UNA POSIBLE "RAZÓN DE SER" DE LA DIAGONALIZACION EN CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Cecilio Fonseca (cfonseca@uvigo.es)
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Vigo

Abstract
Teaching mathematics at university level does always take into account the *rationale* of the taught contents. We can talk about the *absence of problematic questions* that could constitute the "raison d'être" of mathematical organizations that are studied, especially if those questions come from the development of the practical-technical block. We present a proposal of local mathematical organization that structures the theme of *matrices diagonalisation* within a unique type of problems, thus appearing as its "raison d'être", that is, the generative question of the study process.

Résumé
Dans l'enseignement universitaire, la « raison d'être » des contenus mathématiques enseignés n'est pas toujours présente. Ceci est dû en grande partie à *l'absence de nombreuses questions problématiques* qui constituent la « raison d'être » des organisations mathématiques qui sont étudiées au cours de l'enseignement universitaire, spécialement si ces questions ont surgi du bloque pratique-technique. Nous présentons une proposition d'organisation mathématique locale qui permet de structurer *le thème de la diagonalisation des matrices* autour d'un seul type de problèmes, qui apparaît alors comme sa « raison d'être », c'est-à-dire la question génératrice du processus d'étude.

1. La organización matemática que se quiere construir

Nos situamos en un curso trimestral de Álgebra Lineal para la asignatura de Matemáticas de primer curso de Ciencias Económicas y Empresariales. El contenido del curso trimestral es el siguiente:

TEMARIO:
1. Cálculo matricial y sistemas de ecuaciones
2. Espacios vectoriales. Bases y dimensión
3. Aplicaciones lineales y expresión en distintas bases
4. Diagonalización de matrices

Supondremos que los primeros tres temas han dado lugar al estudio de las respectivas organizaciones matemáticas (OM) locales cuya descripción omitiremos aquí, que formarán

parte del material matemático necesario para el estudio y que consideraremos disponible para nuestra construcción.

El *problema docente* que nos planteamos es el de construir una Organización Matemática (OM) que incorpore los elementos básicos del álgebra lineal tal como aparecen en el temario clásico de esta asignatura. Presentamos una propuesta de OM local que permite estructurar el *tema de la diagonalización de matrices* en torno a un único tipo de problemas. La cuestión a la que dicha OM responde en sentido fuerte aparecerá como su "razón de ser" , esto es, la cuestión a la que responde en sentido fuerte la OM construida. (Barquero, Bosch, Gascón, 2006)

En la TAD se postula que, para que una cuestión matemática pueda estudiarse con "sentido" en la Escuela, es necesario:

(1) Que provenga de *cuestiones* que la Sociedad propone para ser estudiados en la Escuela (*legitimidad cultural o social*).

(2) Que aparezca en ciertas *situaciones* "umbilicales" de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).

(3) Que *conduzcan a alguna parte*, esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela, sean estas matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*).

Si denominamos "*razón de ser*" de una OM a las *cuestiones, inicialmente problemáticas, a las que dicha obra responde*, entonces podemos decir que muchas de las OM que se proponen para ser estudiadas en la escuela *han perdido su razón de ser*, su "sentido". Es previsible que este tipo de incompletitud limite, dificulte o cuanto menos condicione su estudiabilidad lo que supone cierta *incompletitud didáctica* (Bosch, Fonseca, Gascón, 2004).

En nuestro trabajo de tesis doctoral (Fonseca 2004) hemos mostrado que el *teoricismo* dominante en la enseñanza universitaria de las matemáticas provoca una desconexión creciente entre el bloque práctico-técnico [T/τ] y el bloque tecnológico-teórico [θ/Θ] de las OM estudiatdas a medida que va avanzando la actividad matemática. Muy raramente los elementos tecnológico-teóricos vienen a responder a cuestiones o a necesidades que han surgido en el desarrollo del trabajo de la técnica. La relación entre ambos bloques es muy asimétrica: mientras el bloque tecnológico-teórico dicta los contenidos del bloque práctico-técnico, éste tiene una incidencia casi nula en la constitución, desarrollo y estructura del bloque tecnológico-teórico.

