FONCTION EXPONENTIELLE ET MODÉLISATION EN TS : UNE PERSPECTIVE DIDACTIQUE

Robert Noirfalise

IREM de Clermont-Ferrand

Résumé. Les modélisations conduisant à des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ et à la fonction exponentielle ne sont pas sans poser des difficultés de traitement aux professeurs de mathématiques français qui ont à les enseigner dans les classes de terminales scientifiques. L'usage d'outils empruntés à la TAD, -organisations praxéologiques, niveaux de détermination, dialectique système/modèle-, permet de pointer et d'éclairer des questions didactiques sur ce sujet, et autorise le développement de solutions aux problèmes didactiques ainsi repérés.

Abstract. Modelling leading to differential equations of the form $y' = ay + b$ and to the exponential function are a source of treatment problems for French mathematics teachers who have to teach them in scientific A level classes. The use of tools taken from TAD, praxeology, determining levels, system/model dialectics -, enables to point out and clarify didactic questions on this topic and to develop solutions to the didactic problems thus spotted.

1. Introduction

En France, dans la classe terminale scientifique (TS), les élèves rencontrent à plusieurs reprises, dans le cours de physique, le type de tâches mathématique consistant en la détermination fonctionnelle de l'évolution d'une quantité en fonction du temps. Cette rencontre se fait dans le cadre de domaines d'études suivants, qui sont spécifiés officiellement par le programme de la classe :

– évolution de la charge d'un condensateur ;
– évolution de l'intensité dans un circuit électrique ;
– nombre d'atomes radioactifs en fonction du temps ;
– en mécanique, distance parcourue par un point mobile soumis à une force constante ou à une force variable…

Ces quatre types de problèmes (chacun d'eux pouvant se décliner en plusieurs sous-types de tâches selon les conditions considérées) conduisent tous à des modélisations en termes d'équations différentielles dont la plupart sont du type $y' = ay + b$. L'équation différentielle ayant été obtenue, le mathématicien produit une technologie relative aux équations différentielles de la forme $y' = ay + b$. La technique consiste alors banalement à appliquer le résultat d'un théorème donnant la solution de l'équation différentielle : $y = Ce^{at} - b/a$ ($a \neq 0$), la constante C pouvant se déterminer avec une condition initiale.

Le physicien utilise l'organisation praxéologique produite par le mathématicien pour résoudre l'équation différentielle, c'est-à-dire pour passer du « modèle différentiel » au « modèle analytique », pour reprendre les termes du document d'accompagnement du programme de

physique. Mais son travail ne s'arrête pas là : le physicien valide ou invalide la fonction « théorique » obtenue par intégration de l'équation différentielle en procédant à sa confrontation avec des données expérimentales. L'accent est souvent mis sur cette distinction entre « travail du mathématicien » et « travail du physicien ». Contrairement au premier, le second s'efforce d'apprécier l'adéquation entre valeurs théoriques et valeurs expérimentales, ce qui suppose un travail d'expérimentation qu'on doit aussi pouvoir décrire en termes praxéologiques.

Par contraste, alors que le programme de mathématiques insiste sur l'importance de la modélisation dans la pratique scientifique, si le document d'accompagnement rappelle [1] qu'il convient de privilégier « les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde », le travail de traduction mathématique propre à la modélisation ne va pas sans poser problème. Utilisant les niveaux de détermination proposés par Y. Chevallard dans son modèle praxéologique du didactique, nous ferons l'hypothèse que les mathématiques elles-mêmes peuvent apparaître comme un obstacle pour que travail de modélisation puisse s'épanouir dans une TS : à l'aune d'une certaine orthodoxie mathématique, la viabilité de l'organisation praxéologique utile pour le travail de modélisation – pour le travail de traduction mathématique – n'est pas assurée. Nous allons voir ce qui nous a conduit à formuler cette hypothèse, en montrant du même mouvement l'utilité de la TAD pour l'observation et l'explication de phénomènes liés à l'enseignement des mathématiques et sa contribution possible à la résolution des problèmes ainsi repérés.

2. Un exercice refusé par des mathématiciens de lycée

Lors d'une journée de travail tenue en novembre 2003 à l'instigation des IPR de mathématiques [2] de l'académie de Clermont-Ferrand, une dizaine de professeurs enseignant les mathématiques en TS, s'essaient à « recenser des exercices possibles pour le baccalauréat sur le thème de la modélisation », afin d'alimenter la banque d'exercices proposée par l'inspection générale sur le site Eduscol [3]. Le problème suivant est notamment proposé, parmi un certain nombre d'autres.

