentales de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1983), para cada proceso elaboramos/adaptamos una *situación fundamental* que permitiera el *primer encuentro* y la *exploración* de los niños de una problemática que involucrara una noción o propiedad fundamental de la geometría en estudio. La riqueza de las situaciones *a-didácticas* nos permite definir el conocimiento matemático, al mismo tiempo que las *técnicas didácticas* que permitirán su realización en el aula. De esta forma hemos podido incorporar técnicas didácticas para el tratamiento de lo *a-didáctico* en las salas de clase, esto es, para lo que Brousseau ha designado como la *devolución*. Estas situaciones iniciales debían permitir un "diálogo" entre el alumno y ellas –o entre alumnos organizados en grupos y ella– y la acción de éstos sobre un *medio* expresamente organizado para tal propósito, por lo que debían ser abordables de alguna forma por los niños. El conocimiento en cuestión aparecería como una solución óptima. De esta forma, para gestionar estos dos momentos didácticos del estudio utilizamos principalmente situaciones de *acción* y de *formulación*, las que se van modificando a través de la manipulación de las *variables didácticas* de cada situación, para provocar la emergencia del conocimiento y su posterior aprendizaje. Esta dialéctica de la acción y formulación permite mejorar las estrategias de los alumnos que no pueden formular todavía en esta etapa del proceso, ni probar sus resultados. Con la finalidad de que las situaciones resultaran atractivas e interesantes para los niños, se consideraron siempre contextos significativos que pusieran de manifiesto la *funcionalidad* de los conocimientos.

Para gestionar el momento *tecnológico-teórico*, se elaboran, entre otras, situaciones de *validación* y, para gestionar las restantes dimensiones del proceso, se organizan situaciones que impulsen la apropiación comprensiva de las técnicas por parte de los alumnos, la institucionalización de los conocimientos, así como la evaluación de lo matemáticamente construido.

De esta forma, siendo uno de los grandes propósitos permitir que los niños se encontraran con la *funcionalidad* de los conocimientos, idea base de TSD, pretendimos además brindar a los niños la oportunidad de apropiarse integralmente de los conocimientos construidos, articulándolos dentro de una praxeología matemática local.

Centraremos el presente trabajo en la propuesta de enseñanza que estudia una propiedad fundamental de los polígonos de más de tres lados, en particular de los cuadriláteros. Se trata de la *no rigidez* de los cuadriláteros, o bien que dadas cuatro longitudes, existen infinitos cuadriláteros cuyos lados tienen esas medidas. La situación genérica permite producir una familia de problemas que, al ir variando las variables didácticas de dicha situación, van "exigiendo" al estudiante la elaboración, utilización o adaptación de distintos conocimientos geométricos. En particular, emerge el teorema que relaciona el

paralelismo de los lados opuestos de un cuadrilátero con la igualdad de medida de dichos lados, en los paralelogramos.

A través de la experimentación de este proceso en 300 aulas chilenas, hemos podido determinar condiciones bajo las cuales es posible gestionar la enseñanza de la geometría siguiendo procesos de estudio como el propuesto. Hemos precisado cómo funciona esta propuesta didáctica en las aulas, hemos podido contrastar nuestras hipótesis de aprendizaje e identificar aspectos de la propuesta que dificultan la gestión del proceso por parte de los profesores y aquellos que lo facilitan.

Para poder valorar el aporte de la propuesta de enseñanza específica que aquí presentamos, así como comprender las dificultades que enfrenta para su debida comprensión e implementación en aula, es necesario describir, aunque de manera general, la problemática de la enseñanza de la geometría en el primer ciclo de la escuela básica chilena.

1.1. Caracterizando la geometría que se debe enseñar en el primer ciclo de la escuela básica

Los actuales programas oficiales de matemática en el primer ciclo básico distinguen cuatro ejes temáticos que organizan los contenidos que se deben enseñar en una lógica progresiva de construcción. Estos son: números, operaciones aritméticas, formas y espacio, y resolución de problemas. Este último eje aparece como transversal a los tres ejes restantes y que, según documentos oficiales que han difundido dichos programas de estudio, ha tenido el propósito de enfatizar la importancia de la resolución de problemas en el estudio de las matemáticas escolares. Sin embargo, pese a este notable propósito, esta estructura ha provocado varias distorsiones en el mercado editorial, y también en las salas de clases.

En el eje de *formas y espacio* (geometría) se proponen cuatro temáticas para ser estudiadas: figuras geométricas en el plano, transformaciones en el plano, orientación espacial y cuerpos geométricos. El programa declara que se considera esencial proporcionar a los niños un conjunto de experiencias que les permitan reconocer la diversidad de formas de los objetos que los rodean, establecer relaciones entre ellas y considerar las formas geométricas como simplificaciones de las formas que se encentran en el entorno. Asimismo, se busca apoyar el desarrollo de procesos que permitan a los alumnos estructurar el espacio y desenvolverse en él (orientarse, usar referentes, elaborar representaciones gráficas).

Pese a estas destacadas aspiraciones, la actividad matemática concretamente propuesta en los programas, y también en los libros de texto, es en general pobre y desarticulada. El trabajo se orienta principalmente hacia estudiar la tarea de reconocimiento y clasificación de figuras, sin establecer relaciones entre los distintos tipos. Aparecen propuestas clasificaciones exclusivas e inclusivas, sin precisar sus distinciones. Así por ejemplo, en cierto momento del estudio un cuadrado es considerado como un tipo de rectángulo y, en otro momento, son considerados como figuras distintas. A medida que se avanza en el primer ciclo, se van incrementando los criterios de clasificación hasta llegar, en 4º año básico, al paralelismo y perpendicularidad. Los criterios suelen ser ambiguos y por ello confusos. Así, es posible encontrar figuras que pertenecen a dos categorías distintas bajo el

mismo criterio. En la clasificación de cuadriláteros aparece como ejemplo una figura designada como *deltoide*, formada por la yuxtaposición de dos triángulos rectángulos escalenos, por lo que no tiene pares de lados paralelos. Según la clasificación basada en el paralelismo, corresponde a un *trapezoide*. Sin embargo, por tener dos ángulos rectos, según el criterio de clasificación basado en cantidad de ángulos rectos, no pertenece a la categoría de *trapezoide*. Asimismo, según la medida de los lados, no es un *trapezoide* porque no tiene todos los lados de distinta medida. De hecho, este cuadrilátero así formado, podría pertenecer a la categoría de "dos pares de lados de igual medida", porque el criterio de clasificación basado en la cantidad de lados de igual medida, no precisa si estos lados son opuestos o adyacentes. En síntesis, se observa un gran esfuerzo en los programas de estudio por modificar la enseñanza tradicional de la geometría en Chile, poniendo más énfasis en el estudio de los *criterios de clasificación* que en la sola designación de las figuras clasificadas, o sea en los *nombres* de las figuras. Interesa actualmente que los niños estudien las figuras explorando si tienen o no pares de lados paralelos, perpendiculares, de igual medida, y sus ejes de simetría. Sin embargo, para aclarar estos criterios se dan ejemplos de figuras que cumplen determinado criterio, que podrían ser interpretados como definiciones de la clase; es decir, los ejemplos no corresponden *siempre* a los criterios que están ejemplificando. Tal es el caso de los trapecios que aparecen como ejemplos de cuadriláteros que no tienen ángulos rectos. El trapecio isósceles es uno de estos casos, sin embargo hay trapecios que sí tienen ángulos rectos, etc.

De forma general se observa que el estudio de la geometría no progresa al pasar de un curso al otro de la educación básica. Más bien se detecta la repetición del mismo tipo de actividad, que va variando solo por la incorporación de nuevos objetos. Las escasas tareas que muestran alguna diferencia entre un curso y otro suelen ser bastante más complejas que las habituales, ya que requieren conocer propiedades, utilizar técnicas precisas y algún tipo de tecnología y teoría para su verificación y justificación. Por lo general estas tareas son nuevas para profesores y alumnos; sin embargo, no aparecen suficientemente explicadas en los programas y, en consecuencia, son abordadas de forma insuficiente en la mayoría de libros de texto.

