CONDITIONS DE DIFFUSION DE LA TAD DANS LE CONTINENT DIDACTIQUE
LES TECHNIQUES D'ANALYSE DE PRAXÉOLOGIES
COMME PIERRE DE TOUCHE

Michèle Artaud, Université de Provence – IUFM

Résumé

L'objet de ce texte est de mettre en lumière quelques phénomènes de diffusion de la TAD en utilisant, comme révélateur, des techniques d'analyse de praxéologies.

Nous établissons notamment les deux assertions suivantes :

– un rapport au moins partiellement structurel à la TAD conduit à un découpage en types de tâches trop fragmentaire, menant ainsi à des organisations mathématiques insuffisamment articulées qui prennent peu en charge les fonctions des mathématiques à enseigner ;

– l'absence de prise en considération, dans les analyses, du paramétrage institutionnel et des moments de l'étude gène la mise en évidence de phénomènes didactiques.

Abstract

The purpose of this article is to show that certain techniques used in the analysis of praxeologies allows us to reveal some relevant phenomena in the diffusion of TAD.

We conclude that:

– an (even partial) structural relationship to TAD leads to an excessive fragmentation of tasks. These involve insufficiently articulated mathematical organisations which do not require the use of the mathematical functions to be taught

– to reveal some of the relevant didactic phenomena we must analyse both the institutional context and the mathematical functions brought into play by the succession of tasks the teacher presents to the students.

Resumen

El objeto de este texto es poner de relieve algunos fenómenos de difusión de la TAD utilizando como revelador ciertas técnicas de análisis de las praxeologías.

Establecemos particularmente las aserciones siguientes:

– Una relación por lo menos parcialmente estructural a la TAD conduce a un recorte demasiado fragmentario en cuanto a los tipos de tareas, lo que desemboca en organizaciones matemáticas con falta de articulación y que no toman suficientemente en cuenta las funciones de las matemáticas que hay que enseñar.

– La falta de consideración en los análisis, del parametraje institucional y de los momentos de estudio impide poner en evidencia los fenómenos didácticos.

Préambule : L'objet de ce travail est de mettre en évidence certains phénomènes de diffusion qui limitent, nous semble-t-il, l'utilisation de la TAD et, par suite, la production de connaissances didactiques. Il n'est donc aucunement question de se positionner en critique et/ou en défenseur d'une utilisation « (politiquement) correcte » de la TAD, bien au contraire...

La question qui motive le travail que nous présentons ici est celle-là même qui nous paraît être au cœur du thème de ce congrès : quelles sont les conditions qui pourraient favoriser, pousser en avant, permettre, l'existence d'un rapport fonctionnel aux mathématiques dans les institutions qui les manipulent ?

Nous avions mis en avant dans la conférence donnée à Baeza, lors de la première édition de ce congrès, le fait que la diffusion de la TAD comme théorie produisant des pratiques professorales bute sur « un oubli des fonctions des objets manipulés au profit d'une vision structurelle » (Artaud 2007). Cette condition du niveau de la société, « partout dense » nous semble-t-il au sein de l'enseignement des mathématiques, marque également les travaux des didacticiens eux-mêmes, et nous donnions alors pour appuyer cette assertion deux exemples dont l'un était une modélisation en types de tâches où l'usage de la notion de type de tâches était pour le moins restrictif. Nous écrivions ainsi (Artaud 2007) :

> Dans l'analyse, cette notion [de type de tâches] a pour principale fonction de permettre le groupement de tâches jugées suffisamment proches, la taille des groupes dépendant à la fois de la réalité modélisée, de l'institution dans laquelle on se place et du travail mené. Ainsi, les types de tâches « calculer une longueur », « calculer une aire », « calculer un volume » sont des types de tâches au programme de l'enseignement secondaire qu'il peut être utile pour l'analyse ou le développement de regrouper au sein du type de tâches plus vaste « calculer une grandeur géométrique », voire « calculer une grandeur », ou encore de scinder en sous-types de tâches comme par exemple « calculer le volume d'un parallélépipède », « calculer le volume d'une sphère », « calculer le volume d'un solide de révolution », etc. Au motif que les types de tâches identifiés auraient un « contenu spécifié » mais « pas strictement spécifié », nommant alors genres de tâches des types de tâches comme « préciser la nature d'une figure décrite par un énoncé » ou encore « comparer les aires et/ou les périmètres de deux sous-figures », le chercheur se prive de cette liberté de modélisation et de l'écologie qu'elle permet, notamment du point de vue de la prise en compte dans l'analyse des niveaux de détermination didactique relatifs au secteur et au domaine.

C'est de ce point que nous partirons ici, pour montrer la mesure dans laquelle une vision au moins partiellement structurelle de la TAD dans la communauté des didacticiens gêne la diffusion d'un savoir mathématique en fonction.

I. Techniques d'analyse des organisations mathématiques

Étudiant la diffusion des organisations mathématiques, le didacticien des mathématiques a à développer des organisations mathématiques qui pourraient ou devraient exister de façon à analyser, évaluer voire développer celles qui existent effectivement dans les institutions examinées. C'est ainsi que, dans une thèse soutenue récemment (Trần Lương 2006), Công Khanh Trần Lương expose une « organisation mathématique régionale » [1] relative à l'intégration qui lui servira de référence pour analyser l'enseignement de l'intégration en France et au Vietnam.

