# LES PROFESSEURS EN FORMATION INITIALE FACE AU CASSE-TÊTE DES NOMBRES

Gisèle Cirade, UMR ADEF & IUFM de Midi Pyrénées, ERTe 64 GRIDIFE, France gisele.cirade@toulouse.iufm.fr

**Résumé**. Par le moyen d'une *étude clinique* de la formation dispensée durant plusieurs années aux professeurs stagiaires de mathématiques dans le cadre de l'IUFM d'Aix-Marseille, nous avons dégagé certaines des difficultés rencontrées par ces élèves professeurs et mis en évidence le fait que, presque toujours, celles-ci sont des *révélateurs* d'obstacles rencontrés *par la profession* elle-même. Nous présentons ici, en les analysant, certaines des difficultés éprouvées à propos des *systèmes de nombres*, en montrant l'écart considérable qui existe aujourd'hui entre les *mathématiques à enseigner* et le corpus idéal de mathématiques *pour le métier d'enseignant* qui devrait permettre à la profession d'élaborer des mathématiques *pour l'enseignement* authentiques au plan épistémologique, cohérentes formellement et didactiquement adéquates.

Resumen. Mediante un estudio clínico de la formación impartida durante algunos años a profesores de matemáticas en prácticas en el marco del IUFM de Aix-Marsella, hemos destacado algunas de las dificultades que encuentran estos alumnos profesores y hemos puesto en evidencia el hecho que, casi siempre, estas dificultades son reveladoras de obstáculos con los que topa la propia profesión. Presentamos aquí, analizándolas, algunas de las dificultades relativas a los sistemas de números, mostrando la distancia considerable que existe hoy día entre las matemáticas a enseñar y el corpus ideal de matemáticas para el oficio docente que debería permitir a la profesión elaborar unas matemáticas para la enseñanza auténticas en el plano epistemológico, formalmente coherentes y didácticamente adecuadas.

#### Introduction

Il n'est jamais facile de repérer et d'étudier les problèmes auxquels une profession est, de fait, confrontée. La recherche que nous avons menée dans le cadre de notre travail de thèse (Cirade 2006) nous a permis à la fois d'explorer les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves professeurs en formation à l'IUFM et de mettre en évidence que, presque toujours, ces difficultés sont des *révélateurs* de *problèmes* rencontrés *par la profession* elle-même.

Dans le travail que nous avons mené, nous nous sommes arrêtée sur deux grands systèmes de conditions et de contraintes qui pèsent sur la dynamique de professionnalisation étudiée : d'une part, les conditions et contraintes émanant de la *profession* de professeur de mathématiques ; d'autre part, celles qu'exerce la *formation initiale* des professeurs dans le cadre de l'IUFM.

Cette recherche s'appuie sur une *étude clinique* de la formation des professeurs stagiaires de mathématiques dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille. La richesse — mais aussi la difficulté — d'un abord clinique des phénomènes didactiques est indissolublement liée à la *dialectique des médias et des milieux en didactique*, ainsi que le précise l'extrait suivant (Chevallard 2007a, p. 71) :

Comment développer la dialectique des médias et des milieux en didactique ? Il existe une réponse commune : il suffirait de singer l'image d'Épinal des sciences de la nature – lesquelles ont été pourtant si longtemps si incertaines d'elles-mêmes à cet égard ! Contre ce suivisme méthodologique, j'ai poussé en avant la notion de *clinique des formations*, et plus généralement de *clinique de la diffusion praxéologique*. L'obstacle central, ici, est que, dans une telle clinique, on ne joue pas *contre la nature*, c'est-à-dire qu'on ne dialogue pas avec un milieu « adidactique », mais avec un système *doué d'intentions*. Une technique développée pour contourner cette difficulté structurelle consiste à repérer dans les « réponses » du système des éléments qui ont quelque chance de ne pas participer d'une stratégie intentionnelle, mais qui simplement *sont là*, comme est là un symptôme auquel on ne commande pas.

Les développements que nous allons présenter permettront – nous le souhaitons – de fournir des exemples illustrant ces propos.

La recherche menée à bien a permis de mettre en évidence que, lors de leur formation initiale, les professeurs stagiaires sont confrontés à ce qui devrait être pour beaucoup une découverte, à condition que celle-ci n'est pas aussitôt refoulée : *les mathématiques à enseigner* se révèlent, de façon souvent inattendue, *problématiques*. La profession, avec sa tradition écrite (les manuels notamment) et sa tradition orale (les contacts avec les « collègues »), devrait pouvoir assumer la fonction que doit assumer toute profession : pourvoir aux besoins de connaissances et de culture professionnelles de ses membres. Mais en nombre de cas cette fonction essentielle n'est pas assumée, ou l'est mal.

Nous avons choisi de présenter et d'analyser, dans le cas des systèmes de nombres, quelquesunes des difficultés objectives auxquelles est ainsi confrontée la profession. Les nombres constituent une part essentielle autant qu'immémoriale de l'univers mathématique. Or, dans le curriculum d'aujourd'hui, cette part est mitée par d'innombrables lacunes : tout ici semble à rebâtir. L'ancienne construction scolaire s'est par pans entiers effondrée. La construction « moderne » des systèmes de nombres, à son apogée vers 1970, n'est plus au secondaire qu'un souvenir. Quant à la construction poussée en avant par les programmes actuels du collège, en France, elle suppose une problématique « réaliste », qui n'a jamais été véritablement reçue, comprise et mise en œuvre par la profession. La distance est alors importante entre, d'un côté, les mathématiques à enseigner et, de l'autre, le corpus de « mathématiques pour le métier d'enseignant » qui devrait permettre à cette profession d'élaborer des « mathématiques pour l'enseignement » à la fois authentiques épistémologiquement, cohérentes formellement, adéquates didactiquement. Ce problème, qui reste ouvert, interpelle frontalement la profession.

#### 1. Présentation de l'étude clinique

La formation que nous avons observée cliniquement au long de plusieurs années est celle des élèves professeurs de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille, sur les deux années dont

elle se compose : en première année, ces élèves sont des étudiants préparant le CAPES <sup>1</sup> de mathématiques, tandis qu'en deuxième année ce sont des professeurs stagiaires ayant en responsabilité une (ou deux) classe(s) de collège ou de lycée. Nous nous centrerons sur la formation dispensée en deuxième année <sup>2</sup>, essentiellement car c'est là qu'apparaissent de façon éclatante les problèmes rencontrés par la profession. Mais il faut noter que, bien souvent, ces problèmes pourraient déjà être rencontrés dès la première année de formation, comme nous le verrons à l'occasion de l'étude du premier cas.