Esta separación funcional entre ambos bloques (al menos en la dirección que va del bloque práctico-técnico a la teoría cristalizada que se muestra a los estudiantes), se pone de manifiesto en la *ausencia de muchas de las cuestiones problemáticas* que constituyen la "razón de ser" de las OM que se estudian en la Universidad.

En nuestro caso, para que la OM local que proponemos pueda estudiarse *con sentido* en la institución universitaria en cuestión deben cumplirse las siguientes condiciones:

(a) Los tipos de problemas que componen la OM deben estar vinculados de manera realista al *mundo empresarial* y retomar necesidades prácticas que allí aparecen.
(b) La construcción de la OM surgirá *como respuesta a uno de estos tipos de problemas* que se pueda formular inicialmente en términos no matemáticos. Dicho tipo de problemas constituirá la *situación generatriz* que será el motor del proceso de estudio.
(c) La introducción de las principales técnicas que componen la OM a estudiar se hará de manera *motivada*, es decir como respuesta a problemas que hayan surgido a lo largo del proceso de construcción.
(d) La dinámica del proceso de estudio provocará que sea el bloque práctico- técnico el que arrastre al bloque tecnológico-teórico, contrariamente a lo que suele suceder en la enseñanza universitaria de las matemáticas.

El proceso de construcción que presentamos provocará la necesidad de:

- Profundizar en el estudio de los mecanismos que rigen la construcción y caraterización de la estructura de una OML relativamente completa (Fonseca, 2004).
- Recurrir de manera no forzada al *programa informático Excel* para realizar los cálculos de manera eficaz y permitir así un *trabajo experimental* más rico que el que es posible desarrollar en un entorno lápiz-papel-calculadora.

2. Primera organización matemática: un problema de movilidad de recursos humanos

2.1. Situación generatriz

Nuestra situación generatriz (Chevallard, 1999) surge en el seno de un sistema económico representado por una serie de trabajadores de una empresa que sufren cambios de lugar de trabajo con el paso de los años como consecuencia de una política de movilidad puesta en práctica por la propia empresa.

El punto de partida de la construcción de nuestra OM surge a partir de la cuestión siguiente:

> Una empresa tiene tres sedes A, B y C. El director de recursos humanos ha adoptado una política de movilidad del personal senior que consiste en cambiar cada año algunos trabajadores de sucursal, con la posibilidad de volver a la sucursal de origen en los años posteriores. En el año 2000 se aplicó la política siguiente.

	Origen		
Destino ↓	A	B	C
A	200	0	150
B	160	270	30
C	40	30	120
TOTAL	400	300	300

1. Si se aplica durante varios años seguidos la misma política, ¿cómo evolucionará la distribución de trabajadores seniors en cada sucursal?
2. ¿Qué política se debe aplicar si se quiere que, a la larga, haya una determinada proporción p_1-p_2-p_3 de trabajadores seniors en cada sucursal?

2.2. Momento del primer encuentro con la cuestión inicial

La matriz anterior depende de la composición anual de trabajadores en cada sucursal (400 en A, 300 en B, 300 en C). Por lo tanto varía de un año a otro. Para llevar a cabo un estudio sobre la *política de movilidad* de personal, debemos considerar que permanece constante la *matriz de transición* que indica el porcentaje de profesionales *seniors* de A, B y C que se mueven a A, B y C. En el caso anterior, la matriz de transición es la siguiente:

Origen → Destino ↓	**A**	**B**	**C**
A	0,50	0	0,50
B	0,40	0,90	0,10
C	0,10	0,10	0,40

Si llamamos M a esta matriz y X_{2000} al vector que representa el total de trabajadores en cada sucursal en el año 2000 (X_{2000} = (400;300;300)), tenemos que $X_{2001} = M \cdot X_{2000}$
Si partimos de una distribución inicial del 400 trabajadores en A, 300 en B y 300 en C, obtenemos la distribución de trabajadores al año siguiente mediante el producto matricial:

$$X_{2001} = M * X_{2000} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 460 \\ 190 \end{pmatrix}$$