En 1º año básico el estudio comienza distinguiendo representaciones de "objetos geométricos" de una, dos y tres dimensiones, asociados con objetos del entorno. Las distinciones entre estas tres dimensiones no se utilizan ni se desarrollan en los cursos posteriores en los que más bien se estudian por separado. A partir de 2º año básico el trabajo con objetos de dos dimensiones y tres dimensiones se realiza en forma diferenciada, manteniendo cierto paralelismo en términos de los aspectos matemáticos estudiados. En 2º básico, tanto en el trabajo en 2D como en 3D se releva un trabajo de carácter manipulativo a través de la yuxtaposición de "objetos geométricos".

Los polígonos que se comenzaron a estudiar en 2º básico, se separan por número de lados para ser estudiados en 3º y 4º básico, determinando en ambos casos sus características más relevantes, estableciendo una clasificación según longitud de los lados, paralelismo, perpendicularidad y ejes de simetría. Se puede observar una falta de articulación entre 3º y 4º, debido a que no se enfatiza la relación entre triángulos y cuadriláteros. Los cuerpos que se comenzaron a estudiar en 2º básico, se complementan en 3º y 4º año con el estudio de pirámides y prismas rectos, y conos y cilindros respectivamente. En este último caso surge

la problemática que, para estudiar conos y cilindros, los alumnos sólo cuentan con experiencias sobre figuras curvas en 1º básico, elementos insuficientes para realizar dicho estudio.

En 4º año se observa una falta de articulación entre las diferentes tareas. En el caso de los cuadriláteros, las tareas de clasificación terminan siendo un objeto de estudio en sí mismo y no se enfatiza el trabajo de la producción de cuadriláteros como tarea articuladora. Por otra parte no se hace visible las relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares. Las tareas propuestas en su mayoría trabajan estos elementos en forma separada por lo cual no permiten combinar técnicas.

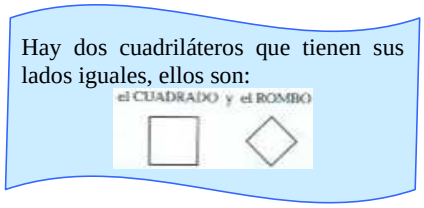
En cuanto a la OM propuesta en torno a las transformaciones en el plano, el estudio comienza en 3º año con traslación y simetría y continúa en 4º año con rotación, ampliación y reducción. Este ordenamiento propone en 4º el estudio de transformaciones isométricas junto a transformaciones no isométricas sin precisar la diferencia entre ambas, lo que se convierte en un problema en sala de clase. El estudio de ampliación y reducción se enseña ostensivamente; las técnicas mostradas carecen de tecnología y teoría que las expliquen y justifiquen. Se puede observar falta de articulación entre 3º y 4º ya que en este último año no se retoman las transformaciones isométricas ya estudiadas.

Principales Disfunciones

En todos los ejemplos del programa en que existe perpendicularidad, aparece asociada con la horizontalidad de uno de los segmentos perpendiculares. Por ello, la simple observación suele ser suficiente para reconocerla, de tal forma que no parece necesario disponer de una técnica para identificarla. Asimismo, el programa mantiene una vieja herencia sobre la enseñanza del paralelismo que lo presenta como una relación que se da en rectas verticales u horizontales exclusivamente y siempre de a pares, siendo segmentos de igual medida y dibujados frente a frente. El estudio del paralelismo se realiza solo en forma ostensiva, por lo que carece de precisión. Por lo general, el paralelismo se estudia en oposición a la perpendicularidad, por lo que para los niños dos rectas que *no* son paralelas son perpendiculares (Rojas, Conejera, 2007).

El estudio de posiciones aparece de manera aislada dentro del eje formas y espacio. La tarea que consiste en elaborar mapas del entorno para determinar y comunicar posiciones y trayectorias por referencia a filas y columnas (un cuadriculado) es poco viable, ya que no cuentan con las técnicas necesarias para que esta representación sea proporcional a la realidad (dibujo a escala), como las que se les presentan en los ejemplos.

Hay una gran confusión a la hora de clasificar figuras puesto que se están promoviendo, al mismo tiempo, clasificaciones exclusivas e inclusivas sin precisar sus distinciones. Un ejemplo de esta confusión se origina en el programa cuando indica que: "…es importante presentar las figuras dibujadas con diferentes orientaciones y cuidar, por ejemplo, que no se confunda un cuadrado girado en 45º respecto a la horizontal con un rombo" (pp. 209). Sin embargo, el comentario no es explicado ni justificado, y los textos de estudio no la han comprendido, encontrándose inconsistencias como la siguiente:



Aparece enunciado un criterio de clasificación de cuadriláteros basado en la cantidad de ejes de simetría, nuevo en la cultura de la básica, que no es utilizado en ninguna actividad.

2. ¿En qué consiste la propuesta de enseñanza?

A partir de las caracterizaciones del estudio de la geometría en el 1º ciclo básico, de sus principales dificultades y fortalezas, se construyó una propuesta de enseñanza para 4º básico (10 años) que abordaba las dificultades encontradas y pretendía contribuir a avanzar en la mejora de la enseñanza y aprendizaje respectivo. Se trata de la Unidad Didáctica sobre *Cuadriláteros* (Espinoza *et al*. 2006). Esta Unidad fue validada en 200 escuelas chilenas, mediante el análisis de su contrastación empírica en aula, la opinión de jueces, y de encuestas aplicadas a profesores.

Esta Unidad didáctica gira en torno al estudio de problemas que requieren de propiedades especiales de los cuadriláteros para ser resueltos. El estudio se organiza en torno a un problema genérico, que consiste en reponer una baldosa que se ha caído de una pared. El problema se retoma con diferentes condiciones a lo largo de la unidad. En la *primera clase*, los niños tienen que identificar entre un conjunto de baldosas, aquellas que calzan en dos embaldosados distintos. En uno de estos embaldosados las baldosas son de forma triangular y, en el otro, de forma cuadrilátera. La actividad permite usar un procedimiento que funciona para los triángulos, pero no así para los cuadriláteros. Sin embargo, considerar a los cuadriláteros como formados por dos triángulos con un lado común contribuye a valerse de las propiedades de los triángulos para identificar un cuadrilátero congruente a otro.

En la *segunda clase* se retoma la problemática inicial para afianzar lo aprendido en la primera clase. En la actividad planteada niñas y niños no solo deben identificar una figura congruente (idéntica) a otra, sino que tienen que crearla. En dicha labor necesitarán reconocer que para identificar un cuadrilátero congruente a otro cuando no se dispone de instrumentos para medir ángulos, es necesario, además de verificar que los cuatro lados correspondientes de las dos figuras miden lo mismo, verificar que una de sus diagonales tiene la misma medida. Posteriormente, en el mismo contexto, se propone a los niños crear baldosas de 4 lados que tienen algunos lados de la misma medida, utilizando pares de triángulos.

En la *tercera clase* se varían las condiciones del problema con la finalidad de que niñas y niños construyen y adquieran mas conocimientos sobre los cuadriláteros. Las baldosas que deben reponer tienen algunos ángulos rectos. Se estudia de qué manera esta característica facilita el reconocimiento o creación de la baldosa con la misma forma y tamaño. Se confronta si el procedimiento utilizado hasta ahora (medir la diagonal) es más funcional que verificar que ambos cuadriláteros tienen un ángulo recto, y que dicho ángulo se encuentra entre pares de lados correspondientes. Posteriormente, en el mismo contexto, se propone a los niños crear baldosas de 4 lados que tienen uno, dos o cuatro ángulos rectos, utilizando pares de triángulos.