L'étude clinique que nous avons menée s'est donné pour objet la *parole* qui circule au sein de la formation étudiée : parole de *formés*, parole de *formateurs*, paroles de ces *professionnels de terrain* que sont les professeurs conseillers pédagogiques, maîtres de stage des élèves professeurs de deuxième année.

Pour saisir la parole des formés et de leurs formateurs, nous avons en particulier exploité un dispositif interne à la formation, celui des *Questions de la semaine* auquel fait écho le *Forum des questions*, où formés et formateurs ont tour à tour la parole, sous une forme écrite ou rapidement mise par écrit. Chaque semaine ouvrable, la rubrique des *Questions de la semaine* permet à chaque élève professeur de consigner par écrit une difficulté à laquelle il s'est heurté ou une question qu'il s'est posée, dans le cadre de son travail, au cours de la période écoulée. Le *Forum des questions*, quant à lui, est formé des éléments de réponse qui seront apportés par écrit, après avoir été présentés oralement, dans le cadre de la formation. Plus précisément, ces éléments de réponse constituent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de construire une réponse qu'il mettra en œuvre personnellement et provisoirement – en attendant d'autres matériaux éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse « établie ».

Quant à la parole des professionnels de terrain, c'est à travers les rapports rédigés par les maîtres de stage en vue de la formation et de la validation des professeurs stagiaires que nous y avons eu accès. Leur examen permet de constater que si la référence aux mathématiques n'est pas totalement absente de ces rapports, elle n'est pas non plus le premier axe des narrations ou des analyses effectuées. En effet, si un examen attentif du corpus étudié révèle un *bruissement* constant du « souci mathématique », celui-ci est plus exprimé à travers des principes didactiques qu'illustré sur un matériel mathématique déterminé – même si un tel matériel apparaît, ça et là, pour appuyer tel ou tel développement. Ce que révèlent les corpus étudiés, c'est un refoulement de la mise en débat des mathématiques : on n'en parle guère entre gens de métier, pour cette raison que chacun est censé bien les connaître. Or, comme nous allons le voir, les élèves professeurs vont découvrir plus ou moins vite que, dans des

\_\_\_

<sup>1.</sup> Le CAPES, certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré, est le concours de recrutement des professeurs certifiés pour les disciplines générales. Les lauréats de ce concours suivent alors une formation en deuxième année d'IUFM, en tant que professeurs stagiaires.

<sup>2.</sup> Pour une présentation de la formation dispensée en deuxième année, voir Chevallard & Cirade (2006, à paraître). On peut aussi consulter en ligne les archives du séminaire de formation des professeurs stagiaires de mathématiques (Chevallard 2007b).

contextes et des modalités renouvelés, les mathématiques seront indéfiniment un problème, sinon *le* problème, du métier qu'ils embrassent.

Dans cette communication, c'est essentiellement sur la parole des *formés* que nous mettrons l'accent <sup>3</sup>. Cependant, il convient de souligner que la dynamique de la formation tresse la parole des formés avec celle des formateurs et que, sans la formation, sans le dispositif des *Questions de la semaine*, sans le *Forum des questions* qui lui fait écho, cette parole des formés n'existerait pas. Nous nous permettrons d'ailleurs d'emprunter librement certains matériaux élaborés lors de la formation. Il nous faut souligner que les traces écrites sur lesquelles nous avons travaillé ont, dans notre étude, en tant que matériel clinique, un double mérite : d'une part, elles n'ont pas été sollicitées par le chercheur, d'autre part, elles n'ont pas davantage été rédigées en vue de contribuer à répondre à la question que le chercheur étudie.

Nous allons montrer sur quelques exemples comment la tribune offerte aux élèves professeurs par la formation permet de voir ce que, ordinairement, les professionnels du métier sont portés à dissimuler en le refoulant : la formidable pression de la problématicité mathématico-didactique éprouvée par les professeurs. Nous nous en tiendrons ici aux questions soulevées à propos des systèmes de nombres et, plus particulièrement, à celles portant sur les *fractions*.

## 2. Le recours à l'écriture fractionnaire : un problème théorique

Pour commencer, arrêtons-nous sur le premier type de besoins numériques rencontré au collège qui, ne pouvant être satisfait par les décimaux, engendre le recours à l'écriture fractionnaire : le besoin de rationnels non décimaux. La question est aujourd'hui fort peu claire chez les élèves professeurs et, plus généralement, chez les professeurs, en dépit de la problématique qui s'exprime nettement dans les programmes du collège, anciens et rénovés. Nous prendrons tout d'abord appui sur une question formulée par une élève professeur ayant en responsabilité une classe de 5<sup>e</sup>, à l'occasion de la réalisation de la séquence qui lui permettra de constituer son corpus B <sup>4</sup>.

Le thème de mon corpus B est la comparaison et l'addition en écriture fractionnaire. Pour l'instant, on a écrit que  $\frac{a}{b}$  est le quotient de a par b... (Je comptais donner la définition «  $\frac{a}{b}$  est le nombre qui, multiplié par b, donne a » lorsque j'entamerai la multiplication en écriture fractionnaire.) Puis j'ai précisé que,

<sup>3.</sup> Les rapports des maîtres de stage – pour les raisons que nous avons évoquées – ne seront pas sollicités dans cette communication. Il nous a cependant paru important de préciser qu'ils faisaient partie du dispositif clinique mis en place tout en justifiant leur absence de prise en compte dans le cas présent.

<sup>4.</sup> Chaque professeur stagiaire doit rassembler en un corpus présenté par ses soins l'ensemble des traces écrites de l'activité de sa classe lors des quelques séances qui précèdent et qui suivent la séance où il a fait l'objet d'une visite *in situ* dans un but de formation et/ou de validation. En pratique, ce document appelé traditionnellement « corpus B », réunit les traces écrites de deux élèves choisis par le professeur stagiaire au sein de sa classe. Le corpus B participe de la prise d'information sur l'activité du professeur stagiaire et joue un rôle éminent dans le jugement qui sera porté sur lui en fin d'année.

lorsque a et b étaient des nombres entiers, le quotient  $\frac{a}{b}$  était appelé fraction (comme je l'ai vu dans de nombreux livres, ainsi qu'avec ma PCP). Depuis ma visite et la discussion qui a suivi, je sais qu'il y a un problème dans cette définition (entre la nature et l'écriture d'un nombre), mais je dois dire que je saisis mal le problème. Peut-on revenir un peu sur tout ça ?

