UNE TECHNOLOGIE INTROUVABLE POUR LA SIMPLIFICATION DE FRACTIONS RATIONNELLES

Ruhal Floris, DiMaGe, Université de Genève, ruhal.floris@pse.unige.ch
Laura Weiss, Institut de formation des maîtres secondaires, Genève, laura.weiss@edu.ge.ch

RESUMEN

El estudio de una colleccion de grabaciones video de clases de mathematicas para alumnos entre 13 y 14 años (8° clase) en la parte francesa de Suiza nos permite de identificar uno de los problemas que suele encontrar un profesor de mathematicas, y eso gracias a un momento critico que se encuentra en esa colleccion: se trata del problema de la instauracion de una tecnica para la simplificacion de las fracciones racionales. Gracias a la tecnica de simplificacion de las fracciones numericas, el profesor ententa apoyar su teoria con una tecnica de simplificacion por la division - utilizada tambien para las fracciones numericas - mientras la simplificacion de las fracciones racionales se basa sobre la factorizacion anterior del numerator y del denominator. El analize de los planes de estudio y de las medidas de enseñamento en la parte francesa de Suiza demuestra que la reduccion en productos factorales - si esa está enseñada en la 7a clase - no esta utilizada para la simplificacion de fracciones. Otras observaciones confirman el caracter no aislado de esa dificultad.

ABSTRACT

The study of a corpus of videos of 8th grade mathematics lessons (age 13-14) of french-speaking Switzerland revealed a problem of mathematics teaching: the difficulty of establishing a technology for the simplification of rational numbers. Starting from the simplification of fractions of natural numbers, the teacher tries to base his technological argumentation on the technique of simplifying by division, used for these fractions, whereas the simplification of rational fractions is founded on the prior factorisation of the expressions in the numerator and denominator. The study of the curricula and manuals in french-speaking Switzerland shows that the decomposition in products of factors, although it is taught in 7th grade, is not used to simplify fractions. Other observations confirm the general character of this difficulty.

1 Introduction

Lors de son cours à l'école d'été de didactique des mathématiques de 1995, Brousseau (1996) distingue deux sources de modélisation. La première est une source 'idealiste' qui consiste à définir un concept, puis à chercher à identifier les observables auxquels il pourrait être confronté, tandis que la source 'empirique' a pour point de départ l'identification de faits relevant d'un phénomène. Pour Laborde (1988), « une observation prend le statut de phénomène didactique dès lors qu'elle est interprétée à l'aide d'une analyse ».

C'est dans cette seconde source de modélisation que nous situons notre contribution. Nous partons d'observations effectuées dans le cadre d'une recherche de type statistique avec une orientation qualitative, que nous présentons dans le paragraphe suivant. Nous avons repéré dans le corpus un événement particulier (décrit en §3). Nous rattachons cette observation à d'autres effectuées de façon indépendante (en §4). Nous analysons ces différentes observations de façon intégrée en nous appuyant sur l'approche anthropologique, et plus particulièrement sur l'identification des praxéologies concernées (§5). Ces analyses nous conduisent à l'hypothèse que les événements observés ne correspondent pas à un problème de tel ou tel enseignant particulier, mais à un problème de curriculum, et plus précisément d'articulation entre l'algébrique et le numérique.

2. Les données Timss-vidéo

Les possibilités techniques offertes par la vidéo numérique ont favorisé le développement de recherches sur l'enseignement dans une perspective de comparaisons internationales (Clarke, 2002) ou pour l'étude de la « qualité de l'enseignement » (Clausen et al. 2003) Ainsi la recherche internationale TIMSS-Video 1999 qui avait comme but la comparaison des pratiques d'enseignement des mathématiques dans les classes de 8ème degré de différents pays, à l'aide d'enregistrements vidéo a fourni un corpus de 39 leçons ordinaires de mathématiques de Suisse romande. En plus des vidéos des leçons et de leur transcription, ce corpus contient des questionnaires aux enseignants portant sur leur formation et leurs intérêts pour les mathématiques, ainsi que sur les objectifs qu'ils poursuivaient pendant le cours filmé. Nous avons aussi accès aux moyens d'enseignement de l'époque et actuels et aux plans d'études de mathématiques.

La recherche Timss-vidéo s'est intéressée, à comparer, entre autres, la part de la leçon dévolue à l'interaction publique (présentation publique de l'enseignant(e) ou d'un ou plusieurs élèves destinée à tous les élèves) et à l'interaction privée (les élèves travaillent à leur place individuellement, par paires, ou par petits groupes) ou la part de la leçon consacré à la présentation d'un nouveau contenu, à la pratique d'un nouveau contenu ou à la révision.

Différents rapports internationaux (Hiebert et al. 2003) et nationaux (Reusser et al. 2003, Ferrez et al. 2004) ont présenté les résultats de ces recherches. Aux résultats principalement quantitatifs évoqués ci-dessus se sont ajoutées des analyses plus spécifiques, par exemple l'étude du type de travail mathématique, qui a mis en évidence des différences, non seulement entre pays bien et mal classés dans les comparaisons internationales, mais, ce qui est plus surprenant, entre pays performants. Cette étude a consisté à comparer la *nature du travail*

mathématique qu'impliquent les énoncés de problèmes au *travail réellement accompli* et rendu explicite pour les élèves lors de la résolution. Pour ce faire un groupe de mathématiciens et de spécialistes de l'enseignement des mathématiques ont codé les énoncés de problèmes[1] traités dans les différentes leçons selon les codes « mathematical process » (Smith, M. 2002 ; Jacobs & al., 2003). Les énoncés des problèmes et la gestion publique en classe de leur résolution sont ainsi classés dans trois catégories intéressantes :

Enoncés des problèmes	**Résolution des problèmes**
	A : Answers Only
P : Using Procedures Application d'algorithmes (ex. : calcul numérique ou littéral), décisions de routines.	**P** : Using Procedures Application machinale d'un algorithme sans explicitation de liens avec les concepts mathématiques fondant le procédé.
S : Stating Concepts Problèmes faisant appel à des concepts à travers des déclarations ou par des exemples des définitions données : énoncer des formules, donner des définitions, reconnaître des exemples, etc.	**S** : Stating Concepts Les liens avec les concepts mathématiques sont explicités mais non développés.
M : Making Connections Problèmes exigeant des étudiants d'aller au delà de l'application d'algorithmes standards.	**M** : Making Connections Les liens avec des concepts mathématiques et la logique de la solution sont explicités et développés.