> La plupart des produits pharmaceutiques, comme la pénicilline par exemple, s'élimine du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité de produit y rémanente dans le sang (c'est-à-dire la quantité de produit présent dans le sang à l'instant t). Le coefficient de proportionnalité est une constante strictement positive, caractéristique du produit administré.
>
> 1° Le produit est donné au patient en une seule dose y_o en milligrammes. On note $y = f(t)$ la quantité de produit rémanente dans le sang en fonction du temps t, exprimé en secondes.
>
> a) Déterminer la fonction f.
>
> b) Le produit a une demi-vie de 2 heures. Déterminer la constante k.
>
> 2°…

[1] Accompagnement des programmes : mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, CNDP, 2002, p. 31. Voir http://www.cndp.fr/archivage/valid/37600/37600-6095-9405.pdf.

[2] IPR : Inspecteur Pédagogique Régional.

[3] Voir http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_MATHS2007.htm.

Or ce problème est refusé par une majorité des participants à la réunion, pour qui ce n'est pas là un exercice qu'on pourrait légitimement proposer à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat. La raison principale invoquée est que la première question, 1° a, n'appartiendrait pas au domaine des mathématiques mais bien plutôt à celui de la physique ou de la biologie [4].

Ce refus soulève une première question : quelle est la discipline, s'il y en a une, qui a vocation aujourd'hui à prendre en charge officiellement, en TS, un tel problème ? On peut voir dans le problème un prototype d'un problème de mélange conduisant à une équation différentielle du type $-y' = ky$. Si le mathématicien n'assume pas le travail de modélisation, est-ce au physicien de le prendre en charge, les problèmes de mélanges conduisant à analyser des variations en termes de débits ? Est-ce au biologiste, dès lors qu'il s'agit de produits pharmaceutiques ?

L'expression de « prise en charge » mérite d'être clarifiée : il s'agit ici de se demander si une des trois disciplines citées a pour mission d'entraîner les élèves à la résolution de ce type de problèmes. Le refus des mathématiciens signifie que ce n'est pas à eux de le faire : du moins interprètent-ils ainsi leur mission. *À l'occasion*, il est vrai, dans un TD ou une activité, les élèves pourront rencontrer un tel problème [5] ; mais la capacité à résoudre des problèmes de ce type n'en est pas pour autant exigible au baccalauréat.

Dans ce qui suit nous tenterons d'esquisser quelques hypothèses explicatives du refus opposé par des professeurs mathématiciens de lycée à un tel « exercice ».

3. Un déficit praxéologique ?

3.1. Le travail légitime du mathématicien

Les professeurs qui ont refusé le problème en arguant que sa résolution met en jeu des compétences non systématiquement travaillées en mathématiques seraient toutefois d'accord pour que soit donnée à résoudre l'équation différentielle à laquelle on parvient par le travail de modélisation « refusé ». Mais la question perd alors beaucoup de son intérêt : elle devient un banal exercice d'application d'un résultat de cours. On voit ici crûment ce qui est seulement à la charge du mathématicien : la *résolution* d'une équation différentielle *dès lors que celle-ci est donnée* – et à condition bien sûr qu'elle soit d'un type prescrit officiellement par le programme de la TS.

Ce qui, dans le problème proposé, semble faire obstacle à la prise en charge par le mathématicien du travail de modélisation est le passage de l'assertion selon laquelle « le produit s'élimine à une vitesse proportionnelle à la quantité y de produit rémanente dans le sang à l'équation différentielle $-y' = ky$. Certes, l'adjectif *rémanent*, spécifique d'un domaine

[4] Le document d'accompagnement du programme de TS, déjà cité, leur donne raison. Bien que, d'après les auteurs du programme, le concept d'équation différentielle soit important, ce document, qui précise qu'il conviendra de choisir « avec soin une ou deux situations menant à une équation différentielle », ajoute cependant ceci (c'est nous qui soulignons) : « Les élèves seront guidés dans le travail de traduction mathématique. Cette étape est délicate : s'y confronter au moins une fois est indispensable *mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet pour l'examen du baccalauréat*. »

[5] Un professeur peut le faire dans une classe pour illustrer l'intérêt des équations différentielles, tandis que tel autre, pressé par le temps, ou pour d'autres raisons encore, pourra faire d'autres choix sans pour autant faillir à sa mission.

d'études non mathématique, pouvait poser problème, et il convenait donc, ainsi que l'a fait l'auteur de l'exercice, d'en préciser le sens. Il est probable aussi que le sort de l'exercice aurait été bien différent si l'exercice sur une autre réalité – si, par exemple, son libellé avait été : « Un mobile se déplace avec une vitesse proportionnelle à la distance parcourue… Car la vitesse d'un mobile se traduit *traditionnellement*, en classe de mathématiques, par la dérivée de la distance parcourue.