Cette question est révélatrice d'une croyance ancienne dans la culture mathématique scolaire. Pour la doxa professorale, semble-t-il, ce qu'on va noter a priori  $\frac{4}{3}$  désignerait le « quotient » de 4 par 3. Mais qu'entend-on par quotient ? La naturalisation de l'opération de division pratiquée avec les entiers puis avec certains décimaux conduit sans doute à supposer que cette opération est toujours possible, ou du moins à faire comme s'il en était ainsi. De là le postulat implicite que l'on opèrerait dans un corps de nombres : la fraction  $\frac{4,2}{3}$  désignerait, dans cette vision naturalisante des choses, un nombre dont l'identité serait révélée en effectuant  $extit{la}$   $extit{division}$  de 4,2 par 3, opération que, à la manière française, on « pose » ainsi :

Dans ce cas, l'écriture fractionnaire  $\frac{4,2}{3}$  apparaît comme une manière (provisoire) de désigner le nombre (décimal) 1,4. Qu'en est-il alors de  $\frac{4}{3}$ ? Il est intéressant de noter qu'on trouve très rarement dans l'enseignement prodigué au collège, en  $6^e$  ou en  $5^e$ , la démonstration que ce quotient, s'il existe, *n'est pas* un nombre décimal. Il est pourtant facile de montrer que si, par exemple, on prenait pour quotient q=1,33, on aurait  $3\times q=3,99\neq 4$ ; et, plus généralement (mais de façon plus « abstraite »), que si l'on prenait un décimal q dont la dernière décimale non nulle soit l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le produit  $3\times q$  aurait pour dernière décimale, selon le cas, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, mais jamais 0, ce qui montre qu'on n'obtient jamais l'égalité  $3\times q=4$ . L'idée semble donc prévaloir que la notation fractionnaire  $\frac{a}{b}$  est un artifice utile qui, toutefois, reste un artifice face à la véritable « réalité numérique », celle du nombre qui serait le quotient de a par b, et qui s'obtiendrait par une extension de l'algorithme usuel de division. C'est au reste ce que formalise la notion de *développement décimal* (« illimité ») d'un rationnel, avec sa partie apériodique et sa partie périodique : ainsi la fraction (ou l'écriture fractionnaire)  $\frac{103}{666}$  désigne-t-elle le quotient de la division de 103 par 666, que l'on trouve égal à  $0,1546\overline{546}$ .

Il s'agit là d'une idée prégnante  $^5$ , qui barre l'accès à un point essentiel de la construction – ou de la découverte – des systèmes de nombres. Tout se passe comme si cette vision des fractions était hantée par un spectre : celui de la « valeur » de la fraction, soit le nombre que désignerait la fraction et qui serait *la véritable réalité numérique*, objet de tout calcul et de toute considération. Un tel point de vue empêche sans doute de faire fond pleinement sur les écritures fractionnaires. Mais ce qu'on peut aussi noter dans la question précédente, c'est la dynamique normative impulsée par la formation dispensée à l'IUFM : dans le même temps, cette élève professeure écrit « Pour l'instant, on a écrit que  $\frac{a}{b}$  est le quotient de a par b... » et « Je comptais donner la définition " $\frac{a}{b}$  est le nombre qui, multiplié par b, donne a" lorsque j'entamerai la multiplication en écriture fractionnaire ». C'est cette même dynamique normative que l'on retrouve dans la question suivante, et dans laquelle on voit surgir, exprimé certes de façon quelque peu violente, un problème également présent dans la question que

Pour définir la fraction  $\frac{b}{a}$  ( $b \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$ ), on dit que c'est l'unique solution de l'équation  $a \times x = b$ . Donc, sous-entendu, la multiplication est bien définie! Mais quelle est cette multiplication? On définit un objet  $\frac{b}{a}$  sur lequel on sait déjà opérer! En principe, on définit des objets, *puis* des opérations sur ces objets.

Cette question donne l'exemple même d'un paralogisme qu'il s'agirait d'éradiquer dans la formation des membres de la profession : l'élève professeur raisonne dans le paradigme « moderniste » au lieu de se placer d'un point de vue « réaliste », qui est celui adopté par les programmes de mathématiques du collège. En classe de  $6^e$ , en effet, les quotients sont *en principe* introduits comme suit : le nombre  $\frac{a}{b}$  (où  $b \neq 0$ ) est défini comme *l'unique nombre x vérifiant l'équation bx* = a. Ce qu'un commentaire du programme de  $6^e$  explicite dans les termes suivants  $6^e$ :

Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :

nous avons citée précédemment.

\_

<sup>5.</sup> La prégnance de cette idée est si forte qu'on la voit réapparaître dans le document d'accompagnement du programme du cycle terminal de la série littéraire paru en janvier 2006 où figure une rubrique intitulée Écriture décimale d'un nombre rationnel, qui commence ainsi : « La définition donnée en classe de sixième de l'écriture fractionnaire  $\frac{a}{b}$  (a et b étant deux entiers naturels avec b non nul) est : " $\frac{a}{b}$  est le nombre qui multiplié par b donne a, autrement dit  $\frac{a}{b}$  est le résultat de la division décimale de a par b." » Le commentaire « autrement dit  $\frac{a}{b}$  est le résultat de la division décimale de a par b » est un ajout – et une « invention » – des rédacteurs du document d'accompagnement cité : ce commentaire n'apparaît nullement, sous cette forme ou dans une autre formulation, dans le programme de  $6^e$  ancien ou nouveau.

<sup>6.</sup> Nous avons ici conservé la formulation adoptée par l'ancien programme, qui ne diffère du nouveau que sur des points de détails.

- le quotient  $\frac{a}{b}$  est un nombre,
- le produit de  $\frac{a}{b}$  par b est égal à a.

Ceci permet de considérer un nombre tel que  $\frac{4}{3}$  comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.

La problématique adoptée au collège en ce qui concerne les *nombres* (en général) est de type réaliste: on suppose – il s'agit là d'un composant clé de la *théorie*,  $\Theta$ , sous-jacente au curriculum mathématique du collège – qu'existent les nombres dont on a besoin pour mesurer les grandeurs usuelles. Dire qu'il s'agit de nombres signifie, à ce niveau, qu'ils forment ensemble un demi-anneau unitaire, commutatif, intègre et ordonné dont les lois prolongent celles de  $\mathbb{N}$ . Il importe d'observer qu'à partir du moment où on suppose que ce système de nombres,  $\mathcal{N}$ , vérifie ces propriétés, les opérations d'addition et de multiplication de  $\mathcal{N}$  découlent implacablement de la définition posée ci-dessus  $^7$ .