L'auteur annonce d'emblée que « [l]'objet de savoir *intégrale* est structuré par une OM régionale (secteur) composée de trois OM locales (thèmes) », chacune des trois organisations mathématiques locales étant alors présentée successivement.

Il donne d'abord les types de tâches qui la composent :

> **OM1. Intégrabilité**
>
> C'est une OM locale composée de deux types de tâches.
>
> T1. étudier l'intégrabilité d'une fonction f sur $[a, b]$.
>
> T2. Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale (incluant en particulier la démonstration de la linéarité, la relation de Chasles, la positivité).
>
> (…)
>
> **OM2. Antidérivation (Calcul de primitives)**
>
> C'est une OM locale composée de deux types de tâches.
>
> T3. Calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$
>
> T4. Démontrer une égalité entre deux intégrales indéfinies [2].
>
> (…)
>
> **OM3. Calcul d'aire ou d'autres grandeurs**
>
> C'est une OM locale composée de quatre types de tâches.
>
> T5. Calculer $\int_a^b f(x)dx$

[1] Le choix de modéliser en termes d'organisation mathématique régionale plutôt qu'en termes d'organisation mathématique locale pourrait être discuté mais nous n'aborderons pas ce point ici.

[2] En suivant Arnaudiès et Fraysse 1989, l'auteur convient « selon un usage universel, de noter l'une quelconque, non précisée, des primitives de f sous la forme $\int f(x)\mathrm{d}x$ ("intégrale indéfinie" de f) ».

T6. Démontrer une égalité ou inégalité entre des intégrales définies

T7. Calculer approximativement $\int_a^b f(x)dx$

T8. Calculer une grandeur autre que l'aire (longueur, volume, centre de gravité, moment d'inertie, travail d'une force, etc.)

C. K. Trần Lương expose ensuite, de façon plus ou moins détaillée, les techniques et les éléments technologiques relatifs à l'organisation mathématique locale. Par exemple, pour OM2 « Calcul de primitives », il écrit :

> Nous notons que les deux types de tâches T3, T4 sont étroitement attachés à l'ostensif $\int$ par ses valences instrumentale et sémiotique permettant d'effectuer, en cas nécessaire, le changement de variable et l'intégration par parties comme pour l'intégrale définie.
>
> (…)
>
> Pour accomplir les deux types de tâches, on peut utiliser les techniques suivantes : linéarisation, changement de variable, intégration par parties, développement en série entière et intégration terme à terme dans le domaine de convergence.
>
> Ces techniques sont justifiées par les éléments technologiques suivants : définition de la notion de primitive, définition de la notion de dérivée, règles de dérivation, tableau des primitives usuelles, linéarité, formule de changement de variable, formule d'intégration par parties, formule de développement d'une fonction en série, domaine de convergence de suites [*sic*] entières, lien entre convergence uniforme et intégration terme à terme.

Pour l'OM3 « Calcul d'aire ou d'autres grandeurs », l'auteur précise semblablement :

> Pour accomplir ces quatre types de tâches, on peut utiliser les techniques de OM2 et des techniques spécifiques comme : calcul de limite d'une somme de Riemann, méthodes numériques, développement de Taylor avec reste, développement en série infinie, développement asymptotique.
>
> Ces techniques sont justifiées par des éléments technologiques communs à ceux de OM2, complétés par des éléments technologiques suivants : définition de l'intégrale, condition d'intégrabilité, relation de Chasles, positivité, ordre et intégration, formule de Newton-Leibniz, formule de Taylor avec reste, développement asymptotique, formule de calcul de grandeurs concernées.

Pour résumer, de façon certes quelque peu lapidaire, l'organisation mathématique régionale proposée se présente sous la forme de trois organisations mathématiques locales faiblement articulées, l'articulation étant formée par le repérage d'ingrédients communs aux trois organisations mathématiques locales comme en témoigne l'extrait ci-dessous :

> La démonstration de certains éléments technologiques de OM3 (linéarité, relation de Chasles, positivité) est un type de tâches T2 de OM1. Nous pouvons dire que le logos de OM3 est partiellement contenu dans OM1.

OM2 et OM3 ont des éléments technologiques communs comme la linéarité, le changement de variable, l'intégration par parties. Cependant, dans OM2, ces éléments technologiques sont justifiés par la définition de la primitive et les règles de dérivation tandis que dans OM3, ceux-ci sont justifiés par la définition de l'intégrale, formule de Newton-Leibniz et les règles de dérivation.

L'organisation mathématique produite paraît insuffisamment se démarquer de la structure des OM existantes et notamment ne pas inclure les fonctions des mathématiques en jeu : cela paraît pourtant indispensable dans la perspective de pouvoir juger la mesure dans laquelle les OM existantes prennent en charge cet aspect fonctionnel. Obtenir une organisation mathématique « fonctionnelle » à propos de l'intégration suppose au minimum que l'on puisse motiver l'étude des différents types de tâches et donc que l'on puisse obtenir une articulation, au moins partielle, des types de tâches entre eux. Voyons cela à partir de l'analyse effectuée par C. K. Trần Lương.