On peut avec certitude préciser encore que, ce qui fait problème pour le mathématicien de lycée, est d'avoir à traduire en langage mathématique la notion « vitesse d'élimination du produit » : on peut en effet supposer que le fait d'avoir à rendre l'hypothèse de « proportionnalité à la quantité y » par l'expression ky *n'est pas* le point d'achoppement qui les conduit à repousser le problème proposé.

3.2. Une technique non travaillée en classe de mathématiques ?

On peut comprendre que, à la suite des déboires suscités par l'épreuve de mathématiques au baccalauréat S en 2003 [6], que les mathématiciens soient particulièrement sensibles à ce qui peut être demandé lors d'une telle épreuve. Il convient en effet de proposer des questions qui ont fait l'objet d'un entraînement significatif, même si l'on peut imaginer, en fin de problème, des questions à la marge, que seuls les meilleurs éléments pourront résoudre – mais de telles questions ne sauraient constituer l'essentiel de l'épreuve.

On peut donc faire l'hypothèse que la technique consistant à traduire « vitesse d'élimination proportionnelle à la quantité rémanente » par l'égalité $-y' = ky$ ne fait pas l'objet d'un travail systématique en classe de mathématiques, et même qu'elle n'y est pas assumée. L'hypothèse explicative suivante peut alors être formulée : si cette technique n'est pas assumée en classe de mathématiques, c'est que le discours technologique permettant de la justifier n'est pas vécu comme *mathématiquement orthodoxe*. En tant que discipline enseignée, les mathématiques portent en elles des conditions qui, *positivement*, permettent les développements que l'on observe dans la classe de mathématiques. Ici, au contraire, nous aurions un exemple où les contraintes consubstantielles à la discipline mathématique viennent faire obstacle à l'existence d'un entraînement aux pratiques de modélisation.

Comment en effet peut-on justifier la technique associant, à une vitesse, une dérivée proportionnelle à la valeur de la fonction à un instant donné ? Voici ce qui pourrait être le discours technologique indispensable.

> À un instant t, considérons un instant $t + h$ voisin, avec h très petit.
> Considérons alors la variation $y(t) - y(t + h)$: considérons que, de façon approchée, cette variation est proportionnelle, d'une part à la variation du temps (si h double, alors la variation doublera) et d'autre part à la quantité rémanente à l'instant t, à savoir $y(t)$ (si $y(t)$ est deux fois plus grande, il en sera de même de

[6] Il s'agissait d'un problème portant sur les équations différentielles. La difficulté de l'épreuve avait suscité un tollé aussi bien parmi les professeurs que chez les élèves qui se sont dit peu ou non entraînés à affronter la difficulté qu'on leur imposait.

la variation). Traduisons cette double proportionnalité avec le symbolisme des physiciens [7] : $\Delta y = k \cdot \Delta t \cdot y$; soit encore $\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$.

Cette égalité sera d'autant plus légitime que $h = \Delta t$ sera petit ; par suite, en faisant tendre h vers 0 et en passant à la limite, on obtient $y' = ky$.

On pourrait aussi justifier la démarche en disant que l'on cherche d'abord *localement en tout point* un modèle approché de la situation, puis qu'en passant à la limite on a une relation fonctionnelle vérifiée en tout point, une équation différentielle dont la résolution donne un *modèle global* de la situation. Cela noté, le petit discours précédent, qui justifie et produit l'équation différentielle utile, peut être reçu avec un certain dédain par des mathématiciens, pour qui ce serait là « du bricolage de physicien » : dire « h petit », par exemple, *n'est pas « mathématique »* – il suffit de faire un zoom pour que h petit devienne grand ! L'égalité $\Delta y = k \cdot \Delta t \cdot y$ n'est pas vraie en toute rigueur.

Si ce petit discours est efficace parce que fonctionnel, un mathématicien enseignant en TS sera, en ce début de XXIe siècle, plus ou moins embarrassé si on lui demande d'en user. Il le sera d'autant plus que certaines des situations prévues par le programme impliquent en outre un passage *du discret au continu* qu'il conviendrait aussi de justifier : c'est notamment le cas de la désintégration radioactive ; c'est aussi le cas des situations liées à la modélisation des systèmes électriques dès lors que l'on considère des charges électriques comme des quantités d'électrons.

On peut comprendre cet embarras : il y a un partage social du travail, y compris en science. Le petit discours ci-dessus est un discours justifiant une technique de modélisation ; or, aujourd'hui plus encore qu'autrefois, ce qui fonde le travail du mathématicien au plan des technologies, c'est la démonstration avec ses contraintes (axiomes, définitions, hypothèses qu'on suppose vraies, déductions). Le travail de modélisation est autre : cela explique aussi la gêne ressenti par les mathématiciens en calcul des probabilités, où il y a souvent, avant d'engager des calculs, un petit travail de modélisation à opérer avec parfois des choix multiples pouvant éventuellement conduire à des résultas différents.