Le point « faible » de la construction précédente est, à l'évidence, qu'on ne s'y préoccupe pas de sa consistance. Il resterait donc à montrer que l'anneau commutatif, unitaire, intègre supposé existe bien, c'est-à-dire, en termes de logique, que si l'hypothèse d'existence du système des nombres entiers naturels n'entraîne pas de contradiction, alors il en est de même de l'hypothèse de l'existence du système des quotients d'entiers naturels. Au collège et audelà, on s'en tient à l'approche « réaliste » des nombres sagement proposée par les programmes, en n'oubliant pas que la seule preuve d'existence possible serait un résultat de consistance relative, du type : si le « système de nombres » supposé, par exemple le système  $\mathcal{N}$  des quotients  $\frac{a}{b}$ , comportait une contradiction, alors il en irait de même d'un système de nombres réputé pourtant non contradictoire, ici  $\mathbb{N}$ . Tel est le sens – bien mal compris, si l'on voit en elles des preuves de non-contradiction absolue – des prétendues « constructions » de  $\mathbb{Q}_+$  à partir de  $\mathbb{N}$ , de  $\mathbb{Z}$  à partir de  $\mathbb{N}$ , etc.

On notera que cette question aurait déjà pu être étudiée – ou, plutôt, aurait déjà  $d\hat{u}$  être étudiée – lors de l'année de préparation au CAPES. Comme le précise la note parue au *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* n° 1 du 1<sup>er</sup> janvier 2004, « les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné. » Il devrait donc être indispensable de connaître les développements

\_\_\_

<sup>7.</sup> Soit ainsi à déterminer le *produit* de  $x = \frac{a}{b}$  et de  $y = \frac{c}{d}$ ; en multipliant membre à membre les égalités bx = a et dy = c, on obtient l'égalité (bx)(dy) = ac. Comme on a (bx)(dy) = (bd)(xy) il vient (bd)(xy) = ac, égalité qui montre que  $xy = \frac{ac}{bd}$  soit donc que  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ . Soit de même à déterminer la *somme* de  $x = \frac{a}{b}$  avec  $y = \frac{c}{d}$ ; en multipliant les égalités bx = a et dy = c respectivement par d et b on obtient les égalités d(bx) = da et b(dy) = bc, soit encore (bd)x = ad et (bd)y = bc. En ajoutant membre à membre ces égalités, on obtient (bd)x + (bd)y = ad + bc, soit encore (bd)(x + y) = ad + bc, égalité qui montre que  $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$ , soit donc que  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ .

précédents pour traiter par exemple le sujet suivant de l'épreuve d'exposé sur un thème donné (la numérotation et le libellé sont ceux de la session 2007 du CAPES) :

15. Construction du corps **Q** des rationnels. Nombres décimaux, développement décimal d'un nombre rationnel.

Le tableau serait bien sûr grossièrement incomplet si l'on n'évoquait pas d'autres problèmes sensibles rencontrés par les professeurs stagiaires – problèmes qui ont, en partie au moins, motivé historiquement la construction de la théorie des grandeurs, à laquelle les manuels d'autrefois faisaient une place des plus explicites. La disparition somme toute récente de cette conceptualisation classique a fait émerger divers paralogismes dont le plus commun, sans doute, est bien exprimé dans la question suivante.

En  $6^e$ , lorsqu'on introduit les fractions, on « sépare » les fractions en deux groupes. Tout d'abord les fractions inférieures à 1 (et positives) : on parle de  $\frac{3}{4}$  d'un gâteau, on coupe le gâteau en quatre parts

égales et on en prend 3 parts. Ensuite les fractions supérieures à 1. Pour faire comprendre aux élèves ce à quoi cela correspond, cela me semble plus dur. Avec les deux professeures avec lesquelles je travaille pour les  $6^{es}$ , on n'arrivait pas à trouver d'exemples d'emplois de fractions supérieures à 1, si ce n'est la reproduction d'une figure à l'échelle  $\frac{6}{5}$  par exemple. Quels emplois peut-on proposer ?

Comme précédemment, rien dans les programmes ne laisse entendre qu'il faut « séparer » les fractions en deux groupes. L'erreur consiste ici à confondre un certain *objet* – tel un *gâteau* – et telle *grandeur* qui peut lui être associée – tel le *poids* du gâteau. Dès lors que cette distinction est faite, c'est-à-dire dès lors qu'on renonce à parler des « trois quarts d'un gâteau » – expression qui ne saurait avoir, mathématiquement, de sens univoque – pour parler des « trois quarts du *poids* d'un gâteau », la difficulté évoquée dans la question s'évanouit : comme on parle des trois quarts du *poids* d'un gâteau, on peut très bien parler des *six cinquièmes* du poids d'un gâteau. Mais une *théorie* des grandeurs est alors nécessaire, qui seule fournit des entités sur lesquelles on peut opérer comme d'aucuns rêvent vainement d'opérer sur les objets eux-mêmes, et qui permet donc d'assumer le détour par les grandeurs dans le trajet qui conduit des *objets* aux *mesures* <sup>8</sup>. On retrouve ici le désajustement évoqué au-début de cette section, relativement à la *théorie* sous-jacente au curriculum mathématique du collège.

#### 3. La simplification des fractions : un problème technologique

Les questions concernant les fractions sont légion et portent aussi, pour une grande partie d'entre elles, sur « l'écriture fractionnaire », ainsi qu'on le voit dans la question suivante :

\_

<sup>8.</sup> Dans les nouveaux programmes du collège, on peut en particulier lire, dans la section intitulée *Grandeurs et mesure* du programme de 6<sup>e</sup> : « Par exemple, le recours aux longueurs et aux aires permet d'enrichir le travail sur les nombres non entiers et les opérations étudiées en classe de sixième. »

Doit-on parler de la « fraction »  $\frac{2}{3}$  ou de « l'écriture fractionnaire »  $\frac{2}{3}$  en classe de 4<sup>e</sup> ? Il me semble que

l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ?

Le flou qui enveloppe de fait la question des écritures fractionnaires et des nombres rationnels trouve à s'exprimer à propos de la question de la *simplification* des fractions. Les questions formulées par les promotions des années 2000-2001 à 2005-2006 montrent à cet égard un embarras dont la source est en vérité multiple. Le premier fait qui conduit les professeurs stagiaires à s'interroger sur la simplification est lié à une attitude réflexe qui semble induite par le précepte : « Ne jamais laisser une fraction non simplifiée ! » Le désir de voir simplifier les fractions se manifeste le plus nettement en classe de 4<sup>e</sup>, sans doute parce que les élèves professeurs sont portés à associer l'idée de simplification avec la notion de forme *irréductible* d'une fraction dont l'étude figure, non pas au programme de 4<sup>e</sup>, mais au programme de la classe de 3<sup>e</sup>. Voici un petit florilège de questions portant sur ce sujet.