En la *cuarta clase*, se amplía el estudio de los cuadriláteros, considerando esta vez los paralelogramos. Aquí los niños aprenden a dibujar cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos, utilizando como recursos cintas con bordes paralelos y pares de triángulos iguales. Como resultado de las actividades propuestas en esta clase, se espera que construyan el importante teorema que establece que, cuando un cuadrilátero tiene los lados opuestos paralelos, también tiene sus lados opuestos de la misma medida. Recíprocamente, aquellos cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos de la misma medida, dichos lados son paralelos. Posteriormente, en el mismo contexto, se propone a los niños crear baldosas de 4 lados que tienen uno o dos pares de lados paralelos, utilizando pares de triángulos.

En la *quinta clase* se realiza una articulación del trabajo matemático realizado en las clases anteriores referido a la identificación y dibujo de cuadriláteros que cumplan con condiciones relativas a lados de la misma medida, lados perpendiculares y paralelos. Se espera que en esta clase se afiancen los aprendizajes trabajos en las clases anteriores. En la *sexta clase* se aplica una prueba de finalización de la unidad que permite conocer el nivel de logro de los aprendizajes esperados.

3. Aspectos esenciales del proceso de difusión de la propuesta: El modelo de formación docente basado en la experimentación y análisis de clases

El propósito de la *Estrategia LEM-Matemática* es contribuir, a través de un proceso progresivo, al fortalecimiento de las estrategias de enseñanza de los profesores de básica, proporcionándoles *principios didácticos* y *herramientas* para concebir y gestionar procesos de estudio matemáticos productivos y eficaces (Mineduc, 2004). Tal como señalamos anteriormente, los profesores tienen serias dificultades para ir más allá de una enseñanza centrada en la utilización mecánica de algoritmos, y que no considera una participación real del alumno en la construcción de conocimiento.

Para el logro de tal propósito, no basta con producir y poner a disposición de los profesores nuevo material previamente experimentado y con garantía de viabilidad. Es crucial *difundir* en la profesión docente los fundamentos que guían y permiten que se desarrolle una práctica docente efectiva, en particular que permiten adaptar los nuevos materiales según su criterio profesional a las necesidades de sus alumnos.

El modelo de formación continua elaborado para tal efecto se desarrolla en torno a las 20 Unidades Didácticas elaboradas, y considera cuatro etapas:

1º El **estudio del tema matemático** en el que se inscribe la unidad didáctica en cuestión, desde dos perspectivas. La primera es desde la perspectiva matemática, abordando su génesis a partir del estudio de problemas, su funcionalidad, interés, y su articulación con otras temáticas matemáticas y extramatemáticas. La segunda perspectiva es la didáctica en la que se estudia la lógica de construcción de la ingeniería didáctica, su relación con el currículo, condiciones para una adecuada gestión, principales dificultades de los profesores y estudiantes según la investigación en didáctica y, como un aspecto clave

para la escuela, estrategias para gestionar la evaluación y retroalimentación a los niños. Este **taller de estudio** es conducido por un profesor asesor-par[3] previamente formado para el efecto, que tiene a su cargo 3 escuelas. En cada taller participan los profesores de 1º a 4º básico y las educadoras de párvulos (5 años) de las tres escuelas (27 profesores en promedio).

2º La **puesta en práctica** de la unidad didáctica en las escuelas. Cada profesor, luego de haber estudiado la propuesta, implementa la unidad con sus niños, mientras es acompañado por el asesor en alguna de sus clases. El asesor observa minuciosamente y recoge el desempeño del profesor y de los niños; puede intervenir cuando el profesor lo solicite, o cuando lo requiera.

3º El **análisis de la experiencia vivida y retroalimentación** asociada. Se trata de un taller conducido por el asesor, en el que participan los profesores de las 3 escuelas. Se analiza los desempeños observados más frecuentes, determinando fortalezas y dificultades, sus consecuencias en términos de aprendizaje y, a la luz de las dificultades encontradas, se discuten y acuerdan estrategias para mejorar la gestión, y también para adaptar el material.

4º **Acompañamiento participativo** en aula, cuando **no se están implementando las unidades didácticas**. Se trata de que el asesor vaya monitoreando, a la vez que contribuyendo, al proceso de apropiación de la propuesta que permita a los profesores transferir los conocimientos que van logrando a la gestión de otros procesos de estudio correspondientes a temáticas del currículo de cada curso, y que no están desarrollados por la estrategia LEM. Este acompañamiento es realizado también por el profesor asesor.

Paralelamente a este proceso de formación de profesores de aula, el profesor asesor, llamado *profesor consultor* por la estrategia, es formado por la universidad responsable de la implementación de la estrategia en la región del país correspondiente. Este proceso de formación tiene las mismas cuatro etapas, pero son realizadas con mayor profundidad y con mayor detenimiento. Es decir, además de estudiar las unidades didácticas desde perspectivas más complejas, el profesor consultor es observado mientras realiza los talleres de estudio a profesores de las escuelas, para posteriormente discutir con él, de forma más personalizada sobre su particular desempeño.

La transformación de cualquier práctica humana, en particular la práctica de la enseñanza, es una tarea difícil de alcanzar. Tal como varias investigaciones han puesto de manifiesto, se trata de una práctica espontánea, simplemente vivida y no reflexionada en un ámbito de conocimiento específico (Barbe, *et al*., 2005). Muchos profesores no son conscientes de sus estrategias de enseñanza y, aunque comprenden los principios didácticos que ha aportado la Estrategia LEM, e incluso valoran especialmente su aporte y necesidad, tienen serias dificultades para incorporarlos a sus prácticas habituales. Se trata de un cambio de paradigma tremendamente profundo, que supone pasar de poner el énfasis en "pasar la materia", a promover que los niños actúen como "pequeños matemáticos de escuela". El punto que es especialmente complejo para los profesores tiene que ver con el papel que

[3] El profesor asesor-par es un profesor de básica que ha sido destacado en alguna de las iniciativas ministeriales para la asignación de estímulos: evaluación docente, red de maestros de maestros, excelencia académica, etc.

juega el estudio de problemas dentro del proceso: se trata del motor del estudio que provoca la emergencia de los conocimientos, y no la sola oportunidad para aplicar los conocimientos previamente "enseñados" por el profesor.

Hasta la fecha hemos identificado y caracterizado cuatro niveles o grados de apropiación de la propuesta: los profesores que simplemente *imitan* lo propuesto en las unidades didácticas, los que *incorporan* la propuesta a su práctica habitual pero sin modificaciones a la misma, los que *integran* la propuesta a su práctica habitual modificándola significativamente, y los que la *internalizan*.

4. Principales resultados

A continuación se presenta una síntesis de los principales resultados obtenidos en la experiencia de difusión y aplicación de la propuesta didáctica en las escuelas de la estrategia. En la primera parte de este apartado se describen los principales resultados de la *implementación* de la unidad didáctica en sala de clases y, en la segunda parte, los principales resultados de la *formación* ofrecida a los profesores para conducir el proceso de estudio correspondiente.

4.1. A nivel de la sala de clases y de los alumnos

La escritura de esta sección se realiza siguiendo la estructura de la Unidad Didáctica, es decir está organizada por clases y por momentos de la clase. En cada clase se describen las actividades de aprendizaje principales; sus propósitos particulares y su contribución a la construcción global planteada por la unidad didáctica, las hipótesis subyacentes; principales desempeños de los alumnos durante la implementación de la propuesta y resultados de aprendizaje; y la principales dificultades. Por razones de espacio, solo se detallan los resultados de las clases de la unidad en que el proceso de estudio presenta un avance importante.

4.1.1 Clase 1

La actividad principal de la primera clase de la unidad es clave para que los niños se encuentren con la necesidad de disponer de algún procedimiento que les permita determinar un cuadrilátero congruente a uno dado, cuando no disponen de instrumentos para medir ángulos, y cuando no es posible realizar esta determinación a través de la superposición de figuras. En estas mismas condiciones, los niños ya disponen del procedimiento que les permite determinar un triángulo congruente a otro dado, midiendo sus tres lados. Se trata de que niños y niñas construyan, a través de esta experiencia, un conocimiento geométrico esencial de los cuadriláteros, apoyándose en lo que ya saben sobre los triángulos.