La primera componente se obtiene al realizar la operación 0,5·400 + 0·300 + 0,5·300 = 350 y tiene la siguiente traducción: los 350 trabajadores que llegan a la sucursal A al principio del primer año provienen de:

- 0,5·400 = 200 que vienen de A

- $0 \cdot 300 = 0$ ninguno de B
- $0{,}5 \cdot 300 = 150$ de la sucursal C

De forma análoga se repetiría para las otras componentes.

Obtenemos así la fórmula recursiva: $X_{2002} = M \cdot X_{2001} = M^{2} \cdot X_{2000}$, $X_{2003} = M \cdot X_{2002} = M^{3} \cdot X_{2000}$, etc. Por lo tanto, el problema inicial se reduce al estudio de la distribución de los vectores:

$$X_{2000+n} = M^{n} \cdot X_{2000}.$$

T_1 : Primer tipo de tareas
Dada una matriz de transición M de dimensión 3x3 y una distribución inicial X_{2000} en R^3, estudiar la evolución de la trayectoria:

$$X_{2000+n} = M^{n} \cdot X_{2000}.$$

2.3. Momento exploratorio con Excel: características de la trayectoria

La exploración de las tareas que forman parte de T_1 puede realizarse de manera efectiva recurriendo a un programa informático como, por ejemplo, la hoja de cálculo Excel. Se consigue de este modo realizar un trabajo experimental suficientemente rico (probando una gran cantidad de casos concretos) para poder formular hipótesis respecto a la trayectoria que se quiere estudiar.

τ_1. Calcular en una hoja de Excel los productos sucesivos $M^{n} \cdot X_{2000}$ para distintos valores de X_{2000} y distintas matrices M.

Presentamos a continuación las tres hojas de cálculo con los resultados de los tres casos siguientes:

- Caso 1. Empresas con 100 trabajadores repartidos en las 3 sucursales y con la misma política de movilidad
- Caso 2. Empresas con diferentes cantidades de trabajadores repartidos en las 3 sucursales y con la misma política de movilidad
- Caso 3. Empresas con 100 trabajadores y con distintas políticas de movilidad

CASO 1. EMPRESA CON 100 TRABAJADORES

Distribución de los trabajadores en el periodo 2001-2010

Destino \ Origen	A	B	C
A	0,5	0	0,5
B	0,4	0,9	0,1
C	0,1	0,1	0,4

ITERADOS DE (40,30,30)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	40	35	27	21	18	16	15	15	15	14	14
	30	46	57	64	68	69	70	71	71	71	71
	30	19	16	15	14	14	14	14	14	14	14

ITERADOS DE (50,30,20)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	50	35	26	20	17	16	15	15	14	14	14
	30	49	60	65	68	70	71	71	71	71	71
	20	16	15	14	14	14	14	14	14	14	14

ITERADOS DE (100,0,0)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	100	50	30	22	18	16	15	15	14	14	14
	0	40	57	65	68	70	71	71	71	71	71
	0	10	13	14	14	14	14	14	14	14	14

ITERADOS DE (0,100,0)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	0	0	5	9	11	13	14	14	14	14	14
	100	90	82	77	74	73	72	72	72	72	71
	0	10	13	14	14	14	14	14	14	14	14

ITERADOS DE (0,0,100)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	0	50	45	34	25	20	17	16	15	15	14
	0	10	33	50	60	65	68	70	71	71	71
	100	40	22	17	15	14	14	14	14	14	14

ITERADOS DE (10,30,60)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	10	35	32	25	20	17	16	15	15	14	14
	30	37	50	60	65	68	70	71	71	71	71
	60	28	18	16	15	14	14	14	14	14	14