En Suisse Romande, sur l'ensemble des énoncés, environ 70% sont de type **P** Using Procedures, 20% de type **S** Stating Concept et 10% de type **M** Making Connection. En s'intéressant plus particulièrement aux problèmes pour lesquels l'énoncé est codé **M**, on constate qu'une partie importante de leurs résolutions est aussi codée **M**. Cette caractéristique **MM** semble être plus accentuée dans le cas des leçons suisses (Floris, 2002). Poursuivant ce codage sur le reste du corpus, nous avons confirmé ce premier constat, mais avons aussi trouvé de nombreux problèmes dont le traitement est clairement de type **M**, alors que l'énoncé est codé **P**. C'est dans le cadre d'un problème de type **PM,** que nous avons mis en évidence l'épisode que nous relatons.

Une des conséquences de ce type d'étude a été de montrer la relativité culturelle de la catégorie « qualité de l'instruction » et elle a suscité des projets de comparaisons plus approfondies portant sur des séquences de leçons sur le même sujet mathématique, tel que le Learner Perspective Study (Clarke, 2003 ; Shimizu, 2002) ou encore l'étude helvético-allemande en cours (Klieme & Reusser, 2003).

3. L'épisode critique $\frac{3a-3b}{4a-4b}$

Un exemple intéressant se produit dans la leçon suisse-romande 283. Dans cette leçon, l'enseignant commence par faire rappeler aux élèves ce que signifie simplifier des fractions, en faisant appel à la mémoire didactique de la classe :

[1] La définition des problèmes dans TIMSS est précise : il faut que sa résolution demande un calcul et qu'il y ait un traitement public arrivant à la résolution.

10:34	T	Douze quart, on peut la simplifier par ?
10:39	SN	()
10:40	T	On peut la simplifier par ? Oui Lucie?
10:43	SN	()
10:45	T	On peut la simplifier par, Lucie ?
10:47	SN	par quatre
10:48	T	Par quatre. Qu'est-ce qu'on fait quand on simplifie par quatre Lucie ?
10:53	S	Bin on regarde que... heu je sais pas, heu, on divise par le dénominateur.
10:59	T	on divise par le quatre, bon ici en l'occurrence, c'est le dénominateur, c'est pas toujours le cas. Mais on divise douze par quatre, on divise quatre par quatre, et puis on arrive à trois unièmes.

Ensuite il demande aux élèves d'exercer cette technique avec les fractions numériques $\frac{18}{12}$, $\frac{35}{49}$ et $\frac{63}{81}$, en annonçant déjà qu'il s'agit d'établir un parallèle avec les fractions rationnelles :

11:48	T	Alors on va profiter aujourd'hui de simplifier des fractions numériques et algébriques. Je vous laisse venir dans votre cahier d'exercice et on va comparer cette simplification dans le numérique et dans l'algébrique. Voir si on peut trouver des correspondances au niveau des fractions. Voilà, je vous propose l'exemple suivant... je vous propose l'exemple suivant ici... Trois exemples. Je vous propose ces trois exemples, vous pouvez noter simplement exercice au tableau. La consigne, quelle est la consigne
12:39	T	Ici Luc ?
12:41	SN	Simplifie le plus possible.
12:42	T	Le plus possible. Et comme première fraction, je vous propose ?
12:46	S	Dix-huit sur douze.

Ce n'est qu'après avoir fait un détour par l'écriture décimale des trois fractions ci-dessus, que l'enseignant en vient à la simplification de fractions algébriques. Il propose d'abord de simplifier $\frac{18ab}{27ab}$, puis $\frac{3a(b-1)}{2b(b-1)}$ qui ne posent pas de problèmes particuliers à la classe. La technique est issue de la technique employée dans le cas des fractions numériques :

26:55	T	Tu as trouvé deux tiers oui. Comment as-tu trouvé ces deux tiers ?
26:58	S	Bin parce que quand on voit qu'il y a ab en haut pis qu'y a ab dessous, on peut enlever.
27:02	T	On peut diviser par ?
27:04	S	Diviser par heu.
27:05	T	Ab. C'est bien juste hein ? donc on va simplifier par ab, on va diviser par ab tout à fait. Et puis il reste dix-huit sur vingt-sept.
27:15	S	Pis on peut les simplifier.
27:16	T	Oui par combien ? ?
27:18	S	Bin... neuf
27:19	T	Par neuf. Ça nous donnera ?
27:21	S	Deux tiers.
27:22:01	T	Deux tiers... Très bien.

A noter, qu'au tableau noir, le professeur n'explicite pas la division mais a tracé une barre oblique sur les expressions ab au numérateur et dénominateur.

Pour la fraction $\frac{3a-3b}{4a-4b}$ les élèves de la classe n'expriment tout d'abord pas de difficulté.

L'enregistrement vidéo montre toutefois un gros plan un cahier d'élève (Fig. 1).

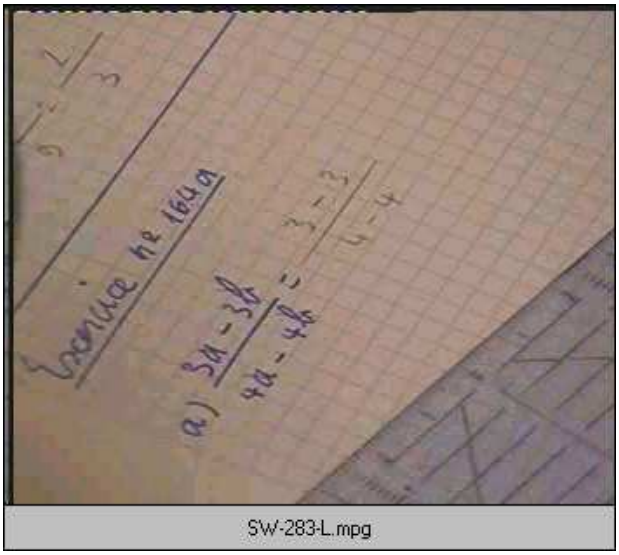


Figure 1 : Les calculs d'un élève

L'élève dont on a vu ainsi le cahier n'a pas compris la mise en évidence proposée par sa camarade Irène, qui permet ensuite la simplification de la fraction par le polynôme (a-b)

