Ecología de la modelización matemática:

Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias

Berta Barquero[1], Marianna Bosch[2] & Josep Gascón[3]

ABSTRACT

This paper studies the problem of the integration of Research and Study Courses (RSC) (Chevallard 2004 and 2006) as a new didactic device capable of "breaking" the atomization of mathematics taught at university level. The use of RSC requires a specific ecology, which has not been studied extensively. There exist strong limitations to its use, which are created by transpositive restrictions that arise from different levels of didactical codetermination (Chevallard 2001 and 2002). We present the first phase of a research project which aims at studying generic restrictions related to what we call the "dominant epistemology", both at universities and in society.

RÉSUMÉ

Ce travail est centré sur le problème de l'intégration des Parcours d'Étude et de Recherche (PER) (Chevallard 2004, 2006) en tant que comme dispositifs didactiques capables de "rompre" avec l'atomisation des mathématiques qui s'enseignent dans les institutions universitaires. L'implantation des PER requiert d'une écologie spécifique encore peu étudiée et fortement limitée par des contraintes transpositives émanant des différents niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2001 et 2002). Dans cette communication nous présentons la première phase d'une recherche qui se propose d'étudier les contraintes génériques liées à ce que nous pouvons désigner comme l'"épistémologie dominante", aussi bien à l'université (niveau de l'École) que dans la Société.

1. Planteamiento del problema didáctico

En una investigación previa (Barquero *et al.* 2005 & en prensa, Barquero 2006) se muestra cómo los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), tal como han sido introducidos recientemente por Yves Chevallard en el ámbito de la TAD (Chevallard 2004 y 2006), pueden funcionar localmente como un dispositivo didáctico capaz de "romper" la desarticulación o atomización de las matemáticas que se enseñan en las instituciones universitarias. Esta función articuladora de los REI proviene en gran medida de su capacidad para permitir que la *modelización matemática*[4] viva en los Sistemas de Enseñanza.

[1] Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona. barquero@mat.uab.cat
[2] FundEmi – Facultat d'Economia IQS. Universitat Ramon Llull. mbosch@fundemi.url.edu
[3] Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona. gascon@mat.uab.cat
[4] Ver García (2005), García, Gascón, Ruiz & Bosch (2006) y Bosch, García, Gascón & Ruiz (2006).

La implantación de los REI de forma generalizada en la enseñanza universitaria requiere una ecología específica que está todavía poco estudiada. Por las experiencias realizadas hasta el momento sabemos que dicha implantación está limitada por fuertes restricciones transpositivas que surgen en los diferentes niveles de codeterminación didáctica (Chevallard 2001 y 2002).

En la investigación previa citada (Barquero 2006) hemos analizado las restricciones que provienen del contrato didáctico institucional y de la organización tradicional de la enseñanza universitaria, restricciones que podemos situar entre los niveles pedagógico y aquellos que son específicos de la disciplina (área, sector y tema).

Civilización ➡ Sociedad ➡ Escuela ➡ Pedagogia	➡ Disciplina ➡ Área ➡ Sector ➡ Tema ➡ Cuestión
Niveles genéricos	*Niveles específicos al ámbito matemático*

Así, por ejemplo, hemos visto que la elección de una cuestión problemática inicial suficientemente generatriz (como, por ejemplo, el estudio de la evolución de una población) permite articular y dar sentido a un conjunto de sectores matemáticos que se abordan de manera totalmente independiente en la enseñanza universitaria tradicional: álgebra lineal, cálculo diferencial en una variable y ecuaciones diferenciales. También hemos visto que el estudio de una cuestión extramatemática mediante la delimitación de un sistema inicial y la construcción de modelos sucesivos de dicho sistema, permite poner en evidencia cómo evolucionan la cuestión inicial y las respuestas provisionales, al tiempo que destacan tanto las limitaciones como la necesidad y los aportes de cada nuevo modelo. La matemática que se utiliza rompe totalmente con la organización clásica conceptual de los temas (números reales, límites, derivadas, etc.) para proponer una nueva estructura basada en las sucesivas cuestiones y sistemas que se van considerando (poblaciones discretas o continuas, con generaciones separadas o mezcladas, con crecimiento constante, creciente o decreciente, etc.). En lo que se refiere a los dispositivos didácticos ligados a la enseñanza universitaria de las matemáticas (nivel de la disciplina), hemos mostrado la rigidez del esquema clásico "clase de teoría – clase de problemas – examen" y la posibilidad de incorporar al *topos* del alumno numerosas responsabilidades matemático-didácticas que quedan tradicionalmente ausentes en el contrato didáctico: formulación de cuestiones, búsqueda de medios empíricos apropiados, institucionalización mediante la redacción de informes de resultados parciales o finales, etc.

En esta comunicación presentaremos la primera fase de una investigación que pretende completar los análisis anteriores estudiando las restricciones que provienen de los niveles más genéricos de codeterminación matemático-didáctica, especialmente aquellos relacionados con lo que podríamos designar como la "*epistemología dominante*" en la institución docente considerada, la universidad. Nos referimos a la manera de entender las matemáticas por parte de la institución enseñante y, en particular, por parte de los profesores universitarios. Nuestra

hipótesis previa es que la visión de las matemáticas que prevalece en la cultura universitaria científica se puede caracterizar como "aplicacionista" en el sentido siguiente: se establece de entrada una separación rígida entre las matemáticas y las demás ciencias (en particular, las experimentales) de tal forma que las primeras, una vez construidas, "se aplican" a las segundas sin "contaminarse" por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática de las ciencias experimentales a cuyo estudio contribuyen. Así, la dinámica de poblaciones o las leyes de calentamiento de los cuerpos son ejemplos de "aplicaciones" de las ecuaciones diferenciales, como si esta dinámica o estas leyes pudieran existir sin el instrumento matemático que les da forma y como si, del mismo modo, las ecuaciones diferenciales tuvieran una existencia independiente de cualquier problema extra-matemático.