CASO 2. EMPRESA CON DIFERENTES NÚMEROS DE TRABAJADORES

Distribución de los trabajadores en el periodo 2001-2010

	Origen		
Destino	**A**	**B**	**C**
A	0,5	0	0,5
B	0,4	0,9	0,1
C	0,1	0,1	0,4

ITERADOS DE (80,50,70)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	80	75	58	45	37	33	31	30	29	29	29
	50	84	110	125	134	138	140	142	142	143	143
	70	41	32	30	29	29	29	29	29	29	29

ITERADOS DE (25,0,25)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	25	25	19	14	11	9	8	8	7	7	7
	0	13	23	29	32	34	35	35	35	36	36
	25	13	9	8	7	7	7	7	7	7	7

ITERADOS DE (100,20,30)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	100	65	45	33	28	25	23	22	22	22	22
	20	61	83	95	101	104	106	106	107	107	107
	30	24	22	22	21	21	21	21	21	21	21

ITERADOS DE (100,100,100)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	100	100	80	64	54	49	46	44	44	43	43
	100	140	172	192	202	208	211	213	214	214	214
	100	60	48	44	43	43	43	43	43	43	43

ITERADOS DE (1000,0,0)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	1000	500	300	215	177	159	151	147	145	144	143
	0	400	570	646	681	698	706	710	712	713	714
	0	100	130	139	142	143	143	143	143	143	143

ITERADOS DE (10,30,60)

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
	10	35	32	25	20	17	16	15	15	14	14
	30	37	50	60	65	68	70	71	71	71	71
	60	28	18	16	15	14	14	14	14	14	14

CASO 3. EMPRESA CON 100 TRABAJADORES Y DIFERENTES POLÍTICAS DE MOVILIDAD

Distribución de los trabajadores en el periodo 2001-2010

Consideramos siempre la misma distribució inicial (40,30,30)

POLITICA 1

	A	B	C
A	0,5	0	0,5
B	0,4	0,9	0,1
C	0,1	0,1	0,4

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
40	35	27	21	18	16	15	15	15	14	14	14	14	14	14	14
30	46	57	64	68	69	70	71	71	71	71	71	71	71	71	71
30	19	16	15	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

POLITICA 2

	A	B	C
A	0,5	0,1	0,5
B	0,5	0,8	0,1
C	0	0,1	0,4

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
40	38	31	27	25	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
30	47	58	63	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65
30	15	11	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

POLITICA 3

	A	B	C
A	0,5	0	0
B	0	0,9	0,6
C	0,5	0,1	0,4

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
40	20	10	5	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	45	62	72	79	82	84	85	85	85	86	86	86	86	86	86
30	35	29	23	19	17	15	15	15	14	14	14	14	14	14	14

POLITICA 4

	A	B	C
A	0,5	0	1
B	0,4	0,9	0
C	0,1	0,1	0

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
40	50	32	25	22	20	19	19	18	18	18	18	18	18	18	18
30	43	59	66	69	71	72	72	73	73	73	73	73	73	73	73
30	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

2.4. Problema tecnológico y generación de un nuevo problema

La exploración de T_1 sugiere que, para cada distribución inicial X_{2000} de la misma cantidad total de trabajadores y cada política M, la distribución tiende siempre a una distribución fija X, aunque se necesiten según los casos distinto número de iterados. La distribución fija X no depende de la distribución inicial X_{2000} cuando fijamos el total de trabajadores de la empresa, pero sí de la matriz M que define la política de movilidad. Surge así el siguiente problema T_2:

T_2. ¿Cómo calcular directamente la distribución fija X a la que parece tender la trayectoria X_{2000+n} sin necesidad de aplicar muchas veces la matriz M?

τ_2. Resolver con Excel ecuaciones matriciales concretas del tipo $M \cdot X = X$ reduciéndolas al estudio del sistema homogéneo asociado: $(M - I) \cdot X = 0$.