3.3. L'embarras des mathématiciens de lycée

On peut avancer quelques éléments allant dans le sens de notre hypothèse. Tout d'abord, nous donnons l'énoncé d'un exercice qui, lui, a été accepté sans aucune réticence ; puis nous donnerons un extrait de textes d'exercices produits par des mathématiciens de lycée visant à visant à démarquer le petit discours technologique décrit ci-dessus.

L'exercice suivant met en scène également la présence d'une substance médicamenteuse dans le sang. Il a été accepté, quant à lui, sans problème, comme exercice type pour l'épreuve du baccalauréat : il est jugé représentatif de ce qui peut être légitimement demandé à un élève de TS lors de l'épreuve de mathématiques à cet examen.

On note $Q(t)$ la quantité d'une substance médicamenteuse encore présente dans le sang t heures après l'injection intraveineuse de 1,8 unités du produit.

[7] Il conviendrait certainement d'établir le lien avec ce que fait le physicien : y est, pour ce dernier, une variable dépendant du temps alors que c'est une *fonction* pour le mathématicien.

On donne $Q(t) = 1{,}8 \cdot e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = -\ln 0{,}7$.
On réinjecte toutes les heures 1,8 unités du produit. On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$.

Après cette entrée en matière, l'exercice met en scène l'étude de la suite R_n, suite qui est du type $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$. Le problème de la modélisation conduisant à une représentation fonctionnelle de la quantité de substance médicamenteuse dans le sang en fonction du temps est éludé : il est supposé résolu – la fonction est donnée.

Voici maintenant une tentative qui se veut légitime pour *produire* l'équation différentielle – qui, dans le cas de figure précédent, était « donnée ». Dans son chapitre consacré aux équations différentielles, un manuel de mathématiques pour la classe de TS propose (dans le cadre des « travaux dirigés ») une rubrique intitulée *Situations menant à une équation différentielle*. En cohérence avec les commentaires des programmes, l'objectif déclaré de celle-ci est ainsi formulé par les auteurs [8].

Nous nous contenterons d'envisager des exemples simples issus de la physique ou d'autres sciences appliquées au sens suivant :
- nous saurons facilement obtenir l'équation différentielle ;
- celle-ci est du type $y' = ay$ ou $y' = ay + b$.

Le premier exemple choisi est celui de la désintégration radioactive. L'obtention de l'équation différentielle a été obtenue dans un chapitre antérieur (celui relatif à la présentation de la fonction exponentielle), dans le cadre d'un exercice [9] :

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : si $N(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant t, pendant la durée Δt, la variation $\Delta N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à Δt et à $N(t)$. *Les physiciens* écrivent

$$\Delta N(t) = -kN(t)\Delta t \qquad (k > 0)$$

En supposant que la fonction $t \mapsto N(t)$ est dérivable, expliquer pourquoi on peut écrire :
$N'(t) = -kN(t)$.

La technique présentée est « justifiée » par une référence aux physiciens : *Les physiciens écrivent*… Or en toute rigueur, ainsi que pourrait le faire un élève de TS, on peut tenir le discours suivant.

On a : $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t) = -kN(t)\Delta t$. Cette égalité est vraie pour tout t ; donc, pour une valeur particulière t_0, on a aussi : $N(t_0 + \Delta t) - N(t_o) = -kN(t_0)\Delta t$ et en posant $t - t_0 = \Delta t$, on obtient $N(t) = N(t_0) - kN(t_0)(t - t_0)$, soit encore : $N(t) = -kN(t_0)t + N(t_0)(1 + kt_0)$.

La fonction $t \mapsto N(t)$ serait ainsi une fonction affine, ce qui n'est pas le résultat attendu ! Si cela peut paraître banal, ce que nous voulons souligner, c'est l'embarras didactique que la situation évoquée ici peut provoquer, comme si manquaient les outils ou les usages susceptibles de montrer clairement ce qu'il s'agit de faire. Notons ici que le recours aux

[8] Il ne s'agit pas ici de faire une critique du manuel considéré, excellent par ailleurs, mais bien de montrer une difficulté partagée par la collectivité de ceux qui ont en charge l'enseignement des mathématiques en TS.
[9] C'est nous qui soulignons. On notera que le fait de supposer la fonction dérivable revient à réaliser sans davantage de commentaire, un passage essentiel du discret au continu : les mathématiques n'ont pas de discours interne justifiant leur redoutable efficacité !

infiniment petits ne serait pas nécessairement d'un grand secours car il resterait tout autant à passer de variations finies à des variations infiniment petites.

4. Une organisation praxéologique non travaillée ?

Notons OP l'organisation praxéologique dont les composants seraient les suivants.