L'organisation mathématique identifiée comporte, on l'a vu, huit types de tâches :

T1 : étudier l'intégrabilité d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$;

T2. Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale (incluant en particulier la démonstration de la linéarité, la relation de Chasles, la positivité) ;

T3. Calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$;

T4. Démontrer une égalité entre deux intégrales indéfinies ;

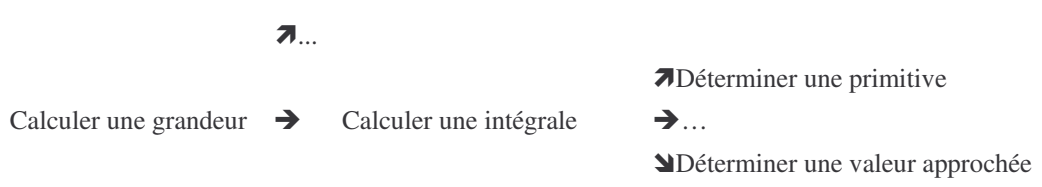
T5. Calculer $\int_a^b f(x)dx$;

T6. Démontrer une égalité ou inégalité entre des intégrales définies ;

T7. Calculer approximativement $\int_a^b f(x)dx$;

T8. Calculer une grandeur autre que l'aire (longueur, volume, centre de gravité, moment d'inertie, travail d'une force, etc.) ».

Des liens entre quatre des types de tâches identifiés apparaissent d'emblée : Calculer une grandeur (T8) peut, sous certaines conditions, amener à calculer une intégrale (T5), le calcul d'une intégrale pouvant se faire de manière exacte par la détermination d'une primitive (T3) ou encore par la détermination d'une valeur approchée (T7), etc.



Deux autres types de tâches s'intègrent aisément au schéma précédent : la détermination d'une primitive peut se faire « directement » ou par le biais de la production d'une égalité, que cette égalité concerne l'intégrale indéfinie (T4) ou l'intégrale définie (T6'). Semblablement, l'obtention d'une valeur approchée peut être réalisée en passant par la production d'une (ou plusieurs) inégalité(s) (T6") [3].

↗ …

↗Déterminer une primitive ➔ Produire une égalité

Calculer une intégrale ➔…

↗…

↘Déterminer une valeur approchée ➔Produire une ou des inégalités

Il reste à insérer la première organisation mathématique locale isolée par C. K. Trần Lương.

Intéressons-nous d'abord au deuxième type de tâches « Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale (incluant en particulier la démonstration de la linéarité, la relation de Chasles, la positivité) ». Il est assez manifeste que les propriétés citées viennent produire et justifier des techniques de calcul des intégrales – on a vu que l'auteur l'avait noté : la démonstration de ces propriétés relève ainsi de la technologie de l'organisation mathématique considérée [4]. Même s'il s'agit bien d'un type de tâches qui sera à accomplir, son accomplissement relèvera de l'organisation de l'étude (moment technologico-théorique) et on ne voit pas bien ce qui motiverait son découpage *en tant que type de tâches mathématique à l'étude* dans l'institution considérée – nous reviendrons sur ce point.

Lorsque la grandeur à calculer se modélise comme intégrale d'une fonction, s'il ne fait aucun doute que la grandeur existe, il faut encore s'assurer que le modèle en permet le calcul dans la théorie analytique élaborée jusqu'alors, soit étudier l'intégrabilité de la fonction. Pour le premier type de tâches, étudier l'intégrabilité d'une fonction sur un segment, c'est ainsi dans le processus qui fait passer du calcul de grandeur au calcul d'intégrale que vient se nicher une raison d'être.

↗...

Calculer une grandeur ➔ Modéliser une grandeur comme intégrale d'une fonction

↘

Montrer qu'une fonction est intégrable ➔... [5]

[3] On notera que la prise en charge des fonctions des différents types de tâches amène à modifier le découpage proposé initialement en scindant le type de tâches T6 en deux et en regroupant ici la production d'égalité (T4 et T6') qui permet le calcul exact et la production d'inégalité (T6") qui permet le calcul approché. Nous avons fait le choix, qu'on pourrait discuter, de ne pas faire apparaître le fait que la production d'inégalité passe parfois au préalable par la production d'une égalité.

[4] La fonction technologique du type de tâche T2 vaut pour l'organisation mathématique que nous constituons comme pour celle que C. K. Trần Lương a constituée.

[5] On notera que cela permet d'ajouter dans la chaîne de types de tâches, un type de tâches du genre « modéliser », qui n'est généralement pas inclus dans l'organisation mathématique mixte étudiée mais qui fait partie de l'organisation de l'étude (voir Artaud, Ali Tatar et Sahraoui 2007).

On obtiendrait ainsi, moyennant un travail d'analyse des *techniques et de l'environnement technologico-théorique indispensable* – bien que nous ne l'abordions pas ici [6] –, une organisation mathématique davantage fonctionnelle au sens où les raisons d'être des types de tâches découpés y sont visibles et lisibles – ce qui nous a amené à légèrement modifier le découpage en types de tâches initialement formulé [7]. Une organisation mathématique de cette sorte sera alors apte à s'intégrer dans une organisation mathématique mixte sur le calcul de grandeurs physiques ou économiques par exemple qui, dans l'enseignement secondaire, pourrait faire l'objet d'un PER où elle pourrait côtoyer une organisation mathématique « résoudre une équation différentielle », ou bien encore « déterminer la limite d'une suite ». Elle pourra également permettre l'analyse de ce qui existe dans les systèmes d'enseignement non seulement à l'égard de la présence/absence de tel ou tel ingrédient de l'OM qui pourrait ou devrait exister mais aussi du point de vue de la présence/absence des fonctions des différents ingrédients et donc de l'articulation des organisations ponctuelles qui la composent.