Determinación del punto fijo

MATRIZ M

	A	B	C
A	0,5	0	0,5
B	0,4	0,9	0,1
C	0,1	0,1	0,4

MATRIZ I

1	0	0
0	1	0
0	0	1

MATRIZ M - I

-0,5	0	0,5
0,4	-0,1	0,1
0,1	0,1	-0,6

Det(M - I) = 0 (M - I)·X = 0 es un Sistema Compatible Indeterminado

Menor invertible:

-0,5	0
0,4	-0,1

Sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5\ z \\ -0{,}1\ z \end{pmatrix}$$

Solución :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ z \\ 5\ z \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

Comprovación:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que todas las ecuaciones matriciales resueltas conducen a un sistema compatible indeterminado. La generalización, explicación y justificación de este resultado queda resumido en la siguiente proposición:

θ_1. Como las columnas de M suman 1 (por ser una matriz de transición), las columnas de $M - I$ suman 0 y $\det(M - I) = 0$.
Por lo tanto el sistema lineal $(M - I)\cdot X = 0$ siempre es *compatible indeterminado* con una infinidad de soluciones, además de la solución trivial $X = 0$.
Luego toda trayectoria X_{2000+n} tiene una infinidad de puntos fijos posibles.

2.5. Momento de la evaluación

El estudio exploratorio nos ha permitido formular la conjetura siguiente: para cada M y para cada distribución inicial X_{2000}, la trayectoria X_{2000+n} tiende a un punto fijo X. Hemos visto también que la infinidad de puntos fijos solución de $X = M\cdot X$ dependen sólo de M, y no de X_{2000}. Pero el hecho de que una trayectoria concreta tienda a un punto fijo concreto sí podría depender de la distribución inicial X_{2000}. Sin embargo el trabajo exploratorio mostraba que el punto fijo no dependía de X_{2000} sino de la suma de componentes de X_{2000} (número total de trabajadores de la empresa). Llegamos así al cuestionamiento siguiente:

¿Cómo es la relación entre el punto fijo X, M y X_{2000}?
¿Se puede determinar el punto fijo X, si existe, a partir de M y de X_{2000}?
¿Cómo determinar la política M a aplicar a una distribución inicial X_{2000} para conseguir que, a la larga, se obtenga una distribución estable deseada X?

Una manera de analizar la dependencia que tiene X con M y X_{2000} consiste en estudiar la sucesión $\{M^n\}$, "neutralizando" la variable X_{2000}. Esto nos conduce a una nueva OM puntual en torno al estudio de la sucesión $\{M^n\}$.

3. La segunda organización matemática: cálculo de las potencias de una matriz

Describiremos ahora con mayor brevedad las etapas siguientes del proceso.

OM2: Estudio de la sucesión $\{M^n\}$

T_1. Dada una matriz de transición M de dimensión 3x3,
(1) ¿Cómo determinar la expresión general de los términos de $\{M^n\}$?
(2) ¿Cuándo converge $\{M^n\}$?
(3) ¿Se puede predecir el posible límite de $\{M^n\}$?

τ2. Cálculo con Excel de las potencias sucesivas de una matriz.