Esta actividad constituye lo que en la estrategia hemos denominado el *momento de inicio* de esta primera clase. Posteriormente se desarrollan el *momento del desarrollo* y *cierre de la clase*. En el *desarrollo la clase* se cuestiona y trabaja los conocimientos que emergieron en el momento de inicio, hasta alcanzar un dominio razonable de los mismos y, en el cierre de la clase, se realiza la institucionalización de los elementos sustanciales de la construcción. En este artículo sólo nos referiremos a lo sucedido en relación al momento de inicio de la clase, por tratarse de la cuestión problemática de la clase y de la unidad.

Descripción de la Actividad de aprendizaje
La actividad consiste en reponer una baldosa que se ha caído en la pared. En un primer momento se presenta a los niños el dibujo de una pared embaldosada con cerámicas triangulares. Los niños deben identificar, entre un repertorio de baldosas triangulares, aquella que calza exactamente en la pared. Las condiciones para la realización de esta actividad descartan la superposición como estrategia de solución, ya que el embaldosado se encuentra en los asientos de los niños y el repertorio de cerámicas triangulares está en el escritorio del profesor. Los niños no pueden llevar el embaldosado con ellos al ir a buscar la baldosa que falta, tal como ocurriría si fueran a comprar la cerámica a una tienda, y tampoco pueden *calcarla* porque no disponen de papel para hacerlo. Por ello, están "obligados" a decidir qué información necesitan extraer del embaldosado para ir a seleccionar la cerámica correcta, y anotarla en una hoja.

Posteriormente, se presenta a los niños una pared embaldosada con cerámicas de forma cuadrilátera. Los niños deben igualmente determinar la cerámica que falta, realizando la actividad bajo las mismas condiciones anteriores. En el repertorio de cerámicas cuadriláteras hay varios ejemplares, pero todos ellos tienen lados de igual medida. Lo que varía es la forma, es decir sus ángulos.

Propósitos e hipótesis subyacentes
El *propósito* de estas dos actividades es que los niños reconozcan que no basta con medir los lados de un cuadrilátero para encontrar uno que sea idéntico a otro, y que experimenten la necesidad real de explorar y construir un nuevo procedimiento para encontrarlo. Se trata de que niñas y niños se encuentren con una cuestión problemática inicial y que, apoyándose en algunos conocimientos previos, puedan abordarla y construir un primer procedimiento para resolverla.
El orden en que se realizan estas actividades, primero la que plantea el trabajo con un embaldosado triangular y luego la que lo plantea con un embaldosado cuadrangular, tiene el propósito de que los niños comprendan que la información que permitió determinar un triángulo congruente a otro dado, no es suficiente para determinar un cuadrilátero congruente a otro dado.

Un propósito subsidiario consiste en que los niños comprendan que con cuatro medidas dadas se pueden producir infinitos cuadriláteros, mientras que con tres medidas dadas se puede construir un único triángulo –o infinitos triángulos pero congruentes entre sí–.

Hipótesis
El fracaso del procedimiento basado en la medida de los lados para determinar la cerámica cuadrilátera que falta, permite que sean los propios niños, sin la intervención del profesor, quienes reconozcan la insuficiencia de su procedimiento y busquen caminos alternativos. Asimismo, la eficacia del procedimiento basado en la medida de los lados para determinar la cerámica triangular, permite que los niños lo reutilicen para determinar la cerámica cuadrilátera, cuando reconocen al cuadrilátero como formado por dos triángulos yuxtapuestos. En este sentido, el trazado de una de las diagonales del cuadrilátero contribuye a que los niños realicen esta visualización.

Principales desempeños de los alumnos

Los *principales desempeños* de los alumnos para realizar y resolver las actividades son:

- La mayoría de los estudiantes determina correctamente la cerámica triangular midiendo sus tres lados. Al realizar la siguiente actividad y constatar que el procedimiento basado en la medida de los lados fracasa para determinar la cerámica cuadrilátera, viven una experiencia tremendamente removedora y significativa. ¡No lo puedo creer!, dicen la mayoría de los niños, atónitos frente al hallazgo que han obtenido.
- Cuando les fracasa el procedimiento basado en la medida de los lados para determinar la cerámica cuadrilátera, lo primero que hacen la mayoría de los niños es atribuir el problema a que midieron mal, y no a que les faltó información. Entonces realizan un nuevo intento, esta vez asegurándose de "medir bien".
- Luego de varios intentos tratando de "medir bien", solo algunos niños relacionan la tarea que están realizando con la que ya hicieron relativa a la determinación de la cerámica triangular. En este caso la mayoría de los niños mide, además de los cuatro lados de la cerámica, una de sus diagonales y resuelven correctamente la tarea.
- La mayoría de los alumnos se queda detenido durante un tiempo explorando la situación para construir un procedimiento y, en vez de terminar este momento con una respuesta, acaban con una importante pregunta.
- Algunos niños escogieron acertadamente la cerámica por azar, pero simplemente midiendo los lados de la cerámica. En este caso fue muy importante la discusión con los otros grupos puesto que pudieron valorar que todas las cerámicas tenían las mismas medidas en sus lados y, sin embargo, solo servía una, la que tenía a su vez la misma forma.

Principales dificultades

La principal dificultad que se observó en los niños mientras resolvían el problema fue abandonar una idea que les sirvió para resolver correctamente un problema que, a su criterio, es del mismo tipo. Fuertes resistencias, aunque la evidencia se imponía mostrando su inadecuación. Esta dificultad es, al mismo tiempo, la gran fortaleza de la actividad. De hecho, esa resistencia inicial se convierte posteriormente, una vez que han encontrado un procedimiento para determinar la cerámica buscada, en el suceso que le da más relevancia y notoriedad al hallazgo.

Los principales *obstáculos* de los niños para estudiar y encontrar una respuesta satisfactoria al problema surgen por lo general de gestiones inadecuadas del profesor. En varios casos no cautelaron suficientemente las condiciones para la realización de la tarea:

- ya sea permitiendo que los niños llevaran el embaldosado al lugar en que estaba el repertorio de cerámicas.
- ya sea entregando al mismo tiempo a los niños en sus asientos el repertorio de cerámicas y el embaldosado.
- o bien proporcionándoles un repertorio de cerámicas cuadriláteras constituido por una cantidad reducida de cuadriláteros, en que además la diferencia entre unos y otros era evidente.

En el primer y segundo caso, los niños resolvieron la tarea tras ir superponiendo las distintas cerámicas del repertorio en el espacio de la cerámica faltante hasta llegar a la correcta. Este proceder funciona sin tener que recurrir a algún conocimiento propiamente geométrico. En el último caso, cuando la cantidad de cuadriláteros en el repertorio es

reducida y la diferencia entre ellos es evidente, los niños podían determinar la cerámica por simple percepción visual.

También hay restricciones materiales para realizar la actividad y que no fueron suficientemente tratadas en el taller de estudio. En efecto, al trabajar con la estructura de bombillas para descubrir una forma de determinar un cuadrilátero, algunos niños dibujaron las figuras considerando la parte exterior de la estructura de bombillas, mientras que otros niños lo hicieron marcando la parte interior. Este hecho dificultó que los niños pudieran comprobar materialmente que, si se dibujan cuadriláteros que tienen las medidas de los lados iguales sin considerar más información, se obtienen cuadriláteros distintos.

Causas que podrían explicar las dificultades, y sus consecuencias

Tal como describimos anteriormente, las principales dificultades de los alumnos para resolver correctamente la tarea se derivan, por lo general, de gestiones inadecuadas de los profesores. Al profundizar en el por qué de estas gestiones hemos detectado que, además de la escasa formación matemática, especialmente en geometría, que tienen la mayoría de los profesores de básica, también hemos identificado ciertas dificultades derivadas del tipo de estudio que se realizó con los profesores antes de la implementación de esta unidad didáctica.