- 1. En  $4^{e}$ , peut-on suggérer les simplifications des écritures fractionnaires, même si elles ne sont pas au programme ?
- 2. Bien que la mise sous forme de fraction irréductible ne soit pas exigible en 4<sup>e</sup>, est-il possible d'inciter les élèves à simplifier au maximum ? (Application de la règle d'égalité des fractions.)
- 3. En 4<sup>e</sup>, peut-on enlever des points (en DS) si les écritures fractionnaires ne sont pas simplifiées « au maximum », alors que cela n'apparaît pas comme étant une compétence exigible (en fait cela n'apparaît pas dans le programme)? Personnellement, je pense qu'il vaut mieux donner aux élèves de bonnes habitudes, mais je ne sais pas si on peut les « pénaliser » si ce n'est pas fait...
- 4. En 4<sup>e</sup>, dans le chapitre « Nombres relatifs en écriture fractionnaire », on incite les élèves à simplifier les écritures fractionnaires, bien que la forme irréductible ne soit pas exigible. Cependant la calculatrice permet d'obtenir une fraction sous la forme irréductible. Comment gérer l'utilisation de la calculatrice dans ce cas ?
- 5. J'ai du mal à cerner ce que les élèves de 4<sup>e</sup> doivent savoir à propos de la simplification des fractions. Vaut-il mieux essayer déjà de leur faire sentir l'existence de nombres premiers ou se contenter de cas très simples en utilisant les critères de divisibilité par 2, 3, 5 ?
- 6. Est-on en droit de donner des exercices proposant des simplifications de fractions (même si cela n'est pas une compétence exigible) sachant que, pour effectuer un produit de fraction, on conseille (dans les manuels scolaires) de simplifier avant d'effectuer les calculs ?
- 7. Comment motiver la simplification des fractions ?

Qu'elles situent l'opération de simplification comme une obligation élémentaire quasi automatique ou qu'elles s'interrogent sur ses raisons d'être, les questions précédentes semblent vouloir faire l'économie d'une interrogation fondamentale à propos de cette *notion*, et du *mot* même par lequel on la désigne. Supposons que l'on doive comparer les fractions  $\frac{3}{7}$ 

et  $\frac{12}{25}$ ; il n'est pas déraisonnable en ce cas (puisque 3 divise 12 alors que 7 ne divise pas 25) de réécrire la fraction  $\frac{3}{7}$  sous la forme  $\frac{12}{28}$ , ce qui fait apparaître d'un simple coup d'œil que  $\frac{3}{7}$  =  $\frac{12}{28} < \frac{12}{25}$ . Dans ce cas, on l'aura noté, il s'agit moins de « simplifier » que de remplacer la fraction par une écriture *plus adaptée* au micro-projet mathématique dans lequel on se situe. Comme on vient de le voir, le geste approprié consiste parfois en une « complexification » de l'écriture dont on dispose au départ. En ce sens, les réécritures d'une fraction fonctionnellement utiles peuvent être diverses, en fonction du projet mathématique dans lequel cette réécriture prend place.

Le cas de la multiplication, évoqué dans l'une des questions, est sans doute conforme à la problématique évoquée : en travaillant sur des nombres plus petits, dès lors qu'il s'agit, non pas de les comparer, mais de les *multiplier*, on augmente la fiabilité des calculs effectués et, accessoirement, on peut se dispenser du recours à la calculatrice. Mais, à l'évidence, ces jeunes professeurs sont plongés dans une culture mathématique qui est sévèrement mutique : l'information mathématique utile reste largement étrangère au quotidien de la profession. Indiquons-en rapidement les principaux linéaments. Le thème de la simplification désigne en réalité deux questions apparentées mais distinctes. La première, on l'a évoquée, est celle des réécritures fonctionnellement utiles d'une écriture fractionnaire donnée. La seconde peut être vue sans doute comme un cas particulier de la première, mais c'est un cas qui mérite une attention spécifique : c'est la question de l'existence et du maniement d'une écriture « canonique » d'une écriture fractionnaire donnée, en désignant par « écriture canonique » un système de notation dans lequel toute fraction (d'entiers ou de décimaux) aurait une écriture bien déterminée, *unique*, en sorte que deux écritures fractionnaires désignant le même nombre auraient formellement la même écriture canonique.

Le résultat essentiel est à cet égard le suivant : étant donné une fraction de nombres décimaux strictement positifs  $\frac{a}{b}$ , il existe un couple unique (c,d) d'entiers strictement positifs tels que  $\frac{c}{d}$  =  $\frac{a}{b}$ , c et d n'ayant pas de diviseurs communs autres que 1. De ce résultat (sur lequel nous allons revenir), on peut déduire l'algorithme suivant pour obtenir ce qu'on nommera la *forme irréductible*  $\frac{c}{d}$  d'une fraction  $\frac{a}{b}$ : tout d'abord, si a ou b n'est pas un entier, on multiplie ces nombres par une puissance de 10 convenable pour obtenir une fraction d'entiers égale,  $\frac{a'}{b}$ . On procède ensuite à des divisions de a' et b' par des diviseurs entiers communs à a' et b', et cela jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction d'entiers dont le numérateur et le dénominateur n'auront plus de diviseur commun hormis 1 ; en vertu de l'unicité affirmée dans le théorème, cette fraction sera alors la forme irréductible cherchée. Le seul point qui resterait à justifier, c'est que la procédure de divisions successives par un même nombre entier strictement supérieur à 1 ne se poursuit pas indéfiniment : la chose résulte évidemment du fait que, dans  $\mathbb{N}^*$ , il n'existe pas de suite descendante infinie. On retrouve ainsi le geste décrit familièrement

par les professeurs stagiaires selon lequel on essaie de simplifier « le plus possible » : s'il en est effectivement ainsi, on aboutit bien à la forme irréductible.

Mais on voit que *l'obtention de fait* de la forme irréductible ne suppose pas, inversement, la connaissance du théorème formulé plus haut : on peut, dès la  $4^e$  (et même avant), en « simplifiant le plus possible », obtenir de fait la forme irréductible des fractions manipulées, sans pour cela s'interroger sur l'existence et l'unicité d'une telle écriture. Cette manipulation permet notamment de voir que deux fractions sont égales dès lors que l'une et l'autre donnent par simplification la même fraction d'entiers. Mais la réciproque pose problème si l'on ne dispose pas du résultat d'unicité : comment conclure, par exemple, que si c et d d'un côté sont premiers entre eux et si e et f d'un autre côté sont premiers entre eux, et si f on f a f soit f e et f ? La situation se règle aisément, bien entendu, si l'on a soit f e et f soit f e et f f mais le cas général est beaucoup plus résistant. Pour le montrer, considérons la contraposée de la proposition en cause : si f et f sont des fractions irréductibles et si f e f alors f e et f et f sont des fractions irréductibles et si f e f divise donc f e et f et f implique l'égalité f e f sont des fractions de la même façon que f et f divise f et f divise f et f et f implique l'égalité f e f et f et