Potencias de M

Cálculo de las potencias sucesivas de una matriz M

	0,5	0	0,5	0,5	0,1	0,5	0,5	0	0	0,5	0,4	0,1	0,5	0,4	0,1	1	0	0
M =	0,4	0,9	0,1	0,4	0,7	0,1	0	0,7	0	0	0,5	0,5	0	0	1	0	0,9	0,1
	0,1	0,1	0,4	0,1	0,2	0,4	0	0	0,4	0	0	1	0,2	0,6	0,4	0	0	1
	0,3	0,05	0,45	0,34	0,22	0,46	0,25	0	0	0,25	0,4	0,35	0,27	0,26	0,49	1	0	0
M^2 =	0,57	0,82	0,33	0,49	0,55	0,31	0	0,49	0	0	0,25	0,75	0,2	0,6	0,4	0	0,81	0,19
	0,13	0,13	0,22	0,17	0,23	0,23	0	0	0,16	0	0	1	0,18	0,32	0,78	0	0	1
	0,22	0,09	0,34	0,3	0,28	0,38	0,13	0	0	0,13	0,3	0,58	0,23	0,4	0,48	1	0	0
M^3 =	0,65	0,77	0,5	0,5	0,5	0,42	0	0,34	0	0	0,13	0,88	0,18	0,32	0,78	0	0,73	0,27
	0,14	0,14	0,17	0,2	0,22	0,2	0	0	0,06	0	0	1	0,25	0,54	0,65	0	0	1
	0,18	0,11	0,25	0,3	0,3	0,33	0,06	0	0	0,06	0,2	0,74	0,21	0,38	0,62	1	0	0
M^4 =	0,68	0,74	0,6	0,49	0,48	0,47	0	0,24	0	0	0,06	0,94	0,25	0,54	0,65	0	0,66	0,34
	0,14	0,14	0,15	0,21	0,22	0,2	0	0	0,03	0	0	1	0,25	0,49	0,82	0	0	1
	0,16	0,13	0,2	0,3	0,31	0,31	0,03	0	0	0,03	0,13	0,84	0,23	0,46	0,65	1	0	0
M^5 =	0,7	0,73	0,65	0,48	0,48	0,48	0	0,17	0	0	0,03	0,97	0,25	0,49	0,82	0	0,59	0,41
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0,01	0	0	1	0,29	0,6	0,84	0	0	1
	0,15	0,14	0,17	0,31	0,31	0,31	0,02	0	0	0,02	0,08	0,91	0,25	0,48	0,74	1	0	0
M^6 =	0,71	0,72	0,68	0,48	0,48	0,48	0	0,12	0	0	0,02	0,98	0,29	0,6	0,84	0	0,53	0,47
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0	0	0	1	0,31	0,62	0,96	0	0	1
	0,15	0,14	0,16	0,31	0,31	0,31	0,01	0	0	0,01	0,04	0,95	0,27	0,54	0,8	1	0	0
M^7 =	0,71	0,72	0,7	0,48	0,48	0,48	0	0,08	0	0	0,01	0,99	0,31	0,62	0,96	0	0,48	0,52
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0	0	0	1	0,35	0,7	1,04	0	0	1
	0,14	0,14	0,15	0,31	0,31	0,31	0	0	0	0	0,03	0,97	0,3	0,59	0,89	1	0	0
M^8 =	0,71	0,72	0,71	0,48	0,48	0,48	0	0,06	0	0	0	1	0,35	0,7	1,04	0	0,43	0,57
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0	0	0	1	0,38	0,76	1,15	0	0	1
	0,14	0,14	0,15	0,31	0,31	0,31	0	0	0	0	0,01	0,98	0,33	0,65	0,98	1	0	0
M^9 =	0,71	0,72	0,71	0,48	0,48	0,48	0	0,04	0	0	0	1	0,38	0,76	1,15	0	0,39	0,61
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0	0	0	1	0,42	0,85	1,26	0	0	1
	0,14	0,14	0,14	0,31	0,31	0,31	0	0	0	0	0,01	0,99	0,36	0,72	1,08	1	0	0
M^{10} =	0,71	0,71	0,71	0,48	0,48	0,48	0	0,03	0	0	0	1	0,42	0,85	1,26	0	0,35	0,65
	0,14	0,14	0,14	0,21	0,21	0,21	0	0	0	0	0	1	0,46	0,93	1,39	0	0	1

3.1. El caso de las matrices diagonalizables

Aunque sólo mostramos aquí el cálculo de las potencias sucesivas de una matriz de transición, el caso general de una matriz M cualquiera muestra que hay una expresión simple para calcular directamente M^n si M es diagonal.[1]

θ1. Si D es una matriz diagonal, entonces D^n es la matriz diagonal que se obtienen elevando a n los valores de la diagonal de D.

[1] Por razones de simplicidad, omitiremos aquí el caso de las matrices triangulares. Nos reduciremos por lo tanto a las matrices M diagonalizables. El estudio se debería extender posteriormente a matrices cualesquiera considerando la matriz de Jordan asociada a M en lugar de la matriz diagonal.