Ha sido difícil para los profesores de aula internalizar la necesidad de que en esta actividad los niños no puedan disponer al mismo tiempo del embaldosado y del repertorio de cerámicas. Pese a que en el taller de estudio todos los profesores experimentaron como "estudiantes" la necesidad de que así fuera, cuando tenían que gestionar la actividad en aula, no resguardaban esta condición esencial. Al parecer, a los profesores, en situación de enseñanza concreta, les resulta más importante que las situaciones de enseñanza sean atractivas y cercanas para los niños, que el contenido mismo de la actividad. En este caso se observó que muchos profesores "simulaban" el embaldosado colocándolo en la pizarra, quedando inevitablemente muy cercano del repertorio de cerámicas que debía estar, según el plan de clases, en el escritorio del profesor.

Para estudiar cada Unidad Didáctica, el programa de formación contempla dos talleres. El primero tiene por objetivo que los profesores vivan la experiencia matemática necesaria para valorar la contribución de la actividad en términos de aprendizaje. Aquí los profesores viven la problematización y resuelven la tarea como estudiantes de la matemática. Luego de esta experiencia se realiza una discusión sobre las distintas respuestas, sus similitudes y diferencias, y sobre las justificaciones subyacentes. En el segundo taller se realiza el estudio propiamente tal de la Unidad, reconociendo el propósito que persigue cada actividad planteada, la lógica de progreso seguida en la secuencia clase a clase, los procedimientos que se espera que los niños construyan, y las condiciones para una gestión adecuada. Cuando la problematización ha sido realizada tomando el problema principal de la unidad, suele darse por sentado que los profesores ya han reconocido el propósito de la actividad, la importancia de la consigna y, quizá por ello, no se retoma suficientemente para precisar las condiciones necesarias para una buena gestión.

El aspecto sobre la variabilidad necesaria de cerámicas en el repertorio, no fue suficientemente tratado con los profesores en el programa de formación. Más precisamente,

se trabajó con los profesores la necesidad de que en el repertorio hubiese gran cantidad de cerámicas, pero no la forma que debían tener. Muchos profesores observados agregaron varias cerámicas cuadriláteras al repertorio pero del mismo tipo, o bien, cuadriláteros que ha simple percepción visual no correspondían a la baldosa requerida.

4.1.2 Clase 2

Descripción de la Actividad de aprendizaje

La actividad se plantea, al igual que en la clase anterior, en el contexto de reponer una baldosa que se ha desprendido de la pared; esta baldosa tiene forma de cuadrilátero y los niños deberán "producirla o crearla" para reponerla. El embaldosado debe estar distante de las mesas de trabajo de los niños –por ejemplo en la pizarra o una pared de la sala de clases-, quienes cuentan con una estructura de bombillas con las mismas dimensiones de la baldosa que deben reponer, hojas blancas y tijeras. Cada grupo debe fabricar la baldosa que se ha desprendido de la pared y para ello usarán la estructura de bombillas. Tendrán solo una oportunidad para acercarse al embaldosado y recoger la información necesaria; pueden llevar regla, papel, lápiz, pero no pueden llevar hasta el embaldosado la estructura con bombillas. Los niños deberán discutir en el grupo previamente qué información es la que necesitan para producir el cuadrilátero, ya que no podrán, dentro de un intento, volver a recoger más información. Una vez terminada la producción, el profesor pasará a cada grupo el embaldosado para que verifiquen si la baldosa que ellos produjeron es la que falta.

Propósitos e hipótesis subyacentes

Con esta actividad se espera que los niños reafirmen los conocimientos adquiridos en la clase anterior. Para producir la baldosa que falta, ellos usarán la estructura de bombillas que tiene *las mismas dimensiones que la baldosa*. Es necesario entonces, que ellos hagan rígida la estructura de bombillas usando un trozo de bombilla que tenga la misma medida de una de las diagonales del cuadrilátero que deben producir. Es decir, se espera que los niños evoquen los conocimientos adquiridos en la clase anterior y al discutir sobre qué información deben recoger del embaldosado consideren medir, además de los lados del cuadrilátero, una de sus diagonales. Para cumplir con este propósito cada grupo debe contar con una estructura de bombillas con las mismas medidas de los lados del cuadrilátero que deben producir. Se debe considerar además, que el embaldosado y la estructura de bombillas no deben estar disponibles para los niños simultáneamente.

Hipótesis 1

Los niños que vivieron la experiencia de la clase anterior, estarán en mejores condiciones que los niños que no vivieron la experiencia de la clase 1 para resolver correctamente el problema planteado.

Hipótesis 2

Con la realización de las actividades de las clases 1 y 2, *los niños construyen* de forma significativa una propiedad fundamental de los cuadriláteros que es su no rigidez, que resulta esencial para reponer la baldosa que falta.

Principales desempeños de los alumnos

Frente a la tarea de producir la cerámica, los niños se entusiasman y discuten para ponerse de acuerdo quién ira y qué información recogerá cuando tenga la oportunidad de acceder al embaldosado. Hemos observados 4 tipos de desempeños:

- Los niños miden solo los lados del cuadrilátero al recoger la información. En sus mesas de trabajo dibujan dicho cuadrilátero usando la estructura de bombillas, lo recortan y al sobreponerlo sobre el embaldosado se dan cuenta que no calza.
- Los niños miden ambas diagonales, considerando sólo estas medidas –y no considerando además las medidas de los lados-. En sus mesas de trabajo dibujan ambos trazos de manera que se cortan en un punto arbitrario; entonces se dan cuenta que, cuando no cuentan con la estructura de bombillas, esta información es insuficiente.
- Los niños miden ambas diagonales y los lados del cuadrilátero. Luego miden los lados de la estructura de bombillas y se dan cuenta que tiene los lados de igual medida que los lados del cuadrilátero que deben producir. Con ello, usan la estructura de la siguiente manera: toman una regla y un niño marca sobre ésta con los dedos la medida de una de las diagonales, otro niño va moviendo la estructura de bombillas sobre la regla hasta hacer coincidir dos vértices de la estructura con dichas marcas, un tercer niño dibuja el cuadrilátero.
- Los niños dibujan un trazo que tiene la medida de unas de las diagonales, y luego sobre este trazo comienzan a mover la estructura hasta hacer coincidir los extremos del trazo con dos vértices opuestos de la estructura y así dibujar el cuadrilátero.

En muchos casos, los profesores dieron correctamente las instrucciones iniciales, esta vez cuidando que el embaldosado estuviera distante de las mesas de trabajo de los niños. Sin embargo, observamos algunos casos en que los profesores no pusieron disponibles en las mesas de trabajo estructuras de bombillas y, en otros, que sí pusieron estructuras de bombillas pero que no tenían las mismas dimensiones que la baldosa que debían producir.

Causas que podrían explicar las dificultades, y sus consecuencias

En el cierre de la primera clase generalmente se da énfasis al hecho que para determinar un cuadrilátero idéntico a uno dado es necesario conocer la medida de la diagonal, dejando en segundo lugar, y muchas veces no considerando, la necesidad de conocer además la medida de los lados. Esta idea queda tan arraigada por el tipo de experiencia vivida, que en la mayoría de los casos los niños solo miden la diagonal para producir el cuadrilátero pedido, incluso en muchos casos miden las dos diagonales y nada más.

Otra situación que podría explicar parte de las dificultades observadas es que la mayoría de los profesores desconoce que no es posible construir un cuadrilátero, dados las medidas de sus lados, la medida de una diagonal y su ubicación, *solo usando regla*. En este caso es necesario además contar con compás para hacer la construcción; de lo contrario habría que, por ensayo y error, ir dibujando los trazos hasta que se intersecten en sus extremos. En la actividad de producción de la cerámica que deben resolver los niños, la estructura de bombillas suple la necesidad de usar compás ya que las medidas vienen dadas en la estructura y es posible adaptar su forma por la flexibilidad del material. Sin esta estructura y solo con las medidas de los lados y la diagonal, no es posible producir la cerámica faltante. El desconocimiento de los profesores sobre la necesidad de que los niños dispongan de algún recurso además de la regla para producir el cuadrilátero induce,

implícitamente, que ellos no pongan a disposición de los niños las estructuras de bombillas para hacer sus producciones.