Dans cette perspective, il est notable que cette OM puisse être résumée par un seul type de tâches « calculer une grandeur (intégrale) ».

Isolons un instant, pour simplifier, les niveaux de détermination didactique (Chevallard 2004) les plus spécifiques : ils correspondent au découpage en sujet/thème/secteur/domaine. Ce découpage est relatif à l'institution dans laquelle on se place : ainsi, si l'on considère la classe de terminale S en France ces cinq dernières années, trois domaines sont à l'étude de l'enseignement obligatoire : l'analyse, la géométrie et les probabilités & la statistique. Le domaine de l'analyse est scindé en de nombreux thèmes, que l'on peut regrouper en secteurs : ainsi en va-t-il par exemple du secteur « calcul intégral » qui regroupe les deux thèmes « intégration » et « intégration et dérivation ». Le travail d'analyse, d'évaluation et de développement d'organisations mathématiques de l'anthropologue du didactique, notamment parce qu'il se place dans une autre institution, peut l'amener à modifier ce découpage : ainsi peut-on considérer le calcul intégral comme un sujet, relatif au thème du calcul de grandeurs physiques, lui-même partie prenante d'un secteur, le calcul de grandeurs, du domaine d'étude « les grandeurs » – domaine qui contient également le secteur de l'optimisation des grandeurs, etc. ; ou encore considérer plus classiquement le calcul intégral comme un thème inséré dans le secteur « analyse à une variable réelle » du domaine de l'analyse, ...

Le fait qu'une organisation mathématique locale voire régionale pour l'institution d'enseignement puisse apparaître comme une « grosse ponctuelle » pour l'institution des didacticiens d'abord – le point étant, dans l'exemple envisagé ici, constitué du type de tâches « calculer une grandeur (intégrale) » –, apparaît alors comme un aspect important d'une technique d'analyse des organisations mathématiques parce qu'il donne notamment un moyen, très partiel encore sans doute, de juger de ce que Marianna Bosch et Josep Gascón nomment l'incomplétude d'une organisation mathématique (Bosch & Gascón 2005). Si, en effet, une organisation mathématique apparaissant locale ou régionale dans une institution

[6] En fait, c'est quand même un travail sur les techniques et l'environnement technologique qui, on l'a vu, sous-tend la production du réseau de types de tâches, travail qu'il faudrait notablement approfondir et compléter.
[7] Voir note 3.

didactique se laisse modéliser en une organisation mathématique ponctuelle, les différents ingrédients de cette organisation ponctuelle étant présents en fonction, on pourra dire que l'organisation mathématique produite par l'institution didactique examinée est « suffisamment complète ».

II. Organisation mathématique et organisation de l'étude

La considération de la variabilité de la taille de ce qui fait une organisation ponctuelle par le biais du paramétrage institutionnel constitue en partie ce qui permettrait la diffusion de ce nous explicitions à Baeza à propos de la modélisation en types de tâches et de l'écologie qu'elle permet, notamment du point de vue de la prise en compte, dans l'analyse, des niveaux de détermination didactique relatifs au secteur et au domaine. À cet égard, le manque de clarification autour de ce qui constitue le didactique nous semble également constituer un point important, dialectiquement lié au paramétrage institutionnel.

Nous l'avons brièvement rencontré dans ce qui précède quand nous avons noté le découpage, en tant que type de tâches relevant de l'organisation mathématique, d'un type de tâches qui a pour fonction de produire et de justifier certains éléments technologiques, soit d'un type de tâches didactique – le type de tâches T2 de l'organisation mathématique constituée par C. K. Trần Lương. Il est croyons-nous présent également dans la structuration même de son « organisation mathématique de référence ». La majeure partie des ouvrages du secondaire comme du supérieur, en effet, font d'abord émerger la notion de primitive et l'organisation mathématique qui lui est relative en quasi autonomie avant de s'intéresser à la question de l'intégration. La séparation de OM2 et de OM3 dans l'OM de référence considérée par C. K. Trần Lương enregistre ainsi en partie, au moins implicitement, la chronogénèse des ouvrages analysés pour la produire.

Nous essaierons maintenant de mettre davantage en évidence ce manque de considération des fonctions didactiques du mathématique : nous nous appuierons pour cela sur la communication de Corine Castela au premier congrès sur la TAD (Castela 2005).

S'intéressant à la question de la résolution de problèmes, elle a le projet d'étudier « des enjeux d'apprentissage qui ne sont à aucun moment pris en charge explicitement dans l'enseignement, dont on peut même penser qu'ils ne sont pas reconnus par les enseignants dans leur discours en classe et qui sont pourtant réalisés par certains élèves ». L'auteure considère alors ce qu'elle nomme le « curriculum praxique, soit l'ensemble des tâches rencontrées par l'élève dans son parcours scolaire » et elle cherche à « se doter d'outils permettant de repérer un temps praxique ».

Après avoir analysé trois énoncés d'exercices pour « différencier les niveaux d'intervention d'une OM dans une tâche et mettre en évidence une progression », elle écrit :

> Le surgissement dans le cours d'une résolution d'un type de tâches éventuellement totalement étranger aux éléments de technologie, voire de théorie présents jusque-là dans le contexte de la recherche impose la présence d'une organisation des connaissances pilotées par les types de problèmes qu'il s'agit de considérer comme des objets autonomes, et pas seulement par le savoir savant. Il est donc question ici de regrouper des OM. Yves Chevallard propose avec ses niveaux de détermination inférieurs une telle organisation, je vais maintenant montrer que cette proposition n'est pas adaptée à mon propos.