La utilización de este resultado tecnológico requiere la movilización de una OM más amplia sobre la diagonalización de matrices. Una vez *motivada* esta OM, su construcción o retoma dependerá, evidentemente, del trabajo realizado previamente en la OM regional del álgebra lineal en la que nos situamos: espacios vectoriales, cambios de base, aplicaciones lineales, etc. Se pueden haber visto, por ejemplo, algunos casos de cambios de base en los que la matriz resultante es diagonal y haber analizado qué propiedades cumplen los vectores de la nueva base (vectores propios). De este modo se puede obtener un segundo resultado tecnológico que ya es "productor" de una nueva técnica:

θ2. Si M es una matriz diagonalizable, entonces $M^n = K \cdot D^n \cdot K^{-1}$ donde D es la matriz diagonal asociada y K la matriz cambio que transforma la base inicial en la base de vectores propios.

El problema del cálculo de la potencia de una matriz puede ahora ser resuelto en el caso general:

τ'2. Determinar la matriz diagonal D tal que $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$ y hallar $M^n = K \cdot D^n \cdot K$.

Diagonalización y cálculo de M^n

Dada una matriz M cualquiera, calcularemos la expresión general de M^n previa diagonalización
Sólo consideraremos el caso en que M diagonalice

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinación de los valores propios

$$\det \begin{pmatrix} 0{,}5 - \lambda & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 - \lambda & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1{,}8\lambda^2 - 0{,}95\lambda + 0{,}15 = 0$$

Resolemos la ecuación y hallamos: $\lambda_1 = 1$ | $\lambda_2 = 0{,}5$ | $\lambda_3 = 0{,}3$

2. Determinación de los vectores propios

		M·X	Matriz del sistema			Rango = 2			Solución:	
λ_1 = 1										
v_1 =	1	1	-0,5	0	0,5	-2	0	-0,5	1	x
	5	5	0,4	-0,1	0,1	-8	-10	-0,1	5	y
	1	1	0,1	0,1	-0,6					
λ_2 = 0,5										
v_2 =	1	0,5	0	0	0,5	-0,5	2,5	0	-1	y
	-1	-0,5	0,4	0,4	0,1	2	0	-0,4	0	z
	0	0,0	0,1	0,1	-0,1					
λ_3 = 0,3										
v_3 =	-5	-1,5	0,2	0	0,5	5	0	-0,5	-2,5	x
	3	0,9	0,4	0,6	0,1	-3,33	1,67	-0,1	1,5	y
	2	0,6	0,1	0,1	0,1					

3. Matriz cambio de base y matriz diagonal

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Comprovamos: $\mathbf{K*D*K^{-1} = M}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,143 & 0,14 & 0,14 \\ 0,5 & -0,5 & 2 \\ -0,07 & -0,07 & 0,43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

4. Cálculo de M^n

Tenemos $M^n=(K*D*K^{-1})^n=K*D^n*K^{-1}$

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}^n * \begin{bmatrix} 0,143 & 0,14 & 0,14 \\ 0,5 & -0,5 & 2 \\ -0,07 & -0,07 & 0,43 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,3^n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,143 & 0,14 & 0,14 \\ 0,5 & -0,5 & 2 \\ -0,07 & -0,07 & 0,43 \end{bmatrix}$$

5. Cálculo de M^n para valores grandes de n

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}143 & 0{,}14 & 0{,}14 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 2 \\ -0{,}07 & -0{,}07 & 0{,}43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}14 \\ 0{,}71 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}14 \end{pmatrix}$$

Valor exacto:

$$\mathbf{M^n = 1/14 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 10 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Finalmente, cabe retomar el problema inicial para demostrar la existencia del punto fijo en el caso particular de las matrices de transición:

θ3. (a) Si ***M*** es una matriz de transición, entonces siempre tiene un vector propio de valor propio 1 (vector fijo).

(b) Los demás valores propios de *M* tendrán necesariamente parte real < 1.