El problema de investigación que nos planteamos puede pues formularse en los términos siguientes:

> ¿De qué forma se interpreta, en la comunidad universitaria actual, el papel de la actividad matemática y, especialmente, de la modelización matemática en el desarrollo de las Ciencias Experimentales (CCEE)? ¿Hasta qué punto prevalece el "aplicacionismo"? ¿Cuál es la *economía* de esta epistemología dominante (para qué sirve, qué facilita, qué funciones asume)? ¿Cuál es su *ecología* (por qué y como existe, cómo se puede hacer evolucionar)?

Centrándonos en la enseñanza de las CCEE, nos proponemos realizar un primer estudio exploratorio del conjunto de cuestiones descritas a partir de varios tipos de *media*. En este trabajo nos centraremos en analizar algunos *discursos generales sobre las matemáticas* que se enseñan y que aparecen en los prefacios de libros de consulta universitarios y en los programas de las asignaturas[5].

2. La epistemología lineal y acumulativa de los libros de texto científicos

Según Thomas S. Kuhn: "Tanto los científicos como los profanos toman gran parte de la imagen que tienen de las actividades científicas creadoras de una *fuente de autoridad* que disimula sistemáticamente –en parte, debido a razones funcionales importantes – la existencia y la significación de las revoluciones científicas" (Kuhn 1979, p. 212). Kuhn se refiere especialmente a los *libros de texto científicos* aunque también incluye como componentes

[5] En trabajos posteriores nos proponemos seguir el estudio con la realización de una serie de entrevistas a profesores universitarios de la "comunidad científica" involucrada en la enseñanza universitaria de las CCEE, para poder indagar la forma de interpretar la modelización matemática en dicha comunidad (o la forma de intervención de las matemáticas en las CCEE) y la consecuente repercusión en la forma de utilizar las matemáticas y la modelización matemática en la enseñanza de las CCEE. Creemos que esta información constituye un aporte esencial para analizar la *ecología de la modelización matemática* en las instituciones universitarias responsables de la formación de científicos experimentales.

secundarios de la fuente de autoridad los textos de divulgación científica y las obras filosóficas moldeadas sobre ellos. Los libros de texto se escriben después de cada revolución científica e inevitablemente disimulan no sólo el papel desempeñado por dicha revolución sino incluso la existencia de la misma. Son "vehículos pedagógicos para la perpetuación de la ciencia normal" (Kuhn, op. cit., p. 214).

Los libros de texto científicos y también muchas historias de la ciencia muestran únicamente aquellas partes del trabajo científico del pasado que pueden utilizarse para *enunciar y resolver* los "problemas paradigmáticos" (o ejemplos compartidos) que se utilizan para describir el estado actual de la ciencia. "En parte por selección y en parte por distorsión, los científicos de épocas anteriores son representados implícitamente como si hubieran trabajado sobre el mismo conjunto de problemas fijos y de acuerdo con el mismo conjunto de cánones fijos […]" (Kuhn, op. cit., p. 215). Según Kuhn el espíritu no histórico de la comunidad científica y hasta la depreciación de los hechos históricos constituye una característica profunda y probablemente funcional de la ideología de la profesión científica. Todo ello da como resultado que la historia de la ciencia parezca *lineal y acumulativa*.

El punto central de esta concepción del desarrollo de la ciencia es el dogma implícito según el cual los "hechos" y los "problemas" (las cuestiones que los científicos se plantean) son esencialmente los mismos a lo largo de todo el desarrollo histórico y lo único que evoluciona son las respuestas que van acumulando de forma lineal y progresiva nuevos conocimientos científicos.

Kuhn explica, por ejemplo, que Newton atribuyó a Galileo la respuesta a una pregunta que los paradigmas de Galileo no permitían plantear, ocultando así una reformulación pequeña pero revolucionaria sobre *el tipo de preguntas* que planteaban los científicos anteriores en torno al movimiento y también el cambio sobre *el tipo de respuestas* que estaban dispuestas a aceptar. "Pero es justamente este cambio de formulación de las preguntas y las respuestas el que explica, mucho más que los descubrimientos empíricos nuevos, la transición de la dinámica de Aristóteles a la de Galileo y la de éste a la de Newton. Al disimular esos cambios, la tendencia que tienen los libros de texto a hacer lineal el desarrollo de la ciencia, oculta un proceso que se encuentra en la base de los episodios más importantes del desarrollo científico" (Kuhn, op. cit., p. 217-218).

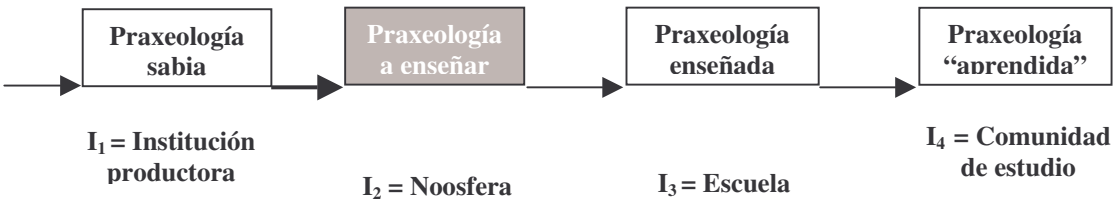
Pero no son sólo los tipos de preguntas posibles y los tipos de respuestas aceptables las que van cambiando con el desarrollo de la ciencia, también los "hechos" cambian y aparecen hechos completamente nuevos. Aunque los libros de texto sugieren que las teorías evolucionan para ir ajustándose gradualmente a los *hechos que se encontraban presentes en todo tiempo*, la realidad es que "[…] las teorías surgen al mismo tiempo que los hechos a los que se ajustan a partir de una reformulación revolucionaria de la tradición científica anterior […]" (Kuhn, op. cit., p. 220). Así, los conceptos científicos, como "tiempo", "energía", "fuerza" o "partícula", transforman completamente su significado a medida que se relacionan con otros conceptos científicos, se integran en ciertos procedimientos de manipulación (que

son esencialmente "matemáticos") y se aplican a la formulación y a la resolución de problemas paradigmáticos.