L'auteure explicite alors les niveaux de codétermination didactique des sujet, thème, secteur et domaine et leur oppose l'analyse de la pratique, analyse qui relève, selon elle, d'une « logique inverse » de celle des niveaux, ce qu'elle justifie en deux points. Le premier point s'appuie principalement sur l'unicité de la technique dans une organisation mathématique ponctuelle ; le second sur le fait que l'organisation de savoir serait pilotée par le savoir théorique.

> – (...) c'est la technologie qui introduit le bloc [T, τ] avec une hypothèse qui mathématiquement n'est pas fondée d'unicité de la technique associée à un couple [T, θ]. Par exemple, si on considère comme un thème d'étude le thème Barycentre, il existe dans ce thème au moins deux techniques (vectorielle et analytique) pour le type de tâches : « Construire le barycentre d'un système de points ». Si on veut garder l'unicité, on est amené à reprendre le point de vue initial piloté par le bloc [T, τ] et du coup la technologie est réduite (un théorème par exemple), ce qui change le niveau du chapitre Barycentre qui devient un secteur [*]. On peut être amené à constater que l'OD mise en place finit toujours par privilégier une technique parmi plusieurs mais dans ce cas, on a changé de plan d'analyse (OD et non OM).
> – Ce sont les théories puis les technologies qui structurent les niveaux d'OM. Autrement dit l'organisation proposée est une organisation pilotée par le savoir savant. J'ai envie de dire que c'est une organisation motivée par un souci didactique à l'intérieur des mathématiques, volonté d'organiser et de diffuser le savoir. Ceci me conduit à considérer qu'il s'agit d'une structuration mathématique didactique ou au moins théorique, dénomination que je retiendrai dans le sigle OMT.

L'insuffisance des niveaux pour analyser la pratique de résolution de problèmes est ainsi justifiée, pour l'auteure, et elle poursuit en proposant « un autre style d'organisation mathématique » qui répondrait mieux à son propos et notamment à la prise en charge du « fait que pour un même type de tâches peuvent exister différentes techniques relevant éventuellement de la même technologie et surtout de différents thèmes d'études, voire de secteurs différents (ce qui signifie que sous des indices *i*, *j*, voire *k*, différents on retrouve le même type) ».

Il y a là, nous semble-t-il, plusieurs ambiguïtés qui amènent l'auteure à rigidifier une modélisation pourtant fort plastique et, par suite, à conclure à son inadéquation. On notera par exemple que si l'on peut souscrire à l'assertion « ce sont les théories puis les technologies qui structurent les niveaux d'OM », nous avons vu plus haut que cette structuration est relative à l'institution considérée, et qu'elle est dialectiquement liée à l'existence de liens entre types de tâches. Interpréter cette structuration comme « une organisation pilotée par le savoir savant »,

[*] « En fait, suivant les exemples donnés par Yves Chevallard la taille du thème et du secteur sont variables. Le contexte du questionnement qui conduit à recourir à ces niveaux influence les choix. »

c'est se placer en tant que didacticien dans un conditionnement par la sphère savante : or ce conditionnement n'est pas donné par la théorie, et celle-ci permet en outre de l'analyser et de l'interroger. La théorie de la transposition didactique, déjà, étudiait comment le niveau de la société, par l'intermédiaire de deux institutions « la sphère savante » et « les parents », conditionnait ce qui existe dans les systèmes d'enseignement (Chevallard 1991 ; Artaud *et al.* 2005). Le modèle des niveaux de co-détermination didactique notamment, par la considération des niveaux les plus génériques, permet d'approfondir cela et de placer l'institution des anthropologues du didactique dans la société « à côté » de l'institution de production des mathématiques : par là, la TAD leur permet à la fois d'élucider les conditions que la sphère savante fait porter sur l'enseignement et de produire, par le biais d'une dialectique des médias et des milieux appropriée, des organisations mathématiques qui ne sont pas soumises à la seule influence de la sphère savante.

Cela noté, examinons le principal point de difficulté rencontré par Corine Castela, à savoir l'existence pour un même type de tâches de plusieurs techniques.

Une bonne part du problème est réglée si l'on prend en charge le paramétrage institutionnel et la fonction didactique des institutions considérées. Examinons en effet l'exemple du type de tâches « établir une inégalité » que Corine Castela identifie dans l'activité mathématique de la Terminale S et qu'elle donne comme exemple du fait qu'il « existe des types de tâches pour lesquels l'enjeu du curriculum praxique est au moins l'installation d'une organisation mathématique praxique régionale » :

> – En Terminale S, pour établir une inégalité, 3 OM déjà un peu anciennes sont présentes, démonstration par condition suffisante, traitement par équivalence à la manière des inéquations, étude des variations, cette dernière ne relevant pas du même secteur que les deux précédentes.