32:06	T	Alors qu'est-ce qu'on a fait dans ce premier exemple ici ? Heu Irène, qu'est-ce qu'on a fait dans ce premier exemple alors
32:14	SN	Bin on a enlevé un trois, ça fait trois fois a moins b.
32:20	T	B. comment ça s'appelle cette méthode de factorisation ?
32:23	S	On a simplifié.
32:25	T	Avant de simplifier, quand tu mets ce trois devant la parenthèse a moins b, ça s'appelle comment cette méthode de factorisation ?
32:33	S	Une multiplication par heu.
32:35	T	Humm oui c'est vrai, ça va au-delà de là, au-delà de simplement une simplification. Lucie ?
32:42	SN	On a mis en évidence.
32:43	T	On a mis en évidence. D'accord Irène ?
32:45	SN	Humm
32:45	T	Et puis au dénominateur, qu'est-ce que tu as fait aussi au dénominateur quand tu as ressorti le quatre ?
32:51	S	On a fait la même chose.
32:52	T	On a fait la même chose, c'est-à-dire ?
32:53	S	On a mis en évidence.
32:54	T	On a mis en évidence quatre. Et par chance on a retrouvé au niveau de la parenthèse?
33:00	S	a moins b.
33:00	T	a moins b. Et qu'est-ce qu'on va faire alors ?
33:03	S	on enlève le a moins b sur ()
33:07	T	Est-ce qu'il y a un terme qui serait plus correct que simplement enlever ?
33:11	S	On divise par a moins b.
33:12	T	On divise par a moins b ou alors vous dites on simplifie par a moins b. Voilà et tu trouves comme réponse ?
33:17	S	Trois sur quatre.
33:18	T	Trois sur quatre. Trois quarts. Oui ?

et il ose demander une explication supplémentaire :

33:20	SN	mais Monsieur j'ai pas bien compris parce que// trois moins trois ça fait zéro alors...
33:22	T	// ha il faut dire alors. Alors il dit, Nestor, trois moins trois, ça fait zéro. Qui veut lui expliquer alors ? Oui Giselle.
33:35	SN	Bin c'est faux, parce que c'est trois a moins trois b.
33:38	T	Haha.

33:39	SN	Ouais, mais si on simplifie depuis le début, après on fait//
33:41	T	//Haaa oui. Alors il nous pose un autre problème, est-ce qu'on pourrait pas simplifier dès le début, trois trois, quatre quatre ? Noémie ?
33:48	SN	Mais trois a c'est a fois a fois a. Sinon il n'y a pas de trois.
33:53	T	Tu es sûre de ça ? Trois a c'est a fois a fois a. Tu es sûre de ça ?
33:57	S	Ouais.
33:58		T Combien ça fait // a plus a plus a, d'accord. Oui, alors a plus a plus a, oui alors tout à fait. Alors continue oui.
33:59	S	//Trois a plus a
34:06		S Bin si on simplifie heu trois a, il ne reste plus qu'un a. Trois a... non ça marche pas, trois a divisé par quatre a, on peut pas simplifier.
34:19	T	Ça ira pas.
34:19	S	Non ça ira pas.

L'enseignant, pas plus que les camarades, ne comprend pas tout de suite comment Nestor en est arrivé à $\frac{3-3}{4-4}$, il croit que c'est par une réduction de termes au numérateur et au dénominateur :

34:20	T	Donc il y a une première chose, une première idée à retenir, je pense que là, ces deux termes sont pas semblables, tu te rappelles Nestor, trois a moins trois b. Donc déjà à ce niveau-là, on a pas des termes semblables. On peut pas simplement faire trois moins trois. Pis avec le dénominateur, comme dit Noémie, avec le dénominateur, trois et quatre, je peux pas simplifier non plus, hein d'accord ?

Mais soudainement l'enseignant réalise que l'élève a simplifié les lettres, la lettre a apparaissant au numérateur avec le a du dénominateur et de même avec les lettres b :

34:40	T	Est-ce que je pourrais simplifier les a par exemple ? Alors là, oui, on pourrait se poser la question. Est-ce qu'on peut simplifier les lettres a ?
34:47	SN	Bin oui.
34:47	T	Oui.
34:49	S	parce que dans les deux cas il y a un a. ()
34:52	T	haha voilà. Pis alors je simplifie aussi les lettres b.
34:56	S	Ouais.
34:56	T	Oui, pis je trouve trois moins trois.
35:00	S	Et quatre moins quatre.

L'enseignant pousse alors les élèves à aller au bout de leur raisonnement, alors que le résultat $\frac{3}{4}$ affiché au rétroprojecteur a déjà été évalué comme juste, et que la division de zéro par zéro fait fortement appel à la division d'un nombre par lui-même (sauf justement zéro !), qui donne 1.

35:01	T	Oui ce qui fait ?
35:03	SN	Ce qui fait bin ... heu trois quarts.
35:08	T	ha non ! trois moins trois.
35:09	S	Bin ça donne la réponse, trois mois trois sur quatre moins quatre.
35:12	T	Ouais, pis ça fait combien trois moins trois ?
35:14	S	Ça fait zéro.
35:15	T	Zéro. Quatre moins quatre, zéro. Zéro sur zéro, ça fait ?
35:18	S?	Ça fait quatre.
35:20	SN	Heu un (1) !
35:21	T	Un. Un. Marc ? zéro sur zéro ça fait un (1). Vous êtes sûr de ça ?
35:28	SS	Oui.
35:29	T	Ouais. Parole de scouts.
35:30	SN	Ouais.
35:31	T	Zéro sur zéro, ça fait un (1) ?
35:33	SS	Non ()

35:35	SN	C'est zéro.
35:35	SN	C'est zéro.

Mais comment s'en sortir, alors que les élèves n'ont jamais vu la division de polynômes et que le seul outil qu'ils ont à disposition pour simplifier des fractions est la division du numérateur et du dénominateur par le même nombre ? C'est finalement par une pirouette, grâce à la remarque d'un élève "*on ne peut pas diviser par zéro*", que l'enseignant peut laisser croire qu'il résout le dilemme posé par cette situation imprévue.