En resumen, la enseñanza escolar de la ciencia se plantea a partir de un paradigma inamovible (que es bastante transparente) y donde no sólo las respuestas sino también las preguntas, las técnicas permitidas para abordar dichas cuestiones y los elementos tecnológico-teóricos que permiten justificar e interpretar dichas técnicas están completamente predeterminados. No se concibe, por tanto, ninguna posibilidad de que la propia actividad científica al intentar dar respuesta a una situación problemática permita plantear preguntas (y provoque la emergencia de respuestas) significativamente nuevas y no previstas de antemano ni, mucho menos, que dicha actividad comporte el desarrollo de las técnicas y provoque modificaciones importantes del significado, el alcance y las relaciones entre las nociones básicas de la teoría científica.

En esta ciencia del libro de texto las teorías se presentan junto con sus "*aplicaciones ejemplares*" que se toman como "pruebas" de aquellas. Por lo tanto, estos ejemplos compartidos nunca pueden sugerir ni el más leve cuestionamiento de las teorías puesto que aparecen al servicio de ésta, a modo de ilustración. En una palabra, la *situación problemática* aparece inamovible, "muerta", sin ninguna posibilidad de desarrollo, por lo que *se hace transparente y acaba desvaneciéndose*.

Podemos pensar que, a pesar de su arraigo en nuestra cultura occidental, la *epistemología espontánea* se refuerza o manifiesta con mayor concreción en la primera etapa de la transposición didáctica, en el tránsito entre la institución productora del saber y la noosfera, en el bien entendido que, como sucede en todas las etapas, los procesos transpositivos no son unidireccionales:



De todos modos, la *epistemología de* "*libro de texto*" no hace más que reforzarse en las sucesivas etapas de la transposición y, en definitiva, acaba invadiendo de una u otra manera todas las instituciones a lo largo del proceso de transposición didáctica incluyendo la propia institución productora (o comunidad "sabia") y, desde luego, saturando la cultura escolar.

Mientras que en el caso de las ciencias "naturales" (física, química, biología, geología, etc.) esta epistemología está asociada al *inductivismo*, en el caso de las matemáticas lo está al *deductivismo*. En consecuencia, el análisis del papel que juega la modelización matemática en la enseñanza de las matemáticas que se imparten en las licenciaturas de matemáticas, esto es, el análisis de la *ecología de la modelización matemática* en las instituciones universitarias

responsables de la formación de los matemáticos, constituye un problema que presenta rasgos específicos importantes y que no podemos estudiar aquí. En trabajos anteriores (Gascón 2002), siguiendo a William P. Thurston (1994) hemos descrito el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la comunidad matemática como el modelo "popular" de las matemáticas que reduce la "actividad matemática" a series del tipo "*definición-especulación-teorema-prueba*". Hemos mostrado que dicho "modelo popular" constituye una forma simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del "*euclideanismo*" que pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que constan de términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*). También hemos señalado que los modelos docentes universitarios sustentados por dicho modelo epistemológico de las matemáticas están próximos al *teoricismo* descrito en Gascón (2001) como un modelo docente ideal. Pero no hemos analizado con detalle el papel que juega la modelización matemática en dichos modelos docentes ni las consecuencias del aplicacionismo en estas instituciones. Éste continúa siendo, por tanto, un problema abierto.

Ambos "patrones" (inductivismo y deductivismo) lejos de contraponerse son gemelos y se caracterizan por *eliminar la problemática* y, en consecuencia, por *excluir cualquier evolución* de ésta. "Algunos libros de texto pretenden y no esperan que el lector posea ningún conocimiento previo, sino tan sólo cierta madurez matemática. Lo que eso significa frecuentemente es que esperan que el lector esté dotado por naturaleza de la "habilidad" de aceptar los argumentos euclídeos sin ningún interés antinatural en el trasfondo problemático y en la heurística que está tras el argumento". (Lakatos 1978, p. 165)

3. El papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales: primera caracterización del aplicacionismo

Pero, ¿cuál es el papel que asigna la citada epistemología del "libro de texto" a la *modelización matemática* en el desarrollo de las ciencias experimentales? ¿Cómo condiciona dicha noción cultural de "modelización matemática" las posibles formas de utilizarla efectivamente en la organización universitaria del estudio de las ciencias experimentales?

Si postulamos que la epistemología del "libro de texto" es la epistemología dominante en las citadas instituciones universitarias, ¿qué indicadores utilizaremos para contrastar empíricamente esta hipótesis? ¿Existirán diferencias relevantes entre la comunidad de los "matemáticos" y la de los "científicos experimentales" (considerados todos ellos como miembros de la institución responsable de la formación de los futuros científicos experimentales) en cuanto a la forma de considerar el papel de la modelización matemática en el desarrollo y en la enseñanza de las ciencias experimentales? O, en otros términos, en la enseñanza de ciencias experimentales, ¿hemos de distinguir entre el papel que tiene la modelización matemática en el ámbito de las asignaturas de "matemáticas" y el que tiene en el resto de materias de dichas licenciaturas?

Digamos ante todo que la epistemología del "libro de texto" empieza por restringir extraordinariamente la noción misma de "modelización matemática" reduciéndola a una mera *aplicación* (y hasta a una simple "ejemplificación") de unas *técnicas matemáticas completamente predeterminadas* que se utilizan únicamente para resolver un conjunto de *problemas científicos prefijados de antemano*. Es por esta razón que denominaremos "*aplicacionismo*" a la forma específica de considerar y de utilizar la modelización matemática que emana de la epistemología del "libro de texto".