Ce type de tâches n'apparaît pas explicitement comme enjeu de l'étude de cette classe, ni des classes antérieures d'ailleurs : en revanche certains sous-types de tâches sont, eux, à l'étude dans les classes du secondaire ; c'est le cas par exemple du type de tâches « établir la positivité d'une fonction » ou encore de « établir qu'une suite est majorée par un réel donné ». On peut donc examiner le processus d'étude de l'OM ponctuelle relative au type de tâches « établir une inégalité » que l'institution « enseignement secondaire » réalise « implicitement » à travers l'étude de certains de ses sous-types de tâches – OM qui reste à analyser par le didacticien, bien entendu. De ce processus d'étude qui ne dit pas son nom, l'institution « enseignement secondaire » ne va réaliser que certains moments de l'étude, en plusieurs fois et sur plusieurs années : en particulier, on sera amené à rencontrer ce type de tâches, à l'explorer et à constituer sa technique, à constituer son environnement technologico-théorique chaque fois que l'on rencontrera un nouveau sous-type de tâches. En revanche, on n'institutionnalisera jamais une technique relative à ce type de tâches mais, au mieux, des techniques relatives à certains de ses sous-types.

Examinons alors le type de tâches « établir la positivité d'une fonction ». Ce type de tâches est rencontré dans chacune des trois classes du lycée [8], d'abord parce qu'il constitue une motivation de l'étude des variations et qu'il permet de déterminer le domaine de validité de certains modèles fonctionnels. Lorsqu'on se place en terminale scientifique, ce type de tâches a déjà été étudié : relativement à ce type de tâches, on pourrait ou devrait avoir, à l'entrée en terminale, à peu de variations près, la technique suivante :

> Vérifier si la positivité peut s'établir facilement à partir de la forme algébrique de la fonction (somme de termes positifs, fonction polynôme donnée sous forme factorisée, fonction racine carrée).
>
> Sinon : étudier les variations de la fonction ; calculer les valeurs (ou les limites) aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction et les valeurs des extrémums éventuels. En déduire l'image de l'ensemble de définition et montrer qu'il est inclus dans $\mathbb{R}+$.

L'étude est reprise en terminale, notamment avec l'introduction de nouvelles fonctions et en lien avec le travail sur l'intégration. Cela pourrait ou devrait amener à enrichir la technique au moins de la façon suivante :

> Vérifier si la positivité peut s'établir facilement à partir de la forme de la fonction (somme de termes positifs, fonction polynôme donnée sous forme factorisée, fonction racine carrée, *fonctions exponentielles, composée d'une fonction logarithme avec une fonction minorée par 1, primitive d'une fonction positive*)
>
> Sinon : étudier les variations de la fonction ; calculer les valeurs (ou les limites) aux bornes de l'ensemble de définition et les valeurs des extrémums éventuels. En déduire l'image de l'ensemble de définition et montrer qu'il est inclus dans $\mathbb{R}+$.

On aurait dans ce cas, effectivement, une organisation mathématique ponctuelle, dont il reste bien entendu à analyser la technologie et la théorie mais qu'on voit bien insérée dans le secteur des fonctions du domaine de l'analyse, le fait que certains ingrédients algébriques soient inclus dans la technique n'apparaissant pas, compte tenu du travail effectué, comme devant être isolés du point de vue technologique. Mais il n'est nullement exclu qu'une étude plus approfondie produise une raison pour cela : on aura toujours alors une organisation mathématique ponctuelle, mais insérée cette fois dans un secteur équations & fonctions d'un domaine algèbre & analyse, secteur et domaine qui n'existent pas aujourd'hui dans l'enseignement secondaire mais qui peuvent exister pour cette institution qu'est la recherche en didactique et que l'on pourrait dire nécessaire de faire exister pour que le type de tâches étudié vive mieux.

Ce qui précède relève de ce qui pourrait ou devrait exister. Mais si l'on considère ce qui existe effectivement dans le système d'enseignement secondaire, et notamment dans les manuels, ce travail de fabrication d'une organisation mathématique ponctuelle n'est pas réalisé et on a de fait, si l'on regarde l'institution dans son ensemble, plusieurs organisations mathématiques ponctuelles relatives au même type de tâches juxtaposées. On a alors à faire à une

[8] On notera qu'il est également rencontré au collège dans le cas des fonctions affines.

organisation mathématique locale [T_i, τ_i, θ, Θ], voire régionale ou même globale pour laquelle on peut penser que $T_i = T$ pour tout *i,* ce qui n'est nullement exclu par le modèle.

Au lieu de rassembler le domaine de l'analyse autour de quelques grands types de tâches, le processus d'étude de l'analyse au lycée est ainsi réalisé au niveau des thèmes d'étude sous une contrainte de chronogénèse fortement induite par la structure d'exposition des programmes et non par les nécessités des fonctions de l'étude. La théorie permet donc de mettre en évidence un point de dysfonctionnement du système, certes connu mais dont on voit mieux quelques déterminants : le fait que le système d'enseignement travaille fort peu au niveau du secteur et du domaine.

Examinons pour poursuivre ce qui existe en première scientifique à propos du type de tâches « Construire le barycentre d'un système de points pondérés », qui, on l'a vu, est un autre exemple cité par C. Castela. Le problème semble ici différent car la multiplicité des techniques ne viendrait pas de la juxtaposition de plusieurs organisations sur plusieurs années, et donc plusieurs classes de l'enseignement secondaire, mais se situerait à l'intérieur de la classe de première scientifique (élèves de 16-17 ans). Il est pourtant du même type.