35:36	SN	Divisé par zéro.
35:38	T	pardon ?
35:39	SN	On peut pas diviser par zéro.
35:41	T	Ha. C'est embêtant alors Jean-Paul, on peut pas diviser par zéro. Donc on va pas donner la valeur, mais c'est en tout cas pas la valeur trois quarts. Voilà alors prudence Nestor, tu as raison de soulever le problème, il faut être prudent, Jean-Paul aussi, il faut être prudent, ici on a des additions et des soustractions, donc il faut faire attention, ce qui allait très bien dans les produits de facteurs, ce qui allait bien ici, tu vois par exemple, quand on écrivait ici dix-huit ab sur vingt-sept ab, on avait que des facteurs, ça allait très bien pour simplifier. Ici il faut être prudent, on commence à avoir des additions et des soustractions, donc il faut faire attention, faire attention à cela, pas essayer de simplifier comme ceci à travers la fraction. Mais bien pratiquer cette mise en évidence. Donc cette mise en évidence, elle va nous servir. On va noter quelques informations sur le cahier de théorie...

En effet, s'il finit par une mise en garde, de l'ordre de l'institutionnalisation, sur les danger des simplifications quand il y a des additions et des soustractions dans la fraction rationnelle que l'on désire simplifier, il n'insiste pas, car il se rend bien compte qu'il a peu de moyens pour argumenter dans ce domaine.

4 Autres observations

Une expérimentation dans plusieurs classes genevoises a fait apparaître une situation semblable (Weiss, L. 2006 ; Weiss, L. & Floris, R. à paraître). En effet, équipés d'un calculatrice, une majorité d'élèves, qui connaissent pourtant des techniques de simplification des fractions et qui ont travaillé l'année précédente ou au début de l'année scolaire sur la décomposition des entiers en produits de facteurs premiers, vont ‘à la pêche’ des diviseurs face à une fraction comme $\frac{176}{165}$, sans penser à factoriser 165, ce qui ferait apparaître assez rapidement 11 comme diviseur[2], par lequel il serait plausible de diviser 176.

Cette attitude a pu être constatée à plusieurs reprises, dans plusieurs classes. Seuls les meilleurs élèves d'une classe gymnasiale du Secondaire 2[3], qui sont justement en train de travailler sur la simplification des fractions rationnelles, font appel, pour simplifier des "grandes"[4] fractions, à la décomposition en facteurs premiers. Les transcriptions des entretiens avec deux élèves du Cycle d’orientation[3] qui ont participé à cette expérimentation nous semblent particulièrement éclairantes :

[2] 165 étant de façon apparente un multiple de 5, on calcule 165 : 5 = 33 et 33 = 3 x 11.
[3] voir ci-dessous encadré 1.
[4] On appelle ici "grandes" fractions des fractions dont numérateur et dénominateur sont des nombres de l'ordre de la centaine non simplifiables par les produits de puissances de 2 et 5.

Olivier, 9A, 5 simplifications justes sur 8, sur sa feuille 176/165 notée irréductible, sur sa calculatrice seule trace 176 :165

Question : comment as-tu procédé ?

O.: je n'ai pas trouvé de diviseurs communs, alors j'ai pensé que la division donnerait peut-être un nombre facile pour reconstituer une fraction, mais cela n'a pas marché, j'ai trouvé un périodique, c'est embêtant pour retrouver la fraction.

Q. : Alors tu as décidé que c'était irréductible

O.: oui parce que ça ne marche pas avec 2, ni avec 3, ni avec 5… 6 non, parce que pas avec 2, 7 pas non plus.

Q. : mais tu as essayé avec 7 ?

O.: non parce que je pensais que cela devait être irréductible, mais on peut essayer, *essaie 176 : 7*, non ça ne va pas ! On peut continuer encore avec 8, non pas 8 c'est pair, alors 9, on peut voir avec 9, mais je ne pense pas que ça joue, *il prend la calculatrice pour essayer*…
Q. : mais 9, il est "fabriqué" comment ?
O.: ah, oui c'est 3x3, *renonce à essayer*, donc ça ne va pas. Bon on peut continuer, 10 non, 11, on peut essayer avec 11 ?
Q. : tu peux essayer… ”
O.: je ne crois pas que ça joue... *essaie 176 : 11* ah ça donne 16, alors j'essaie avec 165 ! Ah oui, la fraction n'était pas irréductible, ça donne 16/15.
Q. : mais pour trouver ce facteur 11, on n'aurait pas pu faire autrement ? Parce que si au lieu de 11, le diviseur commun avait été 29, tu aurais dû continuer encore longtemps…
O.: bin, j'aurais pas trouvé !
Q. : mais pour trouver les diviseurs d'un nombre, il n'y a pas d'autre moyen ? Juste essayer ?
O.: mais ici, il faut des diviseurs communs, alors oui, il faut essayer, jusqu'à trouver celui qui va aux deux nombres.
Q : et la décomposition en facteurs premiers ? Vous ne l'avez pas apprise en classe ?
O. : ah, oui, ce truc ! Je ne me souviens pas.
Q. : parce qu'on voyait tout de suite certains diviseurs de 176 ou de 165. Par exemple, tu n'as pas pensé à diviser 165 par 5 pour voir ce que ça donnait ?
O., essaie 165 :5 = 33 : oui avec 33 on aurait pu voir que 3 est un diviseur de 165, mais je le savais, parce que si on fait 1+6+5 = 12 ça se divise par 3.
Q. : oui, mais 33 c'est 3x11 et tu aurais pu savoir que 165 se divise par 11 et tu aurais pu essayer 176 : 11, non ?
O.: oui peut-être, mais je ne crois pas que j'y aurais pensé.