Se deduce entonces la importancia de que los profesores, además de vivir y experimentar la situación fundamental de reposición de la baldosa que aparece en la clase 1, vivan la experiencia de producir un cuadrilátero y establezcan qué instrumentos geométricos son necesarios para realizar esta construcción, deduciendo que ésta se hace a partir de la construcción de dos triángulos que tienen un lado común, la diagonal del cuadrilátero.

Momento de Desarrollo

Descripción de la Actividad de aprendizaje

Continuando con el contexto de una cerámica que se ha caído de la pared, se plantea a los niños ahora la tarea de *producir* la cerámica que falta utilizando un par de triángulos de un repertorio de triángulos que tienen a su disposición. Este repertorio está compuesto por 6 pares distintos de triángulos congruentes, entre los cuales se distinguen equiláteros, isósceles, isósceles rectángulos y escalenos rectángulos. Los lados de los triángulos tienen medidas enteras y entre uno y otro tipo de triángulo siempre tienen al menos un lado de igual medida (para que puedan yuxtaponerse). La actividad contempla dos embaldosados cuadriláteros distintos que se encuentran distantes de las mesas de trabajo de los niños. Para cada embaldosado, los niños deben elegir 2 triángulos para dibujar el cuadrilátero que corresponde a la baldosa que deben reponer. Para determinar el par de triángulos que les sirve pueden ir una vez hasta los embaldosados y recoger la información necesaria para su producción. Pueden llevar regla y un papel donde anotar los datos que consideren suficientes; sin embargo no pueden llevar el repertorio de triángulos de papel hasta el embaldosado, ni tampoco pueden calcarlo. Una vez realizada la producción de la cerámica los niños la recortan y luego el profesor les entrega los embaldosados para que puedan verificar si su producción corresponde a la cerámica que faltaba.

Una de las cerámicas que deben reponer corresponde a un cuadrilátero que tiene sus 4 lados de igual medida, la otra corresponde a un cuadrilátero que tiene dos pares de lados de igual medida. Aún sin mencionar que estas figuras corresponden a un paralelogramo, se espera que los niños tengan un primer encuentro con este tipo de cuadriláteros y que deduzcan que para dibujarlos fue necesario utilizar dos triángulos congruentes. El estudio de los paralelogramos se abordará más tarde en la clase 4.

Para profundizar en la formación de cuadriláteros a través de un par de triángulos con ciertas condiciones, en una ficha de trabajo posterior pero dentro de este momento, se les pide formar todos los cuadriláteros posibles usando dos triángulos de los tipos A y B. El triángulo tipo A es un triángulo equilátero de lado 4 cm, el triángulo tipo B es un triángulo isósceles de base 5 cm y lados 4 cm. Luego de formar todos los cuadriláteros posibles se les pide clasificarlos según la cantidad de lados de igual medida: un par, tres lados, dos pares y cuatro lados.

Propósito e hipótesis subyacentes

El propósito de esta actividad es profundizar en el estudio de los cuadriláteros estableciendo que *al trazar una de sus diagonales* éste queda determinado por *dos*

triángulos y, recíprocamente, que al yuxtaponer dos triángulos que tienen como mínimo un lado de igual medida, se obtiene un cuadrilátero que tiene por diagonal uno de los lados de los triángulos de igual medida. Para ello deben producir cuadriláteros determinados, por la yuxtaposición de dos triángulos que deben escoger de un repertorio y, también, explorar a través de la yuxtaposición de distintos triángulos los cuadriláteros que se forman y determinar sus características en función de la cantidad de lados de igual medida que tengan.

Hipótesis
Los niños que comprendieron el por qué al considerar una de las diagonales del cuadrilátero éste queda bien determinado, podrán inferir cómo seleccionar el par de triángulos que les sirve para producir el cuadrilátero requerido. En efecto, la diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos (triangulación), los que quedan determinados sólo con la medida de sus lados.

Principales desempeños de los alumnos
Frente a la tarea de producir las baldosas que se han caído de la pared, los niños se ponen de acuerdo sobre el representante del grupo que irá a recopilar la información cuando tengan la oportunidad de acceder a los embaldosados, y posteriormente en grupo tratan de producir los cuadriláteros correspondientes, observándose los siguientes procedimientos:

- En el caso de la cerámica con forma de rectángulo, los niños toman sólo la medida de los lados y con esta información tratan de producir la cerámica utilizando una regla. La estrategia funciona puesto que saben construir ángulos rectos apoyándose en una escuadra. Para la segunda cerámica que corresponde a un romboide, miden los lados del cuadrilátero y las diagonales; sin embargo para producir la cerámica, al igual que en el caso del rectángulo, tratan de dibujar el romboide usando sólo regla, fracasando en la mayoría de los casos.
- Algunos niños en ambos embaldosados toman la medida de los lados y las diagonales de la cerámica faltante; sin embargo, para producir estos cuadriláteros comienzan a unir pares de triángulos congruentes sin verificar si los lados de estos triángulos coinciden con las medidas que ellos recopilaron. Este proceder por ensayo y error se repite hasta que visualmente creen haber obtenido el cuadrilátero correspondiente. Para asegurarse que formaron el cuadrilátero correcto, verifican si las medidas que ellos tomaron coinciden. Este tipo de procedimiento requirió que los niños ocuparan gran parte del tiempo de la clase en esta tarea.

Al hacer el *cierre* de esta actividad la mayoría de los profesores observados formuló a los niños solo algunas de las preguntas que aparecen sugeridas en el plan de esta clase. La más recurrente fue: ¿qué triángulos usaron para producir los cuadriláteros que correspondían a las baldosas que faltaban en los embaldosados? Recogieron algunas respuestas de los niños y concluyeron la actividad sin mayores discusiones sobre el por qué escogieron esos triángulos y no otros. No se establecieron las características de los triángulos utilizados y, tampoco se destacó el hecho más relevante de cara a uno de los propósitos de la actividad y que se relaciona con la congruencia de los triángulos. Asimismo, no se relacionó esta actividad con la anterior y tampoco se les hizo otras preguntas a los niños, sobre cómo seleccionaron los triángulos, o en qué se fijaron para unir los lados de los triángulos.

Causas que podrían explicar las dificultades y sus consecuencias
Algunos niños tenían una familiarización tal con figuras como los rectángulos que, frente a la tarea de producirlos, consideraban que no era necesario medir la diagonal. Para ellos estas figuras tienen una forma bien definida y, a diferencia de los cuadriláteros, *"no se desforman"*. Este procedimiento basado exclusivamente en la medida de los lados y la utilización de regla funciona para producir rectángulos, pero no para producir romboides. Los niños que utilizaron este procedimiento en el primer caso, lo vuelven a usar para producir el romboide, lo que los hace fracasar en la tarea.

La tarea de producir cuadriláteros con determinadas condiciones usando un par de triángulos, resultó difícil para los niños; por ello se demoraron en realizarla y requirieron en muchos casos más de una oportunidad para recoger información. A pesar de que los niños tomaban las medidas de los lados y de las diagonales de los cuadriláteros que debían producir, no utilizaban estas medidas para seleccionar los pares de triángulos adecuados. Esta selección la realizaban más bien por ensayo y error, esto es, iban uniendo pares de triángulos y formando diferentes cuadriláteros, hasta que visualmente creían haber formado el correcto. Al final utilizaban las medidas que tomaron del cuadrilátero sólo para verificar si correspondía al cuadrilátero pedido.

Clase 3
La clase se inicia con una actividad cuyo propósito es afianzar los conocimientos matemáticos aprendidos en la clase anterior. Para ello el profesor propone a los niños una actividad en que deben dibujar un cuadrilátero idéntico a otro que tiene cierta cantidad de lados congruentes. La producción del cuadrilátero se hará utilizando el repertorio de triángulos usado en la clase anterior (6 pares de triángulos congruentes entre equiláteros, isósceles, rectángulos escalenos y rectángulos isósceles, entre los cuales tienen al menos un lado de igual medida). El profesor entrega a cada niño un par de triángulos del repertorio, y pide que dibujen un cuadrilátero que tenga cierta cantidad de lados de la misma medida, por ejemplo, un cuadrilátero que tenga dos lados congruentes.