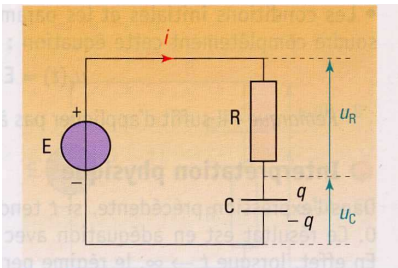
- Type de tâches T : traduire mathématiquement la variation relative instantanée d'une quantité lorsque celle-ci est proportionnelle à la quantité considérée.
- Technique τ : considérer un temps court Δt, écrire que la variation Δy de la quantité pendant le temps Δt est à la fois proportionnelle à y et au temps Δt : $\Delta y = ky\Delta t$, passer au quotient et faire tendre la variation de temps Δt vers 0 pour obtenir $y' = ky$.
- Technologie θ : la technologie paraphrase la description de la technique en y ajoutant des arguments justifiant la double proportionnalité (ce qui le cas échéant permet de trouver le coefficient de proportionnalité), arguments qui peuvent être extramathématiques.
- Théorie Θ : les éléments théoriques justifiant θ seraient à la fois ceux de la proportionnalité, ceux définissant la dérivée d'une fonction, auxquels il faudrait sans doute ajouter une pincée de topologie pour justifier l'aspect local du procédé.

Nous avons vu l'embarras des mathématiciens devant une telle organisation praxéologique, dont on peut se demander si elle fait l'objet d'un travail systématique en classe de physique (en TS). Une enquête de proximité auprès de professeurs de physique conduit à cette conclusion : une telle organisation est bien rencontrée, mais ne fait pas l'objet d'un entraînement systématique. Les élèves la rencontrent, par exemple, à propos de la désintégration radioactive (loi de décroissance radioactive) *à peu près* dans les mêmes termes que ceux extraits du manuel de mathématiques cité ci-dessus. C'est ainsi qu'un manuel de physique pour la TS propose ce développement (Tordeux 2002, p. 105).

> On constate expérimentalement que le nombre moyen de désintégrations est proportionnel au nombre de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt…
> … $\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t$…
> Si l'on considère un intervalle de temps dt très petit *(sic)*… $\frac{dN}{N(t)} = -\lambda dt$.
> Et par intégration $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$…

Le travail fait n'est plus à faire et la loi de désintégration obtenue, les élèves l'utiliseront directement dans les exercices proposés : ainsi ce n'est pas pour eux l'occasion de s'entraîner à un usage de OP : ils l'ont rencontrée mais ne la pratiquent pas.

Du côté de l'évolution des systèmes électriques, la situation est différente mais encore plus radicale : la rencontre avec OP n'est pas nécessaire, comme l'atteste l'extrait suivant du même manuel à propos de la charge d'un condensateur (p. 155).



Doc. 17 – Orientation du circuit pour l'étude de la charge du condensateur. D'après le sens choisi pour i, on a : $u_C = \frac{q}{C}$ et $i = \frac{dq}{dt}$.

> Equation différentielle vérifiée par la tension U_C :

L'interrupteur fermé en position 1, on oriente le circuit et on étudie le dipôle RC en convention récepteur (→ Doc. 17).
D'après la loi d'additivité des tensions dans un circuit série, on a l'égalité : $U_R + U_C = E$ (1)
Or $U_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$ et $q = CU_C$, d'où : $U_R = RC\frac{dU_C}{dt}$.
L'équation (1) s'écrit donc : $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre…

Il y a bien ici un travail de traduction mathématique conduisant à l'écriture d'une équation différentielle ; de fait, dans ce manuel, on rencontre des exercices où l'on demande à l'élève de mettre en œuvre le type de travail ci-dessus. Or on pourrait aussi utiliser OP, et cela de la manière suivante.

Soit à étudier le flux d'électrons ou de charges électriques dans la résistance R : La force électromotrice fournit un flux de débit constant et la capacité un flux dont le débit s'oppose au précédent proportionnellement à la charge Q du condensateur, ce qui peut alors se mathématiser par : $R\frac{\Delta Q}{\Delta t} = E - CQ$ (les constantes sont caractéristiques du système électrique).

La mise en œuvre de OP pourrait ici éclairer davantage que la solution proposée par le manuel, en mettant davantage en évidence les raisons d'obtenir une telle équation.

Il n'en reste pas moins que nous sommes en présence, très certainement, d'un phénomène usuel qui jalonne le chemin du travail de modélisation : OP est une organisation praxéologique *transitoire*, qui peut être remplacée par d'autres, plus rapides, plus économiques mais avec en contrepartie un travail qui se fait davantage en aveugle grâce au formalisme mis en place (la modélisation algébrique est caractéristique de ce point de vue). On peut remplacer l'ostensif Δ sans grand frais par d (comme le manuel le fait à propos de la désintégration radioactive) ; une fois écrite l'égalité $i = \frac{dq}{dt}$, OP peut disparaître au profit de la solution donnée ci-dessus, où le travail de formulation déjà fait (comme $U_R = Ri$) permet d'obtenir l'équation différentielle cherchée.