La función didáctica de estos ejercicios de "modelización-aplicación-ejemplificación" no es la de "probar" las teorías científicas (que no se cuestionan en ningún momento) ni, tampoco, la de mostrar el estado actual de la ciencia normal, puesto que éste último sería un objetivo excesivamente genérico y no abordable por una enseñada atomizada de la ciencia. Su función didáctica principal es mucho más específica y hasta "puntual" y consiste en ejemplificar una forma estandarizada de utilizar determinadas herramientas matemáticas para resolver ciertos tipos estereotipados de problemas científicos que, como no podría ser de otra forma, coinciden con los que aparecerán posteriormente en los dispositivos de evaluación.

Se da por sentado que cada tipo de problemas T_i se resuelve aplicando una determinada técnica matemática τ_i y que dicha aplicación da origen a un tipo particular de modelo matemático M_i (cuyo carácter de "modelo" así como el proceso de modelización suelen quedar implícitos) que permite resolver todas las cuestiones planteadas en T_i. No se consideran cuestiones problemáticas que vayan más allá de las cuestiones "internas" a cada aplicación particular de los modelos estandarizados. No se plantean, por tanto, preguntas sobre la "comparación" del grado de adecuación de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas porque *el sistema se supone construido de una vez por todas* (no aparecen cuestiones "nuevas" no previstas de antemano), ni sobre la necesidad de elaborar modelos de los modelos (la recursividad de la modelización matemática es completamente ignorada en la práctica escolar).

Para contrastar empíricamente hasta qué punto en las instituciones escolares universitarias responsables de la formación en ciencias experimentales prevalece la epistemología del libro de texto y, en particular, el *aplicacionismo*, utilizaremos un conjunto de indicadores empíricos que describimos en el siguiente punto. Antes, pero, especifiquemos algunos de los rasgos destacados e hipótesis que asumimos como una caracterización provisional de la epistemología del libro de texto y que nos servirá de guía para construir los indicadores empíricos:

1. **Se establece una distinción neta entre las matemáticas y las CCEE. Las primeras permitirían construir modelos, y éstos modelizarían sistemas que pertenecen íntegramente al ámbito de las ciencias experimentales.** Se destaca entonces la existencia de dos lógicas independientes y autónomas, por un lado, la lógica de las matemáticas y, por otro, la de las ciencias experimentales, sin reconocer ninguna

interacción constitutiva entre ambas. No existe la idea de la matematización o modelización matemática progresiva de los sistemas. De ahí el "misterio" que las matemáticas sirvan para representar, describir o modelizar el mundo empírico. La modelización matemática aparece como un añadido que se crea para unir los dos mundos.

2. **Relación unidireccional (en tiempo y modo) entre las matemáticas que fabrican modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas en los que se usan.** Se supone que los modelos matemáticos se aplican y preexisten a los sistemas científicos pero nunca al revés. Se supone que al "aplicar" las matemáticas a las CCEE únicamente se "concretan" y "cuantifican" fenómenos científicos ya conocidos de antemano. Así, por ejemplo, se podrán asignar distintos sistemas de las CCEE para un mismo tipo de modelo matemático, pero es mucho menos frecuente considerar distintos tipos de modelos matemáticas para el estudio de un único sistema. Por otra parte, es difícilmente concebible que la utilización de un modelo matemático permita cuestionar algunos de los presupuestos científicos previos (planteando nuevas cuestiones que no podían plantearse antes de trabajar dentro del modelo en cuestión) y, mucho más, que provoque la emergencia de nuevos fenómenos (físicos, químicos o biológicos).

3. **Las matemáticas no son una herramienta constitutiva de las CCEE. No se considera que las matemáticas sean un componente esencial en la construcción del conocimiento científico.** El sistema, como entidad independiente, podría existir sin la matemática. La matemática se considera en la mayoría de ocasiones una *herramienta cuantificadora* de la cual se podría prescindir si nos quedamos con lo "esencial", esto es, con los aspectos *cualitativos* de los fenómenos científicos.

4. **Ni los modelos ni los sistemas evolucionan**. En los sistemas (científicos), que se proponen para estudiar, no aparecen cuestiones realmente nuevas a lo largo del proceso de estudio. Hay una clara rigidez de la problemática, los *sistemas científicos* estudiados se mantienen *estáticos a lo largo del proceso de estudio*. El "olvido" de que se está llevando a cabo un proceso de modelización matemática de determinados sistemas es un indicador del *aplicacionismo* puesto que impide modificar el modelo que se está utilizando para superar sus limitaciones.

4. Indicadores empíricos del aplicacionismo en las CCEE propuestas para ser enseñadas

Podemos destacar un conjunto de indicadores que se utilizarán para contrastar empíricamente hasta qué punto en las instituciones universitarias responsables de la formación en ciencias experimentales prevalece el *aplicacionismo.* Para el estudio de cada una de las cuestiones a indagar, se utilizarán como datos empíricos algunos *discursos generales sobre las matemáticas* que se enseñan (o difunden) y que aparecen en los prefacios a los libros de texto y los libros de consulta, en los programas u otros documentos oficiales.

I_1: Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas (purificación epistemológica)

Este primer indicador pretende constatar que *las matemáticas no se mezclan con los sistemas que modelizan ni se modifican al "aplicarse"* y, en consecuencia, son consideradas independientes de dichos sistemas y se aplican en todos los casos de la misma manera y sin contaminarse. El trato "monodisciplinar" de un problema o cuestión dada tiende a ocultar las necesidades de estudio de los conocimientos matemáticos relevantes para otras disciplinas y, en muchas ocasiones, oculta las razones de ser de estos conocimientos. En este sentido, Chevallard afirma que se llega a hacer una *infra-utilización indígena de las matemáticas* (Chevallard 2005, p.19).