Cette démonstration est regardée aujourd'hui comme ne pouvant pas être rendue disponible au collège. Une voie possible pour contourner la difficulté est alors la suivante : au lieu de prendre pour définition de la forme irréductible celle que nous avons évoquée (le numérateur et le dénominateur sont des entiers positifs premiers entre eux), on peut adopter, au niveau technologique, une définition qui ne répond pas immédiatement à l'usage technique de simplifier en divisant numérateur et dénominateur jusqu'à ne plus pouvoir le faire, mais qui se révèle plus maniable au plan technologique. Étant donné une fraction d'entiers  $\frac{a}{b}$ , avec a et b non nuls, on dira que  $\frac{c}{d}$  est une forme minimale de  $\frac{a}{b}$  s'il n'existe pas de fraction  $\frac{c'}{d}$  telle que c' < c et  $\frac{c'}{d'} = \frac{a}{b}$ . Le résultat d'existence et d'unicité attendu peut alors s'établir de la façon suivante, en commençant par l'unicité. Si  $\frac{c}{d}$  est une forme minimale de  $\frac{a}{b}$  et si  $\frac{c'}{d}$  en est une autre, on a nécessairement c' = c; comme  $\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}$ , il en résulte aussitôt que d' = d.

L'unicité étant ainsi démontrée, il reste à établir l'existence. C'est ici que la voie ouverte par la définition que nous avions posée présente un avantage redoutable, celui de fournir une démonstration d'apparence naturelle. Pour a et b donnés, considérons en effet l'ensemble des entiers c tels qu'il existe d vérifiant l'égalité  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ; cet ensemble n'est pas vide (il contient a, et aussi 2a, 3a, etc.) : on prend alors le premier (le plus petit) élément de cet ensemble : la démonstration est faite ! Bien entendu, dire que l'on prend le premier élément de cet ensemble infini, soit de  $\{c \in \mathbb{N}^* \mid \exists d \in \mathbb{N}^* : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\}$ , suppose que l'on se réfère à la propriété de l'ordre

de N d'être un *bon ordre*, laquelle équivaut à d'autres propriétés puissantes (comme il en va de l'axiome de récurrence de Peano) et entraîne toutes les propriétés importantes sur les entiers, division euclidienne et théorème de Gauss inclus. Notons ici, en passant, que si l'on a  $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ , alors les fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{u}{v}$  ont la même forme minimale.

Cela noté, on voit à l'évidence que si  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ , alors c et d n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité : la forme minimale est irréductible. Mais la réciproque est-elle vraie ? Énonçons d'abord la propriété suivante : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , où  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ , il existe un entier n tel que a = nc et b = nd. Avant d'établir ce théorème, tirons-en ce corollaire essentiel : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  avec (c, d) = 1, c'est-à-dire avec  $\frac{c}{d}$  non simplifiable, alors  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ . En effet, soit  $\frac{c'}{d}$  la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ ; c'est aussi la forme minimale de  $\frac{c}{d}$ , en sorte qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 1 tel que c = nc' et d = nd'. Comme on suppose que c et d sont premiers entre eux, on a aussi nécessairement n = 1, et donc c = c' et d = d', CQFD.

Ce résultat induit l'algorithme mis en œuvre *de facto* au collège : pour trouver la forme irréductible d'une fraction, simplifier la fraction jusqu'à ce qu'elle ne soit plus simplifiable. La *technologie* évoquée – fondée sur la notion de forme minimale d'une fraction d'entiers – rejoint ainsi la *technique* usuelle de « simplification ».

Pour que l'exposé soit complet, il reste à démontrer la propriété dont nous venons d'examiner le corollaire. Supposons donc  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  avec  $\frac{c}{d}$  minimale. On a évidemment  $c \le a$ . Effectuons la division euclidienne de a par c; on obtient l'égalité a = nc + r, où  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \le r < c$ . On a alors  $b = a \times \frac{b}{a} = a \times \frac{d}{c} = (nc + r) \times \frac{d}{c} = nd + \frac{rd}{c}$ . Comme b et nd sont des entiers,  $s = \frac{rd}{c}$  est un entier. Si r n'est pas nul, s ne l'est pas davantage et il vient  $\frac{c}{d} = \frac{r}{s}$ , avec r < c, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ . On a donc r = 0 et, par suite, a = nc, et b = nd, CQFD.

# 4. La décimalité d'une fraction : un problème technique

Nous allons terminer ce petit tour d'horizon en considérant une question posée en 2006-2007 par un élève professeur ayant la responsabilité d'une classe de seconde. Il s'agit ici de savoir, étant donné deux nombres entiers strictement positifs a et b, si le quotient  $\frac{a}{b}$  est ou non un nombre décimal.

En  $2^{de}$ , on demande aux élèves de savoir à quel ensemble ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ) un nombre appartient. Il se pose le problème de montrer que a/b appartient ou non à  $\mathbb{D}$ , c'est-à-dire peut se mettre sous la forme

 $c/10^n$ . Pour cela, je ne vois comme technique (décrite sommairement) que 1) décomposer a et b en facteurs premiers, 2) réduire la fraction a/b, 3) regarder le dénominateur de la fraction réduite : si des facteurs premiers différents de 2 et 5 apparaissent, alors la fraction a/b n'est pas le représentant d'un décimal. Une autre technique pourrait consister à regarder le développement décimal à la calculatrice et voir si ce développement est périodique ou non. Problème : on se heurte aux problèmes d'affichage de la calculatrice. Y a-t-il une autre technique envisageable ?

Ce professeur stagiaire, on le voit, se pose une question concernant la décimalité éventuelle d'une fraction. Pour y répondre, il affirme disposer d'une certaine technique, qu'il explicite. Cette technique est en fait, à des détails près, une technique datant d'autrefois, d'avant les calculatrices et autres moyens de calcul puissants à la portée de tous. Bien entendu, il existe des variantes de la technique décrite. On peut par exemple noter qu'il est possible de procéder ainsi : 1) déterminer le nombre b' non divisible par 2 et 5 tel que  $b = 2^{\alpha}5^{\beta}b$ ', 2) si b' divise a, alors  $\frac{a}{b}$  est décimal, sinon il n'est pas décimal. Si l'on considère le nombre  $\frac{273}{56}$ , il suffit de noter que  $56 = 8 \times 7$  et que 7 divise 273 (on trouve  $273 \div 7 = 39$ ) : l'affaire est réglée, ce nombre est décimal ; il est ici inutile de décomposer les deux termes de la fraction en facteurs premiers. Mais le problème soulevé par la question est tout autre : ce professeur (se) demande s'il existerait d'autres techniques, qui apparaîtraient plus appropriées, étant donné les conditions et les contraintes sous lesquelles une classe de seconde d'aujourd'hui vit sa vie mathématique — conditions et contraintes que rappelle discrètement cette autre question, posée par un élève professeur en 2004-2005, à propos du même type de problèmes :

[...] Une deuxième technique a été mise en place : 1) décomposer le numérateur et le dénominateur de cette fraction ; 2) rendre la fraction irréductible ; 3) si le dénominateur de la fraction irréductible est une puissance de 2 ou de 5, alors... Or, lors d'un DS, les élèves continuent d'utiliser la calculatrice pour déterminer la nature du nombre  $\frac{49}{375}$ ; ils trouvent  $\frac{49}{375} = 0,13066667$ , donc c'est décimal. Ils résistent au travail sur le thème « Représentation des nombres dans la calculatrice », qui poussait à « se méfier » des nombres affichés dans la calculatrice.