5. Manque praxéologique et voies de développement

5.1. Introduire une situation prototype

Peut-on faire exister une organisation praxéologique comme OP dans une classe de TS ? Peut-on imaginer d'entraîner les élèves à l'usage d'une telle organisation ? Plus généralement, peut-on enseigner des organisations praxéologiques prenant en charge un travail de modélisation conduisant à des équations différentielles et, en particulier, à la fonction exponentielle ? Nous évoquons ici quelques pistes possibles pour tenter de répondre – affirmativement – à de telles questions.

Une première piste consisterait à rendre OP disponible par un jeu d'exercices qui permettrait un entraînement idoine. On peut, à titre d'exemple, donner une situation prototype et fondamentale, celle du mélange dans un réservoir d'une substance avec de l'eau.

Un réservoir d'eau ayant un volume V m^3 contient, à l'instant $t = 0$, m_0 kg d'une substance donnée (un sel par exemple).

L'eau sort du réservoir avec un débit d (en m^3/min), et de l'eau contenant du sel à raison de b kg par m^3 alimente le réservoir avec le débit d. On suppose que l'eau dans le réservoir est continuellement brassée et que la répartition du sel est ainsi toujours homogène dans le réservoir.
Déterminer la quantité de sel contenu dans le réservoir en fonction du temps.

La solution s'obtient à partir de l'égalité $\Delta m = -\frac{m}{V} d\Delta t + b\Delta t$, qui conduit à l'équation différentielle $m' = -\frac{d}{V} m + bd$. Ce problème pourrait se décliner de diverses façons, avec des variantes : le problème initialement refusé par les mathématiciens est de ce type. « La modélisation est une pratique scientifique majeure, qui concerne un nombre croissant de domaines […]. Modéliser est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres sciences », peut-on lire dans le document d'accompagnement du programme de TS. En conformité avec l'importance ainsi déclarée, on pourrait imaginer, en France, un usage de la banque d'exercices publiés sur le site du ministère Eduscol (dont la fonction est de montrer aux enseignants les types d'exercices qui doivent faire l'objet d'entraînement) qui permettrait de promouvoir des exercices de modélisation comme celui cité ci-dessus.

5.2. Introduire le nombre dérivé comme vitesse de variation

Suivant en cela le programme officiel français, un enseignant de première S peut introduire le nombre dérivé soit en utilisant le passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée d'un mobile, soit en faisant des zooms successifs sur une représentation graphique obtenue sur l'écran d'une calculatrice. Le nombre donné n'en demeure pas moins ce qui le définit mathématiquement, à savoir la limite lorsqu'elle existe de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers 0.

Comment introduire le nombre dérivé comme réponse à une question ? L'introduction cinématique répond certes à une question, celle de la détermination de la vitesse instantanée d'un mobile, question qui fait sens pour un élève, peut-on supposer ; mais cela reste une question spécifique de la cinématique, qui à elle seule ne justifie pas son extension à toutes sortes de fonctions. Il conviendrait donc de généraliser la question pour qu'elle ait un sens plus générique. On peut le faire de la manière suivante. Une fonction affine croît ou décroît en tout point de la même façon et sa pente « mesure » sa vitesse de croissance ou de décroissance. Lorsqu'on observe la courbe représentative d'une fonction « dérivable » *non affine*, il apparaît qu'elle varie plus vite en certains « endroits » qu'en d'autres, en certains points qu'en d'autres. Peut-on « mesurer » la variation – croissance ou décroissance – qui se fait ainsi plus ou moins vite ? Le nombre dérivé pourrait être une réponse à cette question, en fournissant une façon d'estimer la vitesse de variation d'une fonction [10]. Le taux de variation sur un intervalle serait une vitesse moyenne de variation et, par passage à la limite, on obtiendrait ponctuellement la vitesse instantanée de variation.

Supposons que l'on veuille étudier les variations d'une quantité en fonction du temps. Une

[10] Notons alors que si une fonction est à dérivée positive sur un intervalle, dire qu'elle est croissante sur celui-ci devient évident avec une telle façon d'introduire le nombre dérivée. La démonstration du théorème relève alors d'une question de cohérence théorique.

des premières choses à faire est d'essayer de déterminer la fonction exprimant cette variation. L'hypothèse que la vitesse de variation est proportionnelle à chaque instant à la quantité présente à cet instant se traduit par l'égalité $y' = ky$. On obtient ainsi sans difficulté l'équation différentielle. Le problème du produit pharmaceutique s'éliminant à une *vitesse* proportionnelle à la quantité rémanente dans le sang devient une banale application.