(c) Si ***M*** diagonaliza, entonces para valores grandes de *n* se tiene que:

$$D^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Por lo tanto,

$$M^n = KD^nK^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & k_2 \\ k_3 & k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

con (k_1,k_2,k_3) primer vector de la base de vectores propios (punto fijo de *M*).

3.2. Alcance de la organización matemática local construida

Esta técnica es aplicable a cualquier situación modelizable por una matriz input-output, en la que se produzcan intercambios entre distintas entidades: transportes entre ciudades, intercambios de productos (matrices de Leontief), etc. El intercambio también puede ser temporal, por ejemplo entre distintos estados de los individuos de una población: jóvenes, adultos y viejos o puede interpretarse como el contagio, incubación, manifestación de una enfermedad, si nos mantenemos en R^3, o a alzas y bajas de valores en bolsa en el caso de R^2.

CONCLUSIONES

1. El recorrido que acabamos de describir está ligado a una institución concreta, una facultad de ciencias económicas y empresariales y la enseñanza de las matemáticas que en ella se prodiga. Nos parece obvio que, en el caso de considerar otro tipo de institución, el proceso podría ser diferente y, por lo tanto, hacer aparecer una razón de ser distinta para la OM considerada. La razón de ser no es única sino que es relativa a la institución.
2. A diferencia del lo que se hace habitualmente en la enseñanza universidad, partimos de una situación problemática extramatemática que reúne dos características importantes: puede ser imaginada o vivida por el estudiante y es una cuestión que evoluciona a medida que se desarrolla el proceso de estudio. Además dicha cuestión surge en el bloque practico-técnico. Es este bloque el que empuja al bloque tecnológico-teórico, dando lugar a nuevas cuestiones problemáticas que generarán nuevas respuestas. Esta forma de articular el proceso de estudio provoca la aparición de una actividad matemática cada vez más completa y de complejidad creciente.
3. En el trabajo matemático que se lleva a cabo hay dos partes diferenciadas, una parte teórica (con un protagonismo importante del momento técnológico-teórico) y otra empírica (caracterizada por el momento del trabajo de la técnica) y representada por el programa Excel. La utilización de esta herramienta permite que el estudiante adquiera protagonismo en el proceso de estudio, pueda ver analogías y diferencias entre tareas, comprobar la validez de las respuestas, intercambiar experiencias, plantearse preguntas sobre el sistema que se estudia. La hoja de cálculo juega a la vez el papel de *medio* para el estudiante puesto que es la que permite contrastar la validez de las respuestas, y también el de *media*, al sugerir por ejemplo que el límite de la sucesión M^n es un punto fijo de la matriz, que no depende del vector inicial sino de la suma de sus componentes, etc. Es una herramienta esencial del trabajo experimental de los estudiantes.
4. En el recorrido matemático que se propone, la diagonalización surge como una necesidad a la vez práctica y teórica a mitad del recorrido. En la primera parte, el alumno maneja técnicas que supuestamente domina, como la multiplicación de matrices y la resolución de sistemas, lo que le permite obtener información del sistema económico propuesto. Es a mitad del recorrido donde se pone de manifiesto las limitaciones de la técnica de potenciación de una matriz, especialmente para determinar el momento en el que la matriz se estabiliza (es decir, el valor de n para el cual M^n no difiere mucho de M^{n+1}). Como necesidad teórica, aparece para explicar porqué la situación final no depende del reparto inicial sino del total de trabajadores. Aunque la técnica de diagonalización de matrices, por su complejidad teórica, deba ser introducida por el profesor, lo interesante aquí es que la necesidad de dar una respuesta al problema de la evolución de la población de trabajadores sea lo que provoque que surja la diagonalización como respuesta a una cuestión que se plantean los alumnos.

REFERENCIAS

BARQUERO, B., BOSCH, M., GASCÓN, J. (2006) La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. *Actas del I congreso internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico*, Baeza 2006.

BOSCH, M., FONSECA, C. y GASCÓN, J (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, 205-250.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universitat de Vigo**.**

GARCÍA, F.J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias.Universidad de Jaén.