Et voici pourquoi les élèves du Secondaire 1 renoncent rapidement à chercher d'autres diviseurs et surtout n'activent pas la décomposition en facteurs premiers pour la simplification des fractions :

Julie, 7A, 6 simplifications justes sur 8, sur sa feuille176/165 notée irréductible, sur sa calculatrice aucune trace
Question: Comment as-tu procédé ?
Julie: Il n'y a pas de diviseurs communs, donc c'est irréductible…
Q. : Mais qu'est-ce qui te fait dire qu'il n'y a pas de diviseurs communs ?
J. : Je ne sais pas ça se voit !
Q. : Cherchons ensemble. 165 est divisible par quoi ?
J. : Par 1 et 5 , et aussi 3.
Q. : Mais il n'a pas d'autres diviseurs ?
J. : Non 1 et 3 et 5, c'est tout.
Q. : Mais 3x5 = 15 donc 15 c'en est un. Tu ne peux pas en trouver d'autres?
J. : Il faut faire plein d'essais. *Prend la calculette*. Mais j'ai déjà essayé en classe.
Q. : Non je n'ai pas vu d'essais sur ta calculatrice.
J. : Alors j'ai pensé qu'il n'y avait pas de diviseurs qui jouaient pour les deux nombres.
Q. : Revenons à 165 et 15. On sait que 165 est divisible par 5 et par 3, on ne peut pas trouver d'autres diviseurs ?
J. : Oui, en essayant.
Q. : Mais si ça se divise par 5 et 3, c'est bien 5 fois quelque chose ou 3 fois quelque chose, non ?
J. : Bin on peut essayer 165 :15, *elle essaie 165 :15* ah oui ça donne 11.

Q.: Et alors pour la fraction 176/165 qu'est-ce que ça dit ?
J. : On divise 176 par 11, *elle tape 176 :11*, ça donne 16, alors la fraction n'était pas irréductible, c'est 16/15.
Q. : Est-ce que tu te souviendras de chercher les diviseurs par cette méthode ?
J. : Oui, mais c'est plus long que de trouver directement le diviseur commun et **avec les fractions qu'on a en classe, si ça ne se simplifie pas par 2 ou 3 ou des trucs comme ça c'est irréductible**.

Une autre observation faite au 10e degré (élèves de 15-16 ans) peut être rattachée à ce même phénomène. Lors de la résolution d'équations du second degré, les élèves rencontrent des expressions numériques contenant des radicaux. Il n'est alors pas rare d'observer des simplifications du type $\frac{3+\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$, qui se fondent sur la même règle que la simplification des lettres a et b évoqué ci-dessus.

5 Les organisations mathématiques et didactiques concernées par ces épisodes

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de décrire les organisations mathématiques et didactiques concernées par cet épisode, dans le but de comprendre les contraintes auxquelles est soumise ici l'action du professeur. Le cadre de l'analyse que nous effectuons s'inscrit dans celui que propose Bosch et Gascon (2003). Nous retenons l'idée d'étudier les organisations mathématiques et didactiques qui sont révélées au niveau de cette leçon particulière d'une part, et au niveau de l'institution d'autre part.

Encadré 1 : La structure scolaire en Suisse romande.

La Suisse romande compte 7 cantons et chacun a sa propre structure scolaire. Cependant il y a partout trois ordres d'enseignement : l'Ecole primaire hétérogène qui dure 5 ou 6 ans, le Cycle d'orientation (Secondaire 1, obligatoire) comptant 3 ou 4 années où les élèves sont séparés en filières (dont l'une est généralement de type prégymnasial) et l'Enseignement postobligatoire (Secondaire 2) qui se termine après 3 ou 4 ans par une maturité gymnasiale ou un diplôme. L'école est obligatoire jusqu'à 15 ans, de la 1ère primaire à la 9ème du Cycle d'orientation. D'importantes différences existent d'un canton à l'autre sur les dénominations des différentes filières du Cycle d'orientation et sur le pourcentage d'élèves qui les suivent. A Genève, où a été expérimentée la tâche de simplification des fractions avec la calculatrice, il y a deux filières : les regroupements A et B, le regroupement A étant suivi par environ ¾ des élèves d'une classe d'âge.

L'institution que nous considérons est l'enseignement des mathématiques au Secondaire 1 en Suisse Romande. Une justification est nécessaire, car au moment où la leçon a été donnée, les moyens d'enseignement et le plan d'études n'étaient pas les mêmes dans les différents cantons romands. Des moyens d'enseignements communs et uniques ont été édités et mis en œuvre depuis et un plan d'études commun est en cours d'élaboration. Nous avons examiné les différents moyens d'enseignement de l'époque en ce qui concerne les fractions. Cet examen, ainsi que celui des leçons du corpus TIMSS consacrées aux fractions, nous permettent de considérer le Secondaire 1 en Suisse romande comme une unique institution proposant un même ensemble d'organisations mathématiques. De ce fait, nous nous appuyons sur l'ensemble de ces données pour décrire les organisations mathématiques institutionnelles. Nous reproduisons en annexe un extrait des moyens d'enseignement genevois (CO, 1994) que

nous estimons significatifs pour l'institution concernée. Quant au plan d'études genevois de 2003, il précise:

Encadré 2 : Extrait du plan d'études genevois de 2003

Techniques et savoir-faire
Amplifier, simplifier, rendre irréductibles des fractions

Commentaire
On ne donnera pas un ensemble de recettes à appliquer, mais on opérera avec les fractions en donnant du sens aux opérations. **On s'exercera avec des fractions "raisonnables" : si la fraction n'est pas simplifiable par un facteur inférieur à 10, numérateur et dénominateur ne dépasseront pas 2 chiffres** [souligné par nous].

Décrivons les organisations mathématiques et didactiques observables dans cette leçon. Les trois premières tâches proposées sont la simplification de $\frac{18}{12}$, $\frac{35}{49}$ et $\frac{63}{81}$. Ce type de tâche n'est pas nouveau, il s'agit de révision, d'après l'enseignant. C'est donc du travail de la technique. La technique utilisée, et visible lors de la correction au tableau (16'11'') consiste à effectuer une même division au dénominateur et numérateur $\frac{18}{12}=\frac{18:6}{12:6}=\frac{3}{2}$. Comment l'élève trouve-t-il la valeur 6 ? Le plan d'études romand pour le Secondaire 1 précise, quant à lui : « détermine mentalement le PPCM et le PGCD de deux nombres (10 et 15 ; 12 et 20) ». On pourrait donc penser que l'élève identifie la divisibilité commune par 2, par 3 ou par 6 et choisit cette dernière valeur qui est la plus grande. Ce n'est pas tout à fait le cas, la technique utilisée est plus rudimentaire :

15:25	T	Voilà, j'écoute vos propositions. Si on prend la première fraction, oui Marc, dix-huit douzièmes.
15:31	SN	Heu on peut jusqu'à trois demi.
15:33	T	Trois demis. Quel, qu'est-ce que tu vas effectuer comme opération pour arriver à trois demi ?
15:39	S	() j'ai fait divisé deux par deux. () divisé par deux, ça fait neuf sixième.
15:48	T	Oui.
15:49	S	Après j'ai simplifié par trois, ça fait trois demi.
15:52	T	Donc on pourrait simplifier directement par ?
15:54	S	Six.
15:55	T	Six. Donc ça veut dire qu'on pourrait écrire ici directement dix-huit divisé par six et puis on peut faire la même chose avec douze divisé par six, on obtient trois demis, hein c'est ça ? voilà, cette simplification. Tout le monde se reconnaît dans cette simplification ? Ça joue ? Ça vous connaissez quand même je pense par rapport à cette simplification numérique.