On peut aussi appliquer l'organisation praxéologique ainsi esquissée au problème de mélange d'une substance avec de l'eau, vu ci-dessus. Appelons $m(t)$ la quantité de sel présente dans le réservoir à un instant t. Étudions la vitesse de variation $m'(t)$. Une contribution positive à cette variation traduit le fait que le réservoir est alimenté en eau, l'alimentation étant proportionnelle au débit d et à la quantité b de sel par m^3 dans l'eau, soit proportionnelle à bd. La contribution à la vitesse de variation est constante – elle est égale à bd – car c'est la quantité de sel (en kg) qui rentre dans le réservoir en une minute. Une contribution négative à la variation provient du fait que de l'eau sort du bassin : cette contribution est variable mais elle est, à chaque instant, proportionnelle au débit d (si d est multiplié par 2, alors la vitesse est aussi multipliée par 2, etc.) ainsi qu'à la masse $m(t)$ de sel présente dans le réservoir à l'instant t (si cette masse est multipliée par 2, la vitesse est aussi multipliée par 2). Cette contribution est donc de la forme $kdm(t)$. Déterminons k ; pour $d = 1$ m^3/min et $m(t) = 1$ kg, alors la variation moyenne sur un intervalle de temps petit, en supposant $m(t)$ constant égal à 1, est $\frac{1}{V}$, ce qui nous donne aussi la vitesse instantanée. Nous obtenons une contribution négative égale à $\frac{1}{V}dm(t)$ et donc $m' = -\frac{1}{V}dm + bd$.

5.3. La relation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$

Un élève de TS pose la question suivante à son professeur de mathématiques : « Monsieur, je comprends ce que vous faites ; mais comment peut-on penser à introduire la fonction φ que vous avez utilisée ? » Cette question fait référence à la démonstration suivante.

> Soit à montrer que "pour tout x, tout y, $\exp(x + y) = e(x)\cdot e(y)$". Posons, y étant supposé constant, $\varphi(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$ et dérivons. La dérivée est partout nulle ; donc la fonction φ est constante. On obtient la valeur constante avec $x = 0$, ce qui donne alors le théorème.

En l'espèce, le professeur à qui cette question était posée n'a pas su répondre alors même qu'il la jugeait pertinente. Un premier élément de réponse, que nous ne développerons pas ici, consiste à se demander comment calculer $\exp(x)$ pour un x donné, si l'on a observé que la fonction exponentielle ne peut être ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle, et si l'on admet qu'elle n'est pas algébrique (c'est-à-dire qu'on ne peut calculer $\exp(x)$ à partir de x à l'aide des opérations algébriques usuelles). Une voie vers la réponse consiste à rechercher des relations vérifiées par la fonction et qui autorisent de tels calculs. Par exemple, ayant trouvé une relation algébrique liant $\exp(x + y)$, $\exp(x)$, $\exp(y)$, on doit pouvoir, connaissant deux de ces termes, calculer le troisième. Un enseignement conçu avec la dynamique engendrée par de telles questions pourrait permettre d'aborder l'algorithme Cordic, largement

utilisé par les calculatrices utilisées par les élèves [11].

Un autre élément de réponse, lié à des questions de modélisation (et conduisant à la fonction exponentielle) consiste à s'intéresser à une quantité variable avec le temps – ce peut être une population comme celle des atomes radioactifs – et à supposer que cette variation vérifie les deux propriétés suivantes.

> Hypothèse 1. La quantité présente au temps t est proportionnelle à la quantité de départ : si la quantité de départ est multipliée (ou divisée) par 2, alors la quantité au temps t est aussi multipliée (ou divisée) par 2, etc.
>
> Hypothèse 2. La variation ne dépend que du temps écoulé et pas du moment où l'on considère cette variation : pour une même quantité de départ, la quantité restante au bout de trois heures sera la même que cela se passe de 14 h à 17 h ou de 20 h à 23 h.

Traduisons mathématiquement ces deux hypothèses. Notons Q_0 la quantité de départ (ou une mesure de celle-ci) ; notons $Q(t)$ la quantité au bout d'un temps t. A priori Q est une fonction dépendant de deux variables, Q_0 et t : posons donc $Q(t) = F(Q_0, t)$. La relation de proportionnalité (hypothèse 1) implique que l'on a : $Q(t) = F(Q_0 \times 1, t) = Q_0F(1, t)$. Comme $F(1, t)$ ne dépend que de t, on peut poser $f(t) = F(1, t)$, de sorte qu'on a : $Q(t) = Q_0f(t)$. Décomposons alors le temps t en deux temps x et y de telle sorte que $t = x + y$. Au bout du temps x nous avons : $Q(x) = Q_0f(x)$. La durée x étant écoulée, faisons à nouveau varier le temps d'une durée y ; d'après l'hypothèse 2, la quantité au bout du temps y est alors le produit de la quantité de départ, soit $Q_0f(x)$, par $f(y)$, si bien que l'on a : $Q(x + y) = Q_0f(x)\cdot f(y)$. Mais nous avons aussi $Q(x + y) = Q_0f(x + y)$. On en déduit l'égalité $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$. Cela donne à voir une autre organisation praxéologique autorisant la modélisation de situations par des fonctions exponentielles, l'étude classique de la relation fonctionnelle étant alors justifiée comme suite à donner à ce travail de modélisation.