I_2: Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática *básica común* para todos los científicos

Se trata de un "lenguaje" básico que, en gran parte, constituye el currículum de la matemática de la Enseñanza Secundaria y que, por lo tanto, se considera absolutamente común para todos las CCEE. No se concibe ningún tipo de especificidad ni en las nociones matemáticas básicas ni, tampoco, en el tipo de técnicas y tecnologías matemáticas integrantes de dicha formación matemática básica.

I_3: La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista (lógica de los modelos) (compartimentación)

La estructura de las matemáticas para CCEE es muy estereotipada y cristalizada en dos o tres bloques "universales". Se trata de un indicador global de la "independencia" entre las matemáticas y las ciencias experimentales a las que se "aplican". Viene a reforzar en el nivel disciplinar lo que el anterior indicador ponía de manifiesto en los niveles más específicos. Si la estructura global de los programas de matemáticas para biólogos, geólogos, químicos y físicos son esencialmente los mismos, se corrobora que la matemática no se modifica en ningún aspecto cuando se aplica a las diferentes CCEE. No existe una matemática específica para cada una de las CCEE. La "biomatemática" sólo existe en el ámbito de la investigación, no en el de la enseñanza.

I_4: Dado que las "aplicaciones" vienen después de una formación matemática básica, se destaca una proliferación de cuestiones aisladas con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas

Otro indicador del aplicacionismo lo constituye el progresivo desvanecimiento de una problemática general relativamente unificada que, en cierto sentido, genere inicialmente un conjunto de cuestiones relacionadas entre sí y que constituya, en primera instancia, la razón de ser y el motor del proceso de estudio de un tema científico. En su lugar aparece una proliferación de problemas aislados (que pueden surgir en sistemas distintos) que pone de

manifiesto la ausencia de una problemática científica común. Encontramos aquí una característica señalada anteriormente según la cuál es mucho más probable encontrar distintos sistemas de CCEE asociados a un tipo de modelo matemático que ver cómo distintos modelos matemáticos se suceden, amplían y evolucionan para abordar un mismo sistema científico.

I_5: La enseñanza de las herramientas *matemáticas básicas* siempre es *anterior* al estudio de su *aplicación*

Lo primero es aprender a manipular los componentes de los modelos matemáticos más importantes y después ya se aprenderá a utilizarlos en cada ámbito de trabajo particular. Los modelos se fabrican a partir de las nociones, propiedades y teoremas de cada tema y, una vez construidos de forma totalmente independiente de cualquier sistema, se buscan sus posibles aplicaciones que, por tanto, nunca pueden ser modificadas por posibles evoluciones de los sistemas.

I_6: Se podrían enseñar los sistemas sin los modelos, es decir, se podrían enseñar Ciencias Experimentales sin matemáticas – Apagón Matemático

Uno de los indicadores "extremos" de la independencia entre las matemáticas y las CCEE (especialmente en los casos de Biología y Geología) lo constituye la creencia de que, en última instancia, podría prescindirse de las matemáticas en la *enseñanza* de las CCEE. Postulamos que, como consecuencia de la epistemología de las CCEE descrita, se tiende a considerar que las matemáticas sólo son útiles para ejemplificar los *aspectos "cuantitativos"* de ciertos fenómenos científicos que pueden explicarse *cualitativamente* sin hacer uso de las matemáticas. Esta ideología explicaría, en parte, la disminución progresiva del peso de las matemáticas en los programas de estudio de CCEE y el que sea posible, hoy en día, proponer la eliminación absoluta de las matemáticas en dichos programas.

5. El "aplicacionismo" en los programas de matemáticas para las CCEE

Los *programas de las asignaturas de matemáticas* que se están impartiendo en los primeros cursos universitarios son un buen indicador de las matemáticas que se proponen para ser enseñadas. Nos centramos en el caso del primer curso de matemáticas de las facultades de ciencias experimentales (geología, biología, química y ciencias ambientales) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) pero veremos que el caso descrito no diverge mucho de lo que encontramos en las otras facultades de ciencias de diversas universidades públicas del estado español.

Si nos centramos en los párrafos introductorios en los que se presentan los objetivos de la asignatura, veremos que el diseño del programa persigue un doble objetivo: por un lado proporcionar una *formación matemática básica* **[I_1, I_2]** y, por otro lado, el introducir a los estudiantes en la *modelización matemática* aplicada a la especialidad científica

correspondiente. Por ejemplo, en el programa de la licenciatura de Biología de la Universidad de Salamanca (US) describe los objetivos en los términos siguientes:

> **Objetivos**
>
> Se pretende conseguir de manera general que el alumno se familiarice con las herramientas matemáticas básicas que va a precisar a lo largo de la carrera. En particular se busca conseguir que el alumno comprenda los conceptos fundamentales involucrados en la Modelización Matemática, fundamentalmente en los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias que tengan aplicación a procesos biológicos.

De forma similar, el programa de la licenciatura de Geología de la UAB encontramos:

> **Objetivos**
>
> Este programa pretende un doble objetivo. El primero y más importante es el da dar al estudiante una formación matemática básica, centrada en el álgebra lineal y en el cálculo diferencial en una variable, que le permita comprender el lenguaje de la Ciencia. El segundo es el de introducirlo en el campo de la Geología, es decir, en la modelización matemática, por medio de ejemplos sencillos que pueden ser analizados con las herramientas matemáticas introducidas previamente.

Destacamos que los apartados de los programas que hacen referencia a la *modelización matemática* se plantean siempre *con posterioridad* y como una consecuencia de lo que se considera la formación matemática básica **[I_5]**. La referencia a las aplicaciones queda más explícita al examinar los contenidos de las asignaturas, donde se observa que la parte del programa que se dedica al estudio de los modelos matemáticos es muy pequeña, cuando no es completamente inexistente. Eliminar la modelización es el primer paso para eliminar la necesidad de enseñar matemáticas en CCEE.