Le programme de cette classe situe le thème du barycentre dans le secteur « Géométrie vectorielle » du domaine « Géométrie ». Il explicite ainsi le travail à effectuer :

> Contenus : Barycentre de quelques points pondérés dans le plan et l'espace. Associativité du barycentre.
> Modalités de mise en œuvre : On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.
> Commentaires : La notion de barycentre, utile en physique et en statistique, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité.

Le document d'accompagnement du programme apporte les précisions suivantes :

> On définira d'abord le barycentre de deux points pondérés et on étendra cette définition à trois ou quatre points, les coefficients étant toujours numériques (non littéraux). Ce paragraphe sera l'occasion de proposer aux élèves des calculs vectoriels signifiants ; on n'oubliera pas que la place de ces derniers a été notablement réduite en classe de seconde. Comme indiqué dans le programme, on appliquera le barycentre à la recherche d'alignement ou de points de concours dans le plan et l'espace, et on évitera toute technicité.

L'environnement technologique doit ainsi être clairement à base de calcul vectoriel. Le type de tâches « construire un barycentre », qui n'apparaît pas explicitement dans ce qui précède, est cependant un ingrédient de la praxéologie mathématique : il apparaît par exemple dans la technique relative au type de tâches « montrer que trois droites sont concourantes et construire leur point de concours ».

Voici une technique à base de calcul vectoriel pour construire le barycentre, G, d'un système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$.

Choisir un des points A_i ; exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_iG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_jA_i}$, en écrivant $\overrightarrow{A_iG} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{A_jA_i} / \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$; construire le vecteur $\overrightarrow{A_iG}$ ainsi obtenu comme combinaison linéaire de vecteurs connus.

Cette technique est justifiée par la définition du barycentre et des propriétés des vecteurs (relation de Chasles, opérations, ...) que nous ne détaillerons pas ici.

La construction du barycentre est parfois malaisée (notamment lorsqu'il y a plus de trois points en jeu) et on peut souhaiter obtenir plutôt les coordonnées du point G dans un repère. Cela conduit à modifier la technique précédente comme suit :

Choisir un des points A_i ; exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_iG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_jA_i}$, en écrivant $\overrightarrow{A_iG} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{A_jA_i} / \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$; choisir deux vecteurs de base, exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{A_jA_i}$ en fonction des vecteurs de base et obtenir les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_iG}$ dans cette base. Construire le vecteur $\overrightarrow{A_iG}$ ainsi donné par ses coordonnées.

Cette technique n'amène pas à modifier la technologie, ou du moins à changer de secteur : il faut ajouter aux propriétés des vecteurs évoquées plus haut celles qui sont relatives au repérage d'un vecteur dans une base.

Comme précédemment, ce n'est pas véritablement ce qui existe dans les manuels de l'enseignement secondaire : on peut y voir des techniques juxtaposées, la technique de détermination des coordonnées apparaissant plus « analytique » que vectorielle comme en témoigne par exemple cet extrait d'un ouvrage dont certains auteurs ne nous sont pas inconnus (Bontemps *et al.* 2001, pages 274 & 275) :

1. Déterminer et construire un barycentre

Méthodes

Pour construire le barycentre de deux points

- Écrire la relation vectorielle de la *propriété* 2, page 270.
- Placer le barycentre en utilisant la construction de Thalès ou des mesures de longueur.

Pour construire le barycentre G de trois points A , B et C

Méthode 1

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Construire $\overrightarrow{AG}$.

Méthode 2

- Construire le barycentre H de deux de ces points.
- Affecter au point H le coefficient égal à la somme des coefficients de ces deux points. Construire le barycentre du point H et du troisième point donné.

Méthode 3

- Choisir un repère. Déterminer les coordonnées des points donnés.
- En déduire les coordonnées du barycentre.

EXEMPLE 1

Q et R sont deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
Déterminer et construire le barycentre de $\{(Q\,,2)\ ;\ (R\,,-5)\}$.

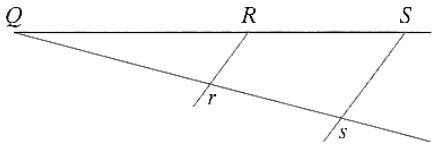
Soit S le barycentre de :

$$\{(Q\,,2)\ ;\ (R\,,-5)\}\ .$$

D'après la *propriété* 2 :

$$\overrightarrow{QS} = \frac{-5}{2-5}\,\overrightarrow{QR}\ .$$

Donc $\overrightarrow{QS} = \frac{5}{3}\overrightarrow{QR}$. On place le point S à l'aide de la construction de Thalès.



EXEMPLE 2

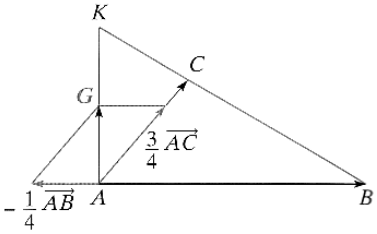
A , B et C sont trois points non alignés.
Construire le barycentre G de $\{(A\,,2)\ ;\ (B\,,-1)\ ;\ (C\,,3)\}$. Quelles sont les coordonnées de G dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC})$?

Méthode 1

De $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on déduit :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AC}\ .$$

Cette relation permet de construire le point G .



Méthode 2

La somme des coefficients de B et C n'est pas nulle. Les points $(B\,,-1)$ et $(C\,,3)$ ont un barycentre K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Le point G est, d'après la *propriété* 6, page 273, le barycentre de :

$$\{(A\,,2)\,;(K\,,-1+3)\}\ .$$

Donc G est l'isobarycentre de A et K , c'est-à-dire le milieu de $[AK]$.