6. Modélisation et mathématiques « mixtes »

Comme en toute pratique humaine, un type de tâches T étant donné, il existe des techniques τ de réalisation des tâches t appartenant à T. Résoudre une équation différentielle *donnée* est clairement du ressort du mathématicien. Pour quelques-unes d'entre elles, on en connaît des solutions : pour les résoudre, il suffit d'appliquer un « résultat de cours », comme c'est le cas pour les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

Un autre type de tâches, voisin du précédent mais distinct cependant, consiste à modéliser un problème par une équation différentielle : le problème de la désintégration radioactive, celui du mélange d'une substance dans l'eau d'un réservoir ou encore celui de l'élimination de substances médicamenteuses dans le sang sont des exemples de tels problèmes. Des techniques de modélisation existent (avec des variantes selon les problèmes). Une technique consiste à procéder par étapes : on cherche un modèle local en tout point. Pour cela on fait des hypothèses de « régularité » ; cela conduit à une équation contenant une différence finie ($\Delta y/\Delta t$) qui est le modèle local cherché. On passe alors à la limite selon la variable temps et on obtient, avec l'apparition d'une vitesse qui devient une dérivée, une équation différentielle.

[11] Sur cet algorithme, voir par exemple http://jacques-laporte.org/LeSecretDesAlgorithmes.htm.

Notons que la discrétisation du problème, qui conduit à une étude de suite et qui n'est autre que la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle obtenue n'est pas un intermédiaire indispensable pour l'obtention de la solution continue : ce qui importe est l'obtention du modèle local en tout point.

Cette technique qui suppose d'abord de mettre en œuvre un « petit discours » qui conduit à écrire une équation puis à établir l'équation différentielle par passage à la limite n'est pas en elle-même difficile. L'obstacle à son usage en classe de mathématiques est qu'elle ne paraît pas « très orthodoxe » à un professeur de mathématiques qui se dit soucieux de « rigueur » et pour qui les seules justifications technologiques admises sont des démonstrations.

La technique évoquée avec passage par un modèle local sous forme d'équation aux différences finies pour armer la main et conduire à l'équation différentielle peut-être transitoire : dès qu'on est familiarisé avec celle-ci, on doit pouvoir évoquer directement la vitesse de variation d'une quantité et aller directement à l'équation différentielle. Cela pourrait se faire d'autant mieux si l'on prenait le soin d'introduire la dérivée comme une vitesse de variation !

Réhabiliter ce type de techniques, faire qu'il puisse être travailler en ouvrant clairement une rubrique « modélisation de problèmes conduisant à des équations différentielles » (tels les problèmes de mélange), ce serait restaurer des mathématiques que l'on qualifiait autrefois de « mixtes » en ce qu'elles n'étaient pas strictement incluses dans les mathématiques « pures » et qu'elles sont mal caractérisées par l'expression de mathématiques « appliquées », puisque c'est bien dans une certaine *mixité disciplinaire* qu'elles parviennent à exister.

Nous avons utilisé ci-dessus un modèle praxéologique du didactique, qui nous invite à regarder les mathématiques comme une pratique déterminées par ses conditions d'exercice. L'usage de ce modèle conduit à être sensible aux entraînements effectifs proposés aux élèves, ce qui, nous semble-t-il, renouvelle de façon significative le regard porté sur l'enseignement des mathématiques.

Bibliographie

Jullien Michel, Matheron Yves, Schneider Odile (2003). Quelques éléments de réflexion sur le sujet de mathématiques du baccalauréat 2003 SérieS. *Petit x*, 62, 72-77.

Ministère de la Jeunesse, de l'éducation et de la recherche (2002). *Accompagnement des programmes : Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économie et sociale*. CNDP

Terracher Pierre-Henri, Ferachoglou Robert (2002). *Maths Terminale S*. Hachette, Paris.

Tordeux Marie-Françoise (2002). *Physique-Chimie terminale S*. Bréal, Paris.

Winther Jean, Coste Rémy (2004), Les équations différentielles en terminale scientifique. *Bulletin de l'APMEP*, 450, 44-59.