Salvo alguna excepción, la organización habitual de los programas no se estructura entorno a los problemas de modelización o "aplicaciones", sino en base a un listado de temas o bloques temáticos que siguen una organización muy estándar. Se pueden distinguir tres grandes bloques temáticos o áreas de contenidos: *álgebra lineal*, *cálculo diferencial e integral en una variable* y *ecuaciones diferenciales* **[I_3]**. Cabe destacar que esta estructuración en bloques temáticos no aparece de forma explícita y, cuando aparece, no siempre presenta las mismas divisiones. Lo más importante a destacar es que el común denominador de estos programas es que todos los contenidos y nociones clave aparecen de forma invariante. En particular, no se

hace ninguna mención a los tipos de cuestiones que se trataran a lo largo del curso ni del tipo de problemas el estudio de los cuales se propondrá.

Esta organización tradicional de los contenidos de enseñanza tiene el gran inconveniente de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la "razón de ser" de las nociones, propiedades, teoremas y técnicas que han acabado cristalizando en el saber matemático que se quiere enseñar. Además, dado que esta organización sitúa el bloque tecnológico - teórico en el origen de la actividad matemática, tiende a construir tipos de problemas muy cerrados y aislados para obtener así ejemplificaciones de cada una de las nociones o propiedades de cada tema **[I_4, I_5]**.

Aunque implícitamente se asume que todos los contenidos en los que se estructura el currículum forman parte de una organización matemática más grande, no se plantea nunca el problema matemático y didáctico de cómo *articular los contenidos matemáticos* para utilizarlos como instrumentos de modelización en el estudio de cuestiones biológicas, geológicas, químicas, etc. Aunque se enseñen y se aprendan como *contenidos aislados y desarticulados*, se tiende así a aceptar que esta articulación se producirá espontáneamente cuando los contenidos se apliquen a problemas extra-matemáticos. **[I_3, I_6]**

6. El "aplicacionismo" en los libros de consulta

Como segunda fuente de material empírico hemos elegido algunos de los libros de consulta más recomendados en las asignaturas de matemáticas de las licenciaturas de Biología y de Geología. En los programas de las asignaturas aparecen citados algunos de los libros de consulta más utilizados para la introducción al ámbito del cálculo y al álgebra lineal, Salas & Hille (1994) y Anton (1991) son un buen ejemplo.

Las organizaciones presentadas por estos libros "prototípicos" son muy estereotipadas y cristalizadas que se pueden resumir, con pocas variaciones, en un listado de conceptos matemáticos generales agrupados en ciertos bloques independientes tales como: números reales, funciones de variable real, límites y continuidad, derivación, integración, funciones en varias variables, ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, vectores, diagonalización de matrices, etc. [**I_3**] El propósito principal de estos libros se puede resumir en introducir a los estudiantes al "lenguaje básico común" para todos los científicos, propósitos que coinciden con los objetivos presentados por los programas de estudio de las asignaturas y, de nuevo, de forma totalmente independiente al resto de disciplinas[**I_1** y **I_2**].

La organización habitual que presentan estos libros no gira entorno a los problemas de modelización o "aplicaciones", sino entorno a los bloques temáticos en los que se estructura. Las referencias a las aplicaciones, cuando éstas no son nulas, aparecen muy reducidas a la ejemplificación de las herramientas matemáticas presentadas en cada una de los bloques. Al finalizar cada capítulo se dedican algunos apartados a la "aplicación-ejemplificación" de las herramientas matemáticas, en casos muy particulares, introducidas anteriormente **[I_4]**. Los

modelos matemáticos a los que hacen referencia se fabrican a partir, y de forma posterior, a la introducción de todos los conceptos matemáticos de cada tema o bloque y éstos se construyen de forma totalmente independiente de los sistemas científicos. [**I_5**]

Al margen de la organización presentada por estos libros estándares que son, sin duda, los más utilizados en la enseñanza formal de las matemáticas de CCEE, existen ciertos autores que proponen organizaciones menos aplicacionistas en los que la matemática es introducida de forma más específica para la biología (Batschelet 1978), la geología (Waltham 2000) o ciencias en general (Berry *et al.* 1989). Como contrapunto de los libros de consulta habituales, analizaremos brevemente algunos de los textos que intentan superar el aplicacionismo.

En el prólogo de Batschelet (1978), el autor aclara que el libro está planteado principalmente para un curso introductorio que se basa en dar una introducción a los procedimientos matemáticos que posteriormente serán aplicados a las diversas disciplinas particulares. Los contenidos de cada capítulo, en general mantienen la misma estructura: una primera parte introductoria del tema con alguna referencia a la motivación de las herramientas matemáticas y algunos ejemplos pendientes de resolver; en la parte principal del capítulo se presentan las herramientas matemáticas mínimas necesarias sin entrar en ellas con mucha rigurosidad y, finalmente, una colección de ejemplos de sistemas biológicos, químicos, etc. en los cuales se pueden aplicar las herramientas introducidas.

Destacamos también dos libros de texto, Waltham (2000) y Berry *et al.* (1989), los cuales apuntan ya hacia una organización matemática a enseñar nada usual empezando a superar algunos de los indicadores del aplicacionismo.

> The objectives of this book are to improve understanding of simple mathematics through the use of geological examples and improve ability to apply mathematics to geological problems […] I believe that this is more helpful than a rigid, formal treatment since formality can often obscure the underlying simplicity of the ideas. (Waltham, 2000, p.1)

> There is a growing awareness that we must not teach mathematics in isolation from its applications. In teaching mathematics to scientists, technologists and engineers, there is a plenty of opportunities to provide applications as part as the syllabus and teaching approach. There are a few textbooks which recognize this. One of the aims of writing this text has been to encourage the teaching of mathematics through its applications in science. (Berry *et al.*, 1989, p.2)

Los primeros apartados de Waltham (2000) - *Mathematics as a tool for solving geological problems* y *Common relationships between geological variables* – presentan una introducción a los fenómenos geológicos que abren diversas cuestiones que requerirán la introducción de las herramientas matemáticas para poder tratarlas. En la misma dirección, Berry *et al.* (1989), dedica las primeras secciones de cada capítulo a dar algunos ejemplos con contexto científico que hacen referencia a las nuevas técnicas que se proponen introducir.