Momento de desarrollo
Para este momento se plantean dos actividades; la primera está en el contexto de la reposición de una cerámica que se ha caído de la pared y es la actividad que desarrollaremos a continuación. En la segunda actividad se propone a los niños producir todos los cuadriláteros posibles con dos pares de triángulos congruentes del repertorio mencionado anteriormente, y luego clasificarlos según la cantidad de ángulos rectos que tengan.

Descripción de la actividad
La actividad se presenta en el contexto de la reposición de una cerámica que se ha caído de la pared. Las baldosas que deben reponer esta vez, son de forma cuadrilátera y tienen cierta cantidad de ángulos rectos. La primera cerámica corresponde a un rectángulo, sus cuatro ángulos son rectos, y la segunda es un cuadrilátero que tiene un ángulo recto. Los niños están organizados en grupos pequeños, cada grupo cuenta **sólo con una ficha de trabajo** que por una parte de la hoja presenta dos embaldosados a los que le falta una baldosa, y por el reverso aparecen 6 cuadriláteros diferentes, identificados con una letra, de los cuales

deben seleccionar aquellos que corresponden a las cerámicas que se han caído de los embaldosados. Esta estructura de la ficha no permite que los niños dispongan simultáneamente de los embaldosados y el repertorio de cerámicas. Esta variable didáctica, que en clases anteriores dependía de la gestión del profesor, en esta actividad aparece controlada por la propia ficha de trabajo. Para seleccionar la cerámica faltante, los niños cuentan con escuadra, y para señalar cuáles son los cuadriláteros seleccionados, los niños deben escribir la letra del cuadrilátero que elijan en un recuadro que aparece al lado de cada embaldosado. Una vez realizada la elección el profesor entregará a cada grupo una ficha recortable que contiene los mismos cuadriláteros que aparecen al reverso de la ficha inicial, así los niños podrán recortar las cerámicas seleccionadas y a través de la superposición de estos cuadriláteros sobre los embaldosados verificar si su elección ha sido correcta.

Propósito e hipótesis subyacentes

Esta actividad tiene como propósito que los niños analicen y determinen cómo influye que un cuadrilátero tenga ángulos rectos cuando se debe identificar uno idéntico a otro. Se espera que los niños establezcan que para identificar un rectángulo idéntico a otro basta considerar la medida de sus lados, específicamente, la medida de dos lados, y para identificar un cuadrilátero idéntico a otro que tiene un ángulo recto basta considerar la medida de sus lados y verificar que el ángulo recto esté entre los mismos pares de lados.

Hipótesis 1

A medida que los cuadriláteros que hay que reponer en el embaldosado van presentando *más* cantidad de atributos o condiciones, los niños requieren tomar *menos* información de la baldosa faltante para identificarlo o producirlo.

Hipótesis 2

Los niños que comprendieron que para identificar un cuadrilátero idéntico a otro la medida de la diagonal nos asegura la unicidad al “rigidizar” la figura, podrán establecer que esta información no es necesaria cuando el cuadrilátero tiene sus cuatro ángulos rectos.

Principales desempeños de los alumnos

Frente a la tarea de identificar un cuadrilátero idéntico a otro que tiene sus cuatro ángulos rectos, o que tiene un ángulo recto, se observaron los siguientes procedimientos:

- Para reponer la cerámica del primer embaldosado, que corresponde a un rectángulo, los niños miden sólo los cuatro lados del cuadrilátero, no considerando esta vez la medida de la diagonal. Frente a la tarea de reponer la cerámica del segundo embaldosado, que tiene un ángulo recto, los niños miden los cuatro lados del cuadrilátero y las diagonales.
- Para reponer la cerámica de ambos embaldosados los niños usan sólo percepción visual, esto es, observan muy bien los embaldosados, luego dan vuelta la ficha de trabajo y observan el repertorio de cerámicas para identificar cual es la que falta, realizan este procedimiento varias veces hasta tener la seguridad de estar eligiendo correctamente. Con el primer embaldosado este procedimiento resulta eficaz, ya que en el repertorio de cerámicas solo aparece una que tiene forma de rectángulo, sin embargo para seleccionar la cerámica del segundo embaldosado deben realizar más intentos y en muchos casos no logran seleccionar la cerámica correcta.

En general los profesores no tienen dificultades para gestionar esta actividad, dan las instrucciones correctamente y entregan en los tiempos establecidos la ficha de trabajo y luego la ficha recortable que contiene el repertorio de cerámicas. Sin embargo se observaron algunas clases en que los docentes entregaron la ficha de trabajo y el repertorio de cerámicas recortable simultáneamente, lo que provocó que los niños realizaran la tarea a través de la superposición de las figuras. En otros casos se repartió más de una ficha de trabajo en cada grupo, generando, al igual que en el caso anterior, que los niños realizaran la tarea superponiendo las cerámicas en los embaldosados.

Razones que podrían explicar estas dificultades y posibles modificaciones

Cuando los niños deben identificar la cerámica que corresponde a un rectángulo, miden sólo los lados de este cuadrilátero, ya que para ellos es una figura familiar que han estudiado en cursos anteriores, para muchos de ellos esta figura no es un cuadrilátero ya que cuando la han estudiado se la han presentado como un "*rectángulo*" sin establecer que esta figura tiene cuatro lados y por lo tanto es también un cuadrilátero. En muchos casos es esta idea la que lleva a los niños a establecer que frente a la tarea de identificar esta figura, no es necesario considerar más datos que la medida de sus lados.

El repertorio de cerámicas que aparece al reverso de la ficha está compuesto sólo por 6 cuadriláteros, de los cuales sólo uno corresponde a un rectángulo, esto lleva a que los niños resuelvan la tarea sólo usando percepción visual y no consideren necesario tomar ninguna medida. Es necesario entonces aumentar el número de cuadriláteros que aparece al reverso de la ficha, incluyendo rectángulos con diferentes medidas; esto obligará a los niños a tomar decisiones sobre cuál será la información necesaria para seleccionar la cerámica correcta. Asimismo, será importante agregar como condición para la gestión de esta actividad que los niños pueden hacer a lo más dos intentos. De esta forma se resguardará que los niños no resuelvan la tarea por ensayo y error.

Las deficiencias observadas en la gestión realizada por algunos profesores, se debe básicamente al desconocimiento de la planificación de la clase. Para mejorar esta situación es necesario que cuando se realice el taller de estudio de esta unidad, se destaque la importancia de las condiciones de realización de cada actividad y las consecuencias que puede traer para el aprendizaje de los niños el que estas sean transgredidas.

En el *momento de cierre* los profesores no destacaron suficientemente que el procedimiento usado en clases anteriores par identificar un cuadrilátero idéntico a otro dado, en esta clase no es el óptimo. Por las características de los cuadriláteros de las clases anteriores, para hacer la identificación fue necesario medir los lados del cuadrilátero y una de sus diagonales. Sin embargo, cuando el cuadrilátero tiene uno o más ángulos rectos como en esta clase, basta con medir los lados del cuadrilátero y verificar que el ángulo recto se encuentre entre los mismos lados.

Resultados de aprendizajes de los estudiantes en la Unidad Didáctica

La aplicación de la prueba al final del proceso mostró a los 200 alumnos de estas escuelas,

4.2. Resultados a nivel de la difusión de la propuesta entre los profesores participantes

Gran parte de los desempeños logrados por los profesores en el estudio e implementación de la propuesta didáctica ya han sido comentados en apartados anteriores. Presentamos aquí una síntesis de los aspectos más relevantes de cara a las necesarias modificaciones que habrá que incluir en los talleres de estudio con los profesores consultores y con los profesores de las escuelas de la estrategia.