Reprenons le premier nombre que nous avons considéré, à savoir  $\frac{273}{56}$ , et divisons 273 par 56, soit en « posant » l'opération, soit en sollicitant une calculatrice. Sur la calculatrice d'un téléphone mobile, on vérifie par exemple que  $273 \div 56$  égale 4,875. Comme on le voit, la division « tombe juste » et le nombre considéré est décimal : on peut par exemple le vérifier en effectuant la multiplication  $56 \times 4,875$ , qui donne bien 273. Prenons maintenant, non pas  $\frac{273}{56}$ , mais  $\frac{274}{56}$ . Toujours sur le même téléphone mobile, on obtient l'affichage suivant : 4,8928571. La division tombe-t-elle juste ou bien la calculatrice du téléphone mobile, ayant atteint le maximum de ses possibilités, fournit-elle une valeur arrondie? Considérons alors une autre calculatrice, un peu plus puissante, comme celles qu'utilisent les élèves de collège : on trouve alors 4,89285714, ce qui nous montre que la calculatrice du téléphone mobile fournissait bien une valeur arrondie. On tombe alors sur la difficulté évoquée par l'auteur de la question posée : il est possible que la division de 273 par 56 tombe juste, mais que cela ne se produise qu'à la  $50^{\rm e}$ , voire à la  $100^{\rm e}$  décimale! Comment le savoir? C'est là qu'on peut

faire entrer en piste un théorème mathématique à la fois facile à établir et « inconnu » jusqu'ici : en l'espèce, si la division de a par 56 tombait juste, cela se produirait au plus tard à la  $5^e$  décimale ; comme il n'en est rien, on peut conclure que cette division se poursuivra indéfiniment. D'où vient le nombre 5, ici ? Il s'agit du plus grand entier n tel que  $2^n$  soit inférieur ou égal au diviseur 56 : on a en effet  $2^4 = 16$ ,  $2^5 = 32$  et  $2^6 = 64$ . Telle est donc l'origine de cet index. Mais aucune technique, bien sûr, n'est *infiniment robuste*. Prenons l'exemple proposé dans la deuxième question et considérons donc la division de 49 par 375. Le plus grand entier n tel que  $2^n$  soit inférieur ou égal à 375 est 8 (on a  $2^8 = 256$  et  $2^9 = 512$ ). Le résultat fourni par une calculatrice de collège,  $\frac{49}{375} = 0,13066667$ , ne présente que 8 décimales, dont 7 sûres, alors qu'il nous faudrait 9 décimales sûres pour conclure. C'est oublier que le monde autour de nous est truffé de moyens de calcul ; sur un ordinateur, ainsi, on dispose d'une calculatrice beaucoup plus puissante, qui affiche, elle,

#### 

Le nombre considéré n'est donc pas décimal! Si, toutefois, on ne dispose que d'une calculatrice de collège, rien n'est perdu, à condition que l'on veuille bien accepter un zeste de mathématiques simples. Demandons à cette calculatrice le quotient de 4900 par 375 ; elle affiche 13,0666667. Apparemment aucun progrès n'a été fait. Calculons alors  $4900 - 13 \times 375$  : cela fait 25 ; et demandons à la même calculatrice le quotient de 25 par 375 : elle affiche 0,06666667. Nous avons gagné deux décimales (et peut-être trois) : un peu d'arithmétique montre en effet que le quotient de 49 par 375 s'écrit 0,1306666667, la dernière décimale n'étant pas, *a priori*, sûre. Mais nous venons d'obtenir 9 décimales sûres : l'affaire est réglée.

Ce qui précède n'est qu'une partie de la réponse <sup>9</sup>. Mais cette réponse est, en essence, neuve, tout en étant *mathématiquement élémentaire*. Et elle naît d'une question qu'il eût été bien difficile, sinon impossible, d'engendrer *loin de la pratique quotidienne au chevet de la classe*, telle qu'un débutant lucide et exigeant se montre capable de l'interroger et de nous en instruire.

#### Conclusion

Nous nous en tiendrons ici à la présentation de ces trois exemples qui mettent en évidence quelques-unes des questions vives auxquelles sont confrontés les élèves professeurs durant leur formation – questions qui sont, en réalité, révélatrices de problèmes rencontrés par la profession. Ainsi que nous l'écrivions récemment (2007, à paraître),

\_

[...] on peut voir qu'il y a tout un travail à faire à propos des *mathématiques à enseigner*. Il convient pour cela d'ouvrir largement l'espace de ce qu'on nomme les *mathématiques pour l'enseignant*, c'est-à-dire ces mathématiques que la profession doit connaître pour permettre à ses membres de s'engager de façon adéquate dans l'acte d'enseignement, vaste domaine dont rien de ce qui est mathématique n'est *a priori* exclu. En même temps, on est amené à constater l'inadéquation des matériaux mathématiques « bruts », tels par exemple que l'étudiant les rencontre à l'université, vis-à-vis des problèmes d'interprétation, de compréhension et d'enseignement des contenus à enseigner. La résolution de ces problèmes appelle, au plan mathématique, des *élaborations transpositives intermédiaires* dont la nature et l'ampleur ne peuvent être fixées à l'avance, et qui constituent un monde mathématique toujours en chantier, le monde des *mathématiques pour l'enseignement*, dont la gestion revient pour l'essentiel à la profession elle-même.