Pero estas propuestas de organización que apuntan, en menor o mayor grado, hacia la superación de algunos de los indicadores más destacados del aplicacionismo, se enfrentan con enormes dificultades para ser integradas en el aula lo que confirma una vez más la potencia del aplicacionismo como epistemología dominante.

7. Prospectivas de la investigación

El análisis del "aplicacionismo" como epistemología dominante en las instituciones docentes requiere otros datos empíricos a parte de los programas y los libros de texto que hemos examinado hasta aquí. Nuestra propuesta es indagar en los discursos que elaboran los profesores e investigadores universitarios cuando se les pregunta por los criterios utilizados para el diseño y la gestión de la enseñanza de matemáticas para las CCEE. Nos proponemos pues hacer hablar a los propios actores del sistema de enseñanza, conociendo de antemano la dificultad de tal empresa, dada la ausencia de discursos oficiales al respecto e incluso de un vocabulario específico para describir el tipo de matemáticas que se enseñan, utilizan o difunden en las distintas prácticas universitarias (docencia e investigación). Al mismo tiempo, es probable que tengamos que distinguir distintas subinstituciones, según si consideramos investigadores en matemáticas o en CCEE, distinguiendo además entre las distintas ciencias, según el grado de matematización de las mismas (física y química, por una parte, biología y geología por otra). También es probable que los discursos cambien según el alumnado o tipo de titulación impartida.

En cualquier caso, y dejando de lado provisionalmente el problema metodológico suscitado, creemos fundamental proseguir en el estudio de las restricciones transpositivas de nivel genérico (tanto escolar como social) que dificultan la puesta en marcha de los REI y, en particular, la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria. Ya vimos en una investigación anterior (Barquero 2006) que, bajo condiciones muy particulares, es posible hacer vivir en las aulas universitarias recorridos basados en una epistemología muy distinta al "aplicacionismo". En efecto, en los REI las cuestiones se sitúan en el origen del proceso de estudio, la dialéctica de los *media* y los *medios* actúa constantemente como motor del proceso,[6] y se intentan explicitar las características principales del proceso de modelización (delimitación del sistema, construcción del modelo, puesta a prueba y estudio de sus limitaciones, superación por un nuevo modelo y una nueva delimitación del sistema, etc.).

Las restricciones que emanan de los distintos niveles de codeterminación deberían ayudarnos a explicar, por un lado, qué función y que fuerza tiene el "aplicacionismo" como epistemología dominante, cómo se expresa y cómo contribuye a la economía actual del

[6] Mientras que en el "aplicacionismo" podemos decir que se da una prioridad cronológica a los media (primero los contenidos básicos) y un carácter terminal a los medio (la "aplicación final").

sistema de enseñanza universitaria. Dado que se nos aparece como uno de los principales obstáculos para la implementación, en condiciones normales, de una enseñanza funcional de las matemáticas, su estudio también debería guiarnos en la búsqueda de sus posibles vías de superación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H. (1991), *Introducción al álgebra lineal*. Limusa Noriega.

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCON, J. (2005), La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. *Actas del I Congreso Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Universidad de Jaén*, Baeza (España).

BARQUERO, B. (2006), *Els Recorreguts d'Estudi i Investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències*. Trabajo de Investigación. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCON, J. (en prensa), Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.*.

BATSCHELET, E. (1978), *Matemáticas básicas para biocientíficos*. Madrid Dossat.

BERRY, J., NORCLIFFE, A. & HUMBLE, S. (1989), *Introductory Mathematics through Science Applications*. Cambridge University Press.

BOSCH, M., GARCÍA, F.J., GASCÓN, J. & RUIZ HIGUERAS, L. (2006), La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar, *Educación Matemática* 18.2, 37-74.

CHEVALLARD Y. (2001), Aspectos problemáticos de la formación docente [en ligne], *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm.

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2004), Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr

CHEVALLARD, Y. (2005), La didactique dans la cité avec les autres sciences. *Symposium de Didactique Comparée*, *Montpellier* 15-16 septembre 2005.

CHEVALLARD, Y. (2006), Steps towards a new epistemology in mathematics education. In BOSCH, M. (ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* (pp. 21-30).

GARCÍA, F. J. (2005), *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

GARCÍA, F.J., GASCÓN, J., RUIZ HIGUERAS, L. & BOSCH, M. (2006), Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 226-246.

GASCÓN, J. (2001), Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*. 4(2) 129-159.

KUHN, T. (1979), *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

SALAS, S.L.& HILLE, E. (1994), *Calculus.* Vol I, 3a. ed. Ed. Reverté

THURSTON, W. (1994), On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 30(2), April 1994, 61-177.

WALTHAM, D. (2000), *Mathematics. A simple tool for geologist***.** Blackwell Science

MATEMÀTIQUES

Unitat Docent: Matemàtiques **Departament:** Matemàtiques **Cicle:** 1r **Tipus:** Troncal

Número de Crèdits: 6 **Teòrics:** 4 **Pràctics:** 2

Objectius:

Aquest programa pretén un doble objectiu. El primer i més important és el de donar a l'estudiant una formació matemàtica bàsica, centrada en l'àlgebra lineal i el càlcul de funcions d'una variable, que li permeti comprendre el llenguatge de la Ciència. El segon és el d'introduir-lo al camp de la Biologia Teòrica, és a dir a la modelització matemàtica de la Biologia, per medi d'exemples senzills que poden ser analitzats amb les eines matemàtiques introduïdes prèviament.