La théorie anthropologique propose de prendre en considération, pour une organisation mathématique un bloc de savoir faire (type de tâche T et technique τ) ainsi qu'un bloc théorique (technologie : justification de la technique, théorie). Lors de la leçon observée, la technologie reste implicite, le déroulement et la réussite de l'action étant suffisante pour que tous reconnaissent un savoir faire légitime ; notons également le fait que l'on ne peut plus continuer à diviser, puisque l'on a choisi le plus grand diviseur possible. On retrouve souvent ce type d'organisation mathématique restreinte au bloc de savoir faire, lorsque le type de tâche est fortement algorithmisé, par exemple dans les calculs posés en colonnes pour les 4 opérations. Cependant, si aucun élément technologique n'est visible, dans la leçon sur laquelle

nous nous basons, en examinant les moyens d'enseignement utilisés (voir annexe), on constate que la technique se fonde sur une définition de fractions et de fractions équivalentes basées sur des partages, donc dans le cas considéré, la justification de la technique est à chercher dans le regroupement de parties 6 par 6. Appelons O_1 cette organisation mathématique.

Afin que notre analyse prenne du sens, et pour en venir au problème que nous identifions, examinons les organisations mathématiques alternatives. Lorsque l'on propose à des élèves de fractions qui ne sont plus dans le domaine des tables de multiplications (Weiss, 2006 ; Weiss & Floris, à paraître), la technique décrite ci-dessus ne peut pas être mise en oeuvre. Nous avons observé ainsi d'autres organisations mathématiques, ainsi la technique consistant à diviser systématiquement numérateur et dénominateur par les nombres entiers successifs, parfois même en partant de 1 (!), organisation pour laquelle le bloc technologico-théorique est également inexistant, ou s'appuie éventuellement sur la technologie décrite ci-dessus. Une version un peu plus sophistiquée de l'organisation mathématique pourra intégrer différents critères de divisibilité, rendant la technique plus efficace en sautant certains multiples.

L'évolution récente des plans d'études du Secondaire 1 et l'examen des nouveaux moyens d'enseignement (Chastellain & al., 2003), permettent de repérer une justification implicite avec l'étude des propriétés de la division : en divisant dividende et diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas, le résultat de la division est le même. La fraction n'est ainsi plus définie à partir d'un partage, mais en tant qu'opération. Des exercices fondent explicitement ainsi la justification de la technique d'addition des fractions (figure 2 ci-dessous extraite de ibid., 2003, p. 86)

152. Quelle somme ?

Voici deux procédés pour additionner $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$:

1) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et $\frac{4}{5} = 0{,}80$. Donc $0{,}75 + 0{,}80 = 1{,}55$.

Comme $1{,}55 = \frac{155}{100} = \frac{31}{20}$, on en déduit $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$.

2) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$

$\frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$.

Lequel des deux est-il préférable d'utiliser pour effectuer les opérations suivantes ?

a) $\frac{12}{5} + \frac{7}{10} =$

b) $\frac{3}{8} + \frac{7}{3} =$

c) $\frac{17}{10} - \frac{3}{10} =$

d) $\frac{2}{7} + \frac{5}{3} =$

Figure 2 : Deux techniques pour l'addition des fractions

Ces nouvelles organisations permettent de simplifier n'importe quelle fraction numérique, ce qui n'est pas le cas de O_1. L'instrumentation de la technique avec une calculatrice joue ici un rôle, permettant une rupture plus facile avec le contrat didactique stabilisé avec O_1 autour des nombres de la table de multiplication, alors que l'utilisation de techniques basées sur la division posée ne serait sans doute pas didactiquement viable.

Complètement différentes sont les organisations mathématiques basées sur une technique de décomposition des numérateurs et dénominateurs en produits de facteurs premiers, ou sur la recherche du PGCD. Dans ce cas, un théorème assure existence et unicité de cette décomposition, d'où la garantie de pouvoir simplifier n'importe quelle fraction en une fraction irréductible. Appelons O_2 l'organisation mathématique basée sur la décomposition. Elle est pourvue ainsi d'un bloc technologico-théorique fort, contrairement à O_1 et à ses extensions.

Le projet déclaré de l'enseignant est de fonder la simplification des fractions algébriques sur la simplification des fractions numériques. Répondant à la question « Quelle était la chose principale que vous vouliez que les élèves apprennent dans la leçon enregistrée ? », l'enseignant écrit :

> Les connaissances acquises dans les fractions numériques s'appliquent dans les fractions littérales avec en plus l'utilisation de la mise en évidence[5] pour la simplification de celles-ci.

L'enseignant se rend tout à fait compte de la plus grande difficulté de la tâche pour les élèves, sans pourtant vraiment mesurer, semble-t-il, la distance d'avec la tâche précédente. Car il s'agit en fait d'une nouvelle organisation mathématique, puisque le type de tâche 'mise en évidence' vient s'ajouter, ce qui ne serait pas le cas s'il se basait sur O_2, où la technique se fonde sur une factorisation préalable. Les difficultés rencontrées par l'enseignant peuvent ainsi s'expliquer par le choix -imposé par l'institution (voir figure 2)- de O_1 pour les fractions numériques, difficultés dont il est conscient puisqu'il écrit dans le questionnaire lorsqu'il lui est demandé si la leçon enregistrée a atteint son but :

> Pour la première partie, oui. Pour la 2ème partie, certains élèves ont oublié la méthode de la mise en évidence dans les factorisations pour la simplification des fractions littérales donc à reprendre obligatoirement dans la leçon suivante.