- La mayoría de los profesores no ve la diferencia entre determinar/identificar un cuadrilátero congruente a uno dado, y construirlo. Frente a la tarea de construir un cuadrilátero dado, construyen primero un cuadrilátero con las longitudes del cuadrilátero dado, y luego tratan de hacer calzar en él una de las diagonales. Creemos que esta dificultad está ligada al gran impacto que sufrieron *todos* los profesores al comprobar que con la medida de los lados no era suficiente para identificar el cuadrilátero pedido. A partir de esta experiencia surgió, como una de las estrategias *suficientes* para determinarlo, medir una de sus diagonales. Muy probablemente este conocimiento quedó como algo determinante en sí mismo, sin reconocer que funciona cuando hay además otros datos. Es probable también que la idea que con la medida de las diagonales es suficiente para determinar un cuadrilátero, provenga del cierre de la primera clase, cuando es entendido fuera del contexto de la actividad de la cual procede.
- La mayoría de los profesores comprendió la necesidad de que en el repertorio de cuadriláteros, entre los cuales los niños tenían que determinar aquél que resolvía el problema de la cerámica faltante, hubiese una cantidad razonable de cuadriláteros para evitar que la elección fuera realizada por simple percepción visual. Por ello, muchos profesores incorporaron varias cerámicas cuadriláteras al repertorio. Sin embargo, estas cerámicas eran por lo general evidentemente distintas a la faltante, por lo que de igual forma el problema podía ser resuelto por percepción visual. O bien, repetían el mismo repertorio varias veces, con lo cual aumentaba la probabilidad de que por azar escogieran la cerámica correcta. Este aspecto no fue suficientemente tratado en los talleres de estudio con los profesores, probablemente por darlo por sentado.
- Tampoco distinguen los dos triángulos que se forman en el cuadrilátero al trazar una de sus diagonales (triangulación), por lo que no relacionan que la *rigidez de los triángulos* podría constituirse en una herramienta potente para resolver la tarea de determinación y construcción de cuadriláteros.
- Otra dificultad, bastante generalizada entre los profesores, tiene relación con la predominancia de ciertos criterios pedagógicos, por sobre criterios didácticos, para organizar las clases. En muchos casos, con el propósito de hacer la actividad "lo más real y cercana posible" a los estudiantes, los profesores pegaron en el pizarrón, o en la pared frontal de la sala de clases, el embaldosado con la cerámica faltante para dar el mayor realismo posible. De esta forma, los niños, al tener disponible el repertorio de cerámicas muy cercano a dicha pared –el repertorio estaba en el escritorio del profesor–, podían ir desechando las cerámicas en función de lo parecidas que fueran con la faltante. Vemos aquí cómo la gestión de un criterio de carácter pedagógico por parte de los profesores puso en riesgo vital un criterio de carácter didáctico.
- La mayoría de los profesores presentan serias dificultades para gestionar el *momento de cierre de la clase*. Aunque en los planes de clases aparecen sugeridas el tipo de

preguntas convenientes de realizar a los niños para que, a partir de sus respuestas, el profesor institucionalice los conocimientos esenciales, y aunque en la estrategia didáctica aparece descrito el propósito e ideas principales de este momento, los profesores centran su gestión en cuestiones de carácter formales del tipo: qué hicimos hoy día, cómo lo resolvieron, qué aprendimos, sin realizar un análisis de lo que los niños contestan para poder determinar la validez, economía, adecuación, etc. de lo que contestan y su relación con otras respuestas. Algo así como si lo que se tuviese que hacer son las "preguntas de rigor", para que los niños contesten lo que les parece y así quedar con la sensación de haber realizado una construcción colectiva de conocimiento. Esta preocupante dificultad tiene que ver, a nuestro parecer, con los grados de apropiación que tienen los profesores de la propuesta didáctica, muy en particular de sus aspectos matemáticos centrales y de los propósitos perseguidos con cada actividad. Las pruebas y seguimientos que hemos realizado a los profesores, muestran que la mayoría de ellos se encuentra entre los que *imitan* y los que *incorporan*. Un pequeño porcentaje está recién entre los que *integran*. Es necesario mencionar que la estrategia lleva solo un año de implementación en cada escuela.

A propósito de estas dificultades hemos planificado trabajar la diferencia entre determinar y producir un cuadrilátero, construyendo cuadriláteros con regla y compás. De esta forma valorarán además la importancia de concebir el cuadrilátero como formado por dos triángulos. Asimismo, hemos considerado necesario que los profesores avancen hacia elaborar/adaptar situaciones de aprendizajes que apunten al logro de ciertos aprendizajes nucleares, que respeten los principios didácticos difundidos por la estrategia.

A modo de conclusión

¿Qué ha hecho la Estrategia LEM en estos años y qué ha logrado? Son interrogantes que las autoridades políticas del ámbito educativo del país nos han planteado, y que tienen que ver con la gran demanda de la sociedad porque mejoren los resultados de aprendizaje de los niños en matemática. Al respecto podemos decir que el recorrido que hemos seguido hasta el momento nos muestra que vamos en la dirección correcta. Profesores reflexionando sobre sus prácticas con criterios fundados científicamente, a partir del estudio matemático-didáctico pero también de la experiencia de implementación vivida, e incorporando, aunque de forma incipiente, algunos principios didácticos a sus prácticas habituales, son indicadores que prometen importantes avances, sustentables en el tiempo. Niños motivados por estudiar matemáticas, que levantan hipótesis y construyen estrategias para resolver problemas, que las comparan con las de sus compañeros para encontrar las más efectivas, las someten de forma natural a un proceso de validación y justificación, que formulan preguntas y que comienzan a mostrar buenos resultados de aprendizaje, son muestras que potencian los indicadores de progreso antes señalados, ya que son sus naturales consecuencias. Escuelas que aprenden a poner la gestión institucional al servicio de una mejor gestión curricular, es ya un claro indicador de progreso.

Es claro que cuando de transformaciones a una práctica se trata, habrá que prepararse para un tiempo de transición en el que predominen más bien las incertezas, el desconcierto e incluso niveles de logros de aprendizaje inestables por parte de los estudiantes. Se requiere entonces de la suficiente paciencia científica y política para dejar que los frutos se desarrollen y estabilicen en el tiempo.

Agradecemos el aporte económico recibido para realizar esta investigación a través del proyecto FONDECYT Nº 1050234, financiado por el Gobierno de Chile, y del Ministerio de Educación de Chile para realizar la Estrategia LEM en el subsector de Matemáticas.

Referencias Bibliográficas

Barbe, J.; Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2005), Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The case of Limits of Function in Spanish High Schools, *Educational Studies in Mathematics*, 59, pp. 235-268.

Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003), El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de praxeologías didácticas docentes espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, nº1, pp. 79-136.

Brousseau, G. (1983), Les obstacles epistémologiques et les problèmes en didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986), Fundamentos y métodos de didáctica de la matemática, *Publicaciones del Seminario García de Galdeano*, Universidad de Zaragoza. (Traducción de Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), Grenoble : La Pensée Sauvage).

Chamorro, C., (2003), Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen, en Chamorro, C. (coord.): Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Pearson Prentice Hall, España.

Chevallard, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactiques des Mathématiques, 19/2, 221-265.

Espinoza, L., Barbé, J., (2004), La Matemática en la Educación Básica y Media: Un análisis de discontinuidades entre ambos niveles educativos, *Revista Chilena de Educación Matemática*, 1, pp.77-90.

Espinoza, L.; González, E.; Mitrovich, D. (2006), *Los Cuadriláteros*, Ministerio de Educación, República de Chile.

Ministerio de Educación, (2004), *Estrategia para el mejoramiento de la Lectura, Escritura y Matemática, en el 2º Nivel de Transición y Primer Ciclo Básico*.

OCDE, (2004), Revisión de políticas nacionales de educación, Chile. Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), Paris.

Vecino, F., (2003), Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria, en Chamorro, C. (coord.): Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Pearson Prentice Hall, España.