Méthode 3

Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC})$, les coordonnées des points A , B et C sont respectivement $(0\,;0)$, $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$.

Les coordonnées de G sont donc $\left(\frac{0\times 2 - 1\times 1 + 3\times 0}{2-1+3}\,;\,\frac{0\times 2 - 1\times 0 + 3\times 1}{2-1+3}\right)$,
soit $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

On peut donc, là encore, mettre en évidence un manque d'articulation des organisations mathématiques au niveau du secteur : l'organisation mathématique fabriquée autour du barycentre amène à sortir du secteur qui lui est assigné par les programmes pour se placer dans un secteur que l'on pourrait appeler « calcul vectoriel et repérage affine » et on a pour certains types de tâches, comme « construire un barycentre », une organisation mathématique locale constituée d'organisations mathématiques ponctuelles peu voire pas articulées.

III. Dialectique des médias et des milieux et organisation de l'étude

Le travail que nous avons effectué concrétise une (petite) partie de la dialectique des médias et des milieux permettant de se déprendre des conditions que l'institution étudiée impose aux organisations mathématiques à enseigner et enseignées. Cette dialectique se base sur la problématique écologique par l'examen obstiné de ce qui existe, de ce qui devrait et pourrait exister : ainsi par exemple, l'observation et l'analyse des médias que constituent les ouvrages d'enseignement nous permettent de produire, pour partie, un modèle de ce qui existe ; celles des programmes, toujours comme médias, un modèle de ce qui devrait exister. On peut ensuite mettre les modèles de ce qui existe et de ce qui devrait exister à l'épreuve de milieux, constitués des ouvrages et des programmes, pour produire des phénomènes [9].

Mais il nous semble que la mise en œuvre de cette dialectique des médias et des milieux dépend d'une analyse plus approfondie des organisations didactiques.

En effet, l'analyse des organisations mathématiques souffre quelque peu du manque d'identification des fonctions didactiques de certains types de tâches mathématiques, même si la question de la frontière entre ce qui peut ou doit relever du mathématique ou plus largement de l'organisation de savoir à institutionnaliser et ce qui peut ou doit relever de l'organisation didactique peut être posée (voir Artaud, Ali Tatar et Sahraoui 2007).

Nous avons également mis en évidence un découpage « trop fin », fragmentaire, des types de tâches et nous avons montré qu'il conduit à des organisations mathématiques insuffisamment articulées, constituées d'organisations mathématiques ponctuelles juxtaposées, avec notamment l'existence autour d'un unique type de tâches d'organisations mathématiques locales. C'est là un effet de l'organisation de l'étude qui met en place l'organisation mathématique enseignée.

S'il est certainement nécessaire, lors de l'émergence d'une organisation mathématique, d'isoler certaines pratiques « nouvelles », il est dommageable, croyons-nous, de garder cet isolement dans la mise en forme de l'organisation mathématique. C'est dire que les praxéologies d'institutionnalisation existantes doivent être développées de manière à permettre une « amalgamation » convenable des organisations mathématiques, notamment aux niveaux du secteur et du domaine.

[9] Bien entendu, les milieux cités ici ne sont pas les seuls à pouvoir ou devoir être convoqués.

On voit combien l'analyse de l'organisation de l'étude est essentielle pour enrichir et/ou permettre celle des organisations mathématiques : les mathématiques sont produites par l'organisation didactique et elles en portent la trace ; elles sont un instrument essentiel, bien que non unique, de l'étude des mathématiques et doivent donc pouvoir s'inscrire dans l'organisation didactique – qu'elles conditionnent également par là. Pourtant les techniques d'analyse fonctionnelles des organisations de l'étude produites par la TAD ont peu diffusé dans le continent didactique, ce qui limite, nous semble-t-il, la production de phénomènes didactiques.

Références

Arnaudiès J.M. et Fraysse H. 1988. *Cours de mathématiques. 2. Analyse*. Paris : Bordas. Nouveau tirage Paris : Dunod Université, 1989.

Artaud M. 2007. La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. *In Actes du 1er congrès sur la théorie anthropologique du didactique.* Baeza. À paraître.

Artaud M. Menotti G. Bebbouchi R. 2005. Niveaux de codétermination didactique et transposition didactique : la confection d'un livre de 4e année primaire en Algérie. In *Communications au 1er congrès sur la théorie anthropologique du didactique.* Baeza 2005. Pages 159-166.

Artaud M. Ali Tatar M.L. Sahraoui L. 2007. Modélisation et mise en place d'organisations mathématiques mixtes. Communication au *IIe congrès sur la théorie athropologique du didactique, Uzès (31 octobre – 3 novembre 2007).*

Bosch M. et Gascón J. 2005. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactique. *In Balises en didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. Pages 107-122.

Castella C. 2005. Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogénèse praxique. In *Communications au 1er congrès sur la théorie anthropologique du didactique.* Baeza 2005. Pages 207-223.

Chevallard Y. 1985. *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage. Deuxième édition augmentée : 1991.

Chevallard Y. 2004. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Conférence dans le cadre de la 3e Université d'été *Animath*, (Saint-Flour, 22-27 août 2004).

Trần Lương C. K. 2006. La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam. Grenoble. Disponible sur l'Internet : http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/12/20/62/PDF/These_Tran_Luong_Cong_Khanh.pdf.