Or l'étude des plans d'études, des moyens d'enseignement et les autres observations effectuées montrent bien que cette difficulté n'est pas propre à cet enseignant, mais qu'il s'agit d'un problème que rencontrera inévitablement tout enseignant confronté au problème de mettre en place une technique de simplification des fractions rationnelles et de la justifier.

A niveau institutionnel, quelle est l'origine du problème ? En d'autres termes,d'où provient l'absence de l'organisation O_2? Notre analyse se situe au niveau de l'organisation didactique, qui propose une description de la structure de la mise en place d'une organisation mathématique, de son enseignement. Selon l'approche anthropologique, cette mise en place peut se faire de différentes façons, en fonction du poids des différents moments de l'étude :

[5]terme utilisé pour un certain type de factorisation en Suisse Romande, faisant appel à la propriété de distributivité.

première rencontre, exploration d'un type de tâche, travail de la technique, légitimation de la technique, institutionnalisation, évaluation. Dans leur cours à la XIème école d'été, Bosch & Gascon, 2003 proposent une modélisation épistémologique basée sur le poids respectif des différents moments. Ainsi, le travail de la technique pourra être dominant, correspondant à des organisations didactiques empiristes, que l'on pourra trouver dans les écoles techniques, par exemple. La réforme des années 70 était liée à des organisations didactiques théoricistes, avec prédominance des moments technico-technologiques : une travail de la technique fondé sur la présentation des propriétés mathématiques.

Nous postulons que l'enseignant est ici contraint par un modèle épistémologique général dans lequel ce sont les moments exploratoires qui tendent à dominer dans les organisations didactiques. En termes de la noosphère, il s'agit d'enseigner par problèmes et de donner du sens aux opérations (encadré 2). Ou, plus précisément, tout se passe comme si la noosphère cherchait à interdire le modèle théoriciste. De ces contraintes, résulte un accent sur les moments exploratoires, mais la faiblesse du bloc technologico-théorique conduit en compensation à une importance des moments du travail de la technique, comme le déclare l'enseignant:

> […] la méthode de la mise en évidence dans les factorisations pour la simplification des fractions littérales, donc à reprendre obligatoirement dans la leçon suivante.

Ces hypothèses sur le modèle épistémologique sont à la base de nos études en cours sur les leçons romandes du corpus Timss-video.

7. Conclusion : pour qui y a-t-il problème ?

En nous appuyant sur plusieurs situations d'enseignement, nous avons pu mettre en évidence les limites d'une organisation mathématique locale pour la simplification de fractions numériques, se basant sur la division du numérateur et du dénominateur par le plus grand diviseur commun. En effet, cette organisation ne peut pas être étendue à la simplification de fractions rationnelles, dans la mesure où celle-ci exige d'abord la factorisation des expressions algébriques du numérateur et du dénominateur, ce qui confronte les élèves avec des difficultés inattendues. Pour pouvoir étendre une organisation mathématique à de nouveaux objets, il s'agirait de lui conférer dès le départ un statut aussi général que possible. Pour la simplification des fractions numériques, cela peut se faire en utilisant de façon explicite le théorème de factorisation des entiers. Ce choix ne semble pas être celui du futur curriculum de mathématiques suisse romand, pas plus qu'il n'a été privilégié dans les moyens romands de mathématiques.

Il ne semble pas que le problème que nous avons identifié au niveau de l'articulation entre organisations mathématiques soit vraiment un problème pour tel enseignant particulier dans le cadre du modèle épistémologique dominant qui ne valorise pas le travail théorique. Ce n'est même pas vraiment un problème pour le Secondaire 1, car la simplification des fractions rationnelles n'est qu'au programme des filières prégymnasiales et dans certains cantons seulement. Nous n'avons pas étudié plus particulièrement ce type de classe, mais nous ne serions pas étonnés de la présence d'un plus grand travail théorique. Ainsi certains

enseignants du gymnase (filière maturité) du Secondaire 2 reprennent la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers avant d'aborder les fractions rationnelles.

Mais au-delà de la simplification des fractions, l'épisode analysé peut nous conduire beaucoup plus loin. Les échanges finaux à propos de 0/0 (voir §3) montrent que c'est la définition de fractions qui est en jeu. Il est particulièrement intéressant de noter que l'enseignant utilise encore les expressions 'code fractionnaire' et 'code décimal' renvoyant au plan d'études issu de la réforme 'maths modernes' dans lequel les nombres rationnels étaient définis à partir de classes d'équivalence. Les moyens d'enseignement actuels (Chastellain & al., 2003), entérinant les pratiques les plus récentes proposent de résoudre la question de l'égalité des fractions en considérant celles-ci comme des divisions (voir exercice 152 figure 2 ci-dessus). Dans ces conditions, il semble de plus en plus difficile d'articuler la simplification des fractions rationnelles avec celle des fractions, et au-delà se pose un problème d'articulation entre organisations mathématiques institutionnelles. La faiblesse des organisations mathématiques dominantes dans le Secondaire 1 entraîne des difficultés dans le Secondaire 2, dans la mesure où elles ne permettent plus l'articulation avec l'analyse, car c'est bien pour lever des indéterminations dans des calculs de limites qu'il est nécessaire de savoir simplifier des fractions rationnelles. Le problème du professeur générique de mathématiques au Secondaire 1 en Suisse Romande s'étendrait alors à celui de la cohérence d'un curriculum secondaire de mathématiques (et sans doute au-delà). Mais dans la crise épistémologique actuelle (Chevallard, 2006) un objectif de cohérence globale ne suffit sans doute pas et devrait être accompagné de motivations pour chacune des organisations mathématiques proposées. Ce n'est qu'à un niveau élevé de transposition didactique que le problème pourrait être traité. Ainsi la CEM (Commission Genevoise de l'Enseignement des Mathématiques) s'est récemment (2006) intéressée à la cohérence 'verticale'[6] de l'enseignement de l'analyse.