Programa Teòric:

Tema 1: Àlgebra lineal

1.1 Preliminars. Nombres racionals i reals. Aproximació. Notació exponencial.
1.2 Sistemes d'equacions lineals
1.3 Vectors de R^n.
1.4 Matrius i càlcul matricial. Determinants. Inversa d'una matriu.
1.5 Valors i vectors propis. Diagonalització.
1.6 Aplicació al creixement lineal de poblacions.

Tema 2: Funcions d'una variable

2.1 Valor absolut. Desigualtats.
2.2 Funcions. Límits i continuïtat. Exemples de funcions importants (lineals, polinòmiques, racionals, exponencial, logaritme, trigonomètriques).
2.3 Derivada. Interpretacions geomètrica i cinemàtica. Regles de derivació.
2.4 Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Màxims i mínims. Representació de funcions. Aplicacions: problemes d'optimització.
2.5 Solució aproximada d'equacions: mètode de la bisecció i mètode de Newton.

2.6 Polinomi de Taylor. (*)
Tema 3: Càlcul integral

3.1 Primitives. Integral. Teorema fonamental del Càlcul.
3.2 Tècniques elementals d'integració. Aplicacions.
3.3 Integrals impròpies. (*)
Tema 4: Equacions diferencials
4.1 Equacions de variables separades. Exemples: creixement exponencial, desintegració radioactiva, equació logística.
4.2 Equacions lineals. Exemples

Avaluació: Consistirà en un examen final del total de l'assignatura

---

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA: Matemáticas

CARÁCTER: Troncal CRÉDITOS TEÓRICOS: 3 CRÉDITOS PRÁCTICOS: 3

CURSO ACADÉMICO: 2005/06 CICLO: Primer CURSO: Primer CUATRIMESTRE: Primero

OBJETIVOS:

- Proporcionar a los estudiantes los conocimientos que les capaciten para tratar problemas matemáticos referentes a sistemas de ecuaciones lineales, matrices, vectores, funciones, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.
- Proporcionar a los estudiantes algunos modelos matemáticos básicos utilizados en las ciencias biológicas.
- Proporcionar formación al alumno que le permita asimilar otras asignaturas de la titulación.
- Iniciar al alumno en el uso de software matemático.

TEORÍA:

Tema 1: Método de Gauss y de Gauss-Jordan. Interpretación de los sistemas lineales. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. Aplicaciones: Programación lineal; administración de recursos.

Tema 2: Matrices. Operaciones con matrices. Aplicaciones del producto de matrices: Contacto directo e

indirecto en una enfermedad contagiosa. Matriz inversa. Relación con los sistemas lineales. Rango de una matriz. Teorema de Rouchè.

Tema 3: Determinantes. Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones. Propiedades de

los determinantes. Determinantes e inversas. Regla de Cramer. Aplicaciones: Ecuaciones de curvas y superficies que pasan por puntos dados.

Tema 4: Espacios vectoriales. Base y dimensión. Aplicaciones lineales. Matriz diagonalizable. Valores y

vectores propios. Modelos discretos en Biología: Cadenas de Markov. Aplicaciones en genética. Modelo de Leslie. Explotación racional de animales.

Tema 5: Funciones reales de una variable. Dominio de una función. Ejemplos de funciones elementales.

Continuidad. Teorema de Bolzano. Aplicaciones a los modelos trigonométricos: Movimientos migratorios.

Tema 6: Derivada de una función en un punto. Reglas de derivación. Derivadas de algunas funciones. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos de una función. Depredadores y presas. Metabolismo basal.

Tema 7: Integral indefinida. Métodos de integración. Integral definida. Teoremas fundamentales del

Cálculo. Integrales impropias. Aplicaciones.

Tema 8: Funciones reales de varias variables. Curvas de nivel. Derivadas parciales. Máximos y mínimos.

Diferencial total. Aplicaciones: Optimización. Método de los mínimos cuadrados.

Tema 9: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Concepto de solución. Condiciones iniciales. Problema de

valores iniciales. Orden. Variables separadas. Análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Modelos de interacción entre especies. Modelos continuos del crecimiento de poblaciones. Crecimiento exponencial. Modelos logísticos. Genética de población.

Llicenciatura de Geologia – Universitat Autònoma de Barcelona

http://www.uab.es/

---

http://einstein.uab.es/Estudis/geocie1.htm

Objectius

Aquest programa pretén un doble objectiu. El primer i més important és el de donar a l'estudiant una formació matemàtica bàsica, centrada en l'àlgebra lineal i el càlcul de funcions d'una variable, que li permeti comprendre el llenguatge de la Ciència. El segon és el d'introduir-lo al camp de la Geologia, és a dir a la modelització matemàtica, per medi d'exemples senzills que poden ser analitzats amb les eines matemàtiques introduïdes prèviament.

Continguts

1. Nombres

1.1. Nombres racionals i reals. Aproximació. Notació exponencial. Valor absolut. Desigualtats.

1.2. Potències. Logaritmes.

1.3. Combinatòria. Binomi de Newton.

2. Àlgebra Lineal

2.1. Vectors. Independència Lineal. Bases. Canvis de base.

2.2. Matrius i càlcul matricial. Determinants. Inversa d'una matriu.

2.3. Valors i vectors propis. Diagonalització.

2.4. Aplicacions i exemples.

3. Funcions d'una variable. Derivades.

3.1. Funcions. Límits i continuïtat. Exemples de funcions importants (lineals, polinòmiques, racionals, exponencials, logarítmiques, trigonomètriques)

3.2. Derivada. Interpretacions geomètriques i cinemàtica. Regles de derivació.

3.3. Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Màxims i mínims. Representació de funcions. Aplicacions: problemes d'optimització.

3.4. Solució aproximada d'equacions: mètode de bisecció i mètode de Newton.

3.5. Polinomi de Taylor.

4. Càlcul integral

4.1. Primitives. Integral. Teorema fonamental de Càlcul.

4.2. Tècniques elementals d'integració. Aplicacions.

4.3. Integrals impròpies.