Les difficultés rencontrées peuvent être de natures très diverses. Dans le premier cas que nous avons évoqué, les difficultés sont d'ordre théorique et nous avons pu entrapercevoir, sur des questions soulevées par des professeurs en formation initiale, quelques-uns des problèmes occasionnés par l'absence d'un environnement technologico-théorique permettant de penser de façon idoine les organisations mathématiques à mettre en place : le quotient  $\frac{a}{h}$  perçu comme étant le « résultat » de la division décimale de a par b, les fractions séparées en deux groupes (celles qui sont inférieures à 1 et les autres), etc. Dans le deuxième cas, nous avons pointé un déficit technologique relatif à la simplification des fractions en 4<sup>e</sup>, dans le cas où l'on entend simplifier « le plus possible » : on s'interroge pour savoir s'il faut parler de nombres premiers, on se demande comment faire alors que la forme irréductible n'est pas au programme, etc. Ici, le bloc pratico-technique décrit familièrement par « simplifier une fraction au maximum » se retrouve en attente d'une technologie idoine, qui reste introuvable actuellement dans la profession, et pour laquelle nous avons proposé des matériaux de base. Le troisième cas est révélateur d'un problème technique, qui surgit en raison de la présence dans l'enseignement des calculatrices et des autres moyens de calcul puissants à la portée de tous. Les techniques anciennes perdent alors leur pertinence et la présence à portée de main de ces puissants outils force la profession à fabriquer de nouvelles réponses, plus appropriées.

C'est par le biais de l'étude clinique de la formation que nous avons pu mettre en évidence certains des problèmes qui se posent aux professeurs en formation et, par delà, à la profession tout entière. Ces problèmes, c'est au chevet de leur classe que les élèves professeurs les rencontrent, et la formation leur permet de les transmuer en problèmes de la profession, qu'il s'agit de résoudre collectivement. La formation est en effet précisément l'organe dont la profession dispose pour répondre aux besoins de ses membres quand elle ne dispose pas d'une réponse adéquate, ce qui est le cas dans les différents exemples que nous avons considérés.

On a vu le rôle essentiel que jouent les « questions de la semaine » dans le cadre de la formation étudiée. En fait, deux grandes questions se posent à une institution de formation : d'une part, la question des *réponses* à apporter aux questions que vont rencontrer les professionnels en formation ; d'autre part, la question des *questions* qui seront étudiées dans cette formation. La « question des *questions* » constitue à nos yeux un *critère éthique décisif*,

ainsi que nous l'indiquions récemment dans le développement ci-après (Chevallard & Cirade 2007, à paraître) :

L'auteur [William P. Thurston], qui est véritablement un auctor dans son domaine, soulève ainsi la question cardinale : d'où viennent les questions ? Soyons tout à fait clairs sur ce point : une formation de professeurs (ou plus largement une formation à un métier quel qu'il soit) qui ne saurait pas s'expliquer là-dessus se qualifierait difficilement en tant que formation professionnelle. Encore toute « explication » ne sera-t-elle pas recevable! Pour cette raison, une formation professionnelle d'université doit assumer humblement un postulat d'ignorance ou de quasi-ignorance grâce auquel il devient possible - c'est-à-dire pensable et faisable - d'identifier peu à peu, collectivement, les principaux problèmes de la profession sur lesquels butent non seulement les professionnels en formation mais aussi, presque toujours, la profession elle-même. Car une formation de professionnels est nécessairement coextensive à une redéfinition (à prétention méliorative) de la profession. Comment rechercher ces questions qui se posent aux professionnels (même quand la profession, elle, ne se les pose pas encore)? En la matière, les procédures top-down sont plus qu'ailleurs de mauvais augure; car, en laissant ouverte la possibilité d'apporter dans la formation des questions venues de nulle part, elles ouvrent la voie à des glissements successifs, à terme dénaturants : on se contentera bientôt d'apporter des réponses à des questions laissées implicites, puis tout à fait oubliées, avant de donner un jour la prééminence à l'exhibition immotivée, par des lectores sans doute très compétents, d'œuvres à l'improbable pertinence « professionnelle ».

C'est le choix d'une procédure *bottom-up* qui s'est d'emblée imposée dans la formation des élèves professeurs de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille, et c'est cette procédure qui permet à l'équipe de formation de disposer en continu d'une « information prise à la source, faite de ce qu'on peut nommer des questions *ombilicales*, pour signifier par là qu'elles se branchent sur le quotidien de ces professionnels en formation initiale » <sup>10</sup>. Bien entendu, la question des *réponses*, des *matériaux élaborés dans la formation* – dans *les* formations – est elle aussi d'une importance cruciale *pour la profession*, car par leur création et leur diffusion, ces matériaux participent de la *normativité professionnelle* que toute formation exerce et se doit d'assumer. Nous terminerons en citant encore une fois notre intervention au récent colloque de la CDIUFM <sup>11</sup>:

La mise en circulation des réponses construites ici ou là, leur réception à la fois *attentive, bienveillante et critique* sont essentielles au travail collectif que suppose l'élévation de la qualification du métier. Il est donc indispensable que le réseau des formations ait un dynamisme propre, par delà les formations elles-mêmes dans leur singularité individuelle ; et que ce réseau se donne sa *skholê*, où ce qui émerge des formations trouvera à être étudié posément, à bonne distance d'une certaine culture agonistique dont le système éducatif ne cesse de pâtir.

Il resterait bien sûr à explorer la manière dont les professeurs stagiaires s'emparent des apports de la formation pour les intégrer dans leurs praxéologies professionnelles et les faire vivre dans le système éducatif, aussi bien pendant leur année de stage que lors de leurs

11. *Ibid*.

<sup>10.</sup> Ibid.

premières années d'exercice, cela afin d'étudier la qualité de la percolation des matériaux coconstruits pendant la formation.

### Références bibliographiques

Chevallard, Y. (2007a). Séminaire de formation de formateurs, année 2006-2007, IUFM d'Aix-Marseille:

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/2006-2007/excursus07.html.

Chevallard, Y. (2007b). Séminaire de formation des professeurs stagiaires de mathématiques, années 2000-2001 à 2006-2007, IUFM d'Aix-Marseille :

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2007-2008/cd\_2008.html

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006, à paraître). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, Actes du 13<sup>e</sup> colloque des professeurs et formateurs chargés de la formation des enseignants de mathématiques du second degré organisé par la CORFEM (Toulouse, 22-23 juin 2006).

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2007, à paraître). Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture, Actes du 6<sup>e</sup> colloque des IUFM: « Qu'est-ce qu'une formation professionnelle universitaire des enseignants? Enjeux et pratiques » (Arras, 2-4 mai 2007).

http://www.lille.iufm.fr/fpu2007/IMG/pdf/chevallardyves.pdf [pré-actes]

Cirade, G. (2006). Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel, Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille, France.

http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Cirade, G. (2007, à paraître). Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : ...

Ministère de l'Éducation nationale (2006). *Documents d'accompagnement des programmes*. *Mathématiques. Cycle terminal de la série littéraire*. Paris : CNDP.

http://www.cndp.fr/archivage/valid/73366/73366-12310-16932.pdf