Bibliographie

Bosch, M., Gascon, J. (2003). Organiser l'étude: Théories et empiries. In J.-L. Dorier, Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Ed.), *Actes de la 11ième École d'Été de Didactique des Mathématiques. Cédérom.* (pp. 33-40). Corps - 19-30 Août 2001: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques.* Clermont - Ferrand: IREM.

CEM (commission genevois de l'Enseignement des Mathématiques) (2006) *Rapport d'activité du groupe de travail sur l'enseignement de l'analyse.* Document interne.

Chastellain, M., Calame, J.-A., & Brêchet, M. (2003). *Mathématiques 7-8-9. Nombres et opérations.* Lausanne: LEP.

Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à l'école: pour une révolution épistémologique et didactique. Colloque de l'APMEP, Clermond-Ferrand,

Clarke, D. J. (2003). International Comparative Studies in Mathematics Education. In M. A. C. A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F.K.S. Leung (Ed.), Second *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 145-186). Dordrecht: Kluwer.

Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schwei. *Unterrichtswissenschaft, 31*(2), 122-141.

Cycle d'orientation de l'enseignement secondaire(1994). *Mathématiques 8e S,L,M, GnivA-NA.* Genève: Département de l'instruction publique.

[6] C'est-à-dire entre les différents ordres d'enseignement.

Ferrez, E., Floris, R. & de Marcellus, O. (2004). *L'enseignement des mathématiques en 8e année dans sept pays. Résumé des résultats de l'enquête internationale "TIMSS 1999 Video Study"*. Genève.: Service de la Recherche en Education.

Floris, R. (2002). Didactique et occasions d'apprentissage des mathématiques. In ADME-SSRE (Ed.), *La qualité dans la formation et l'enseignement, comment la définir, comment l'évaluer?* (Vol. CD ROM). Lausanne: ADME-SSRE.

Hiebert, J. a. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries : Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC: Department of Education, National Center for Education Statistics.

Jacobs, J., Garnier, H., Gallimore, R., Hollingsworth, H., Givvin, K.B., Rust, K., Kawanaka, T., Smith, M., Wearne, D., Manaster, A., Etterbeek, W., Hiebert, J., & Stigler, J. (2003). *Third International Mathematics and Science Study 1999 Video Study Technical Report, Volume 1: Mathematics* (No. 2003–012): NCES.

Klieme, E., & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationales Vergleich. *Unterrichtswissenschaft, 31*(5), 3-15.

Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 9.3*.

Reusser, K., & Pauli, C. (2003). *Mathematikunterricht in der Schweiz und in weiteren sechs Ländern. Bericht über die Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Video-Unterrichtsstudie.* Zürich: Pädagogisches Institut, Universität Zürich.

Shimizu, Y. (2002). *Capturing the structure of Japanese mathematics lessons: Some findings of the international comparative studies* . Paper presented at the ICMI-Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education and Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education, May 27-31, Singapore.

Smith, M. (2000). *Mathematical Process Codes Directions*.

Weiss, L. (2006). Calculatrice, fractions et critères de divisibilité : quelles connaissances mobilisables en situation? In N. Bednarz & C. Mary (Eds.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque EMF 2006 (cédérom).* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Weiss, L., & Floris, R. (2007). *Une calculatrice pour simplifier des fractions : mise en évidence de techniques inattendues. preprint*.

ANNEXE : extrait de *Mathématiques 8e S,L,M, GnivA-NA* pp 77-79

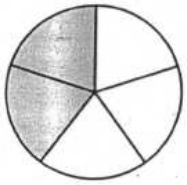
2. LES FRACTIONS

Fraction $\left\{ \frac{a}{b} \right.$

- a ← numérateur
- barre de fraction
- b ← dénominateur $(b \neq 0)$

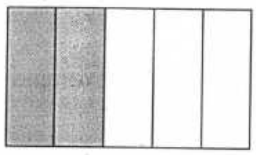
Le numérateur et le dénominateur d'une fraction doivent être des entiers.
Le dénominateur d'une fraction ne doit pas être égal à 0.
Pour le moment, on ne considérera que des numérateurs et dénominateurs positifs.

2.1 RAPPEL DE 7e: FRACTIONS ET PARTAGES



$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$

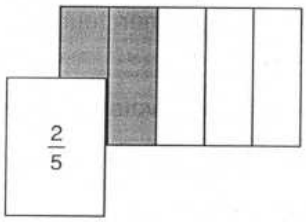


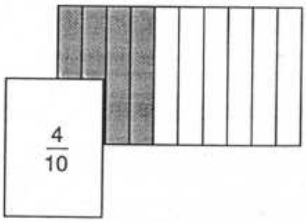
$\frac{2}{5}$

L'écriture $\frac{2}{5}$ montre qu'on a partagé le disque (le segment, le rectangle) en 5 parts égales, et qu'on a ensuite pris 2 de ces parts.

2.2 RAPPEL DE 7e: FRACTIONS ÉQUIVALENTES

Dans un partage, la même part peut être représentée par plusieurs fractions; on dit alors que ces fractions sont équivalentes.





$\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{10}$ sont équivalentes, car elles représentent la même part de ce rectangle.

On écrit: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Si on partage le rectangle en *deux fois plus* de parties, il faut prendre *deux fois plus* de morceaux pour avoir la même quantité:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 5}=\frac{4}{10}$$

Deux fractions sont équivalentes, si on peut utiliser l'une ou l'autre pour représenter la même part d'un même objet.

Comme le montre cet exemple, on obtient une fraction équivalente à une fraction donnée en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée par un même entier positif:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 5}=\frac{4}{10}$$

Dans cet exemple, on dit qu'on a **amplifié les termes** de la fraction $\frac{2}{5}$.

Si on lit ce même exemple de droite à gauche, on voit que

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

On dit ici qu'on a **simplifié** la fraction $\frac{4}{10}$.

On dit qu'on **simplifie** une fraction, lorsqu'on la remplace par une fraction équivalente, avec un numérateur et un dénominateur plus petits. Pour simplifier une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par un diviseur commun. Par exemple,

$$\frac{15}{35}=\frac{15:5}{35:5}=\frac{3}{7}$$

Dans cet exemple, on a simplifié $\frac{15}{35}$ en divisant son numérateur et son dénominateur par 5. Les fractions $\frac{15}{35}$ et $\frac{3}{7}$ sont équivalentes.

Si on simplifie une fraction, ou si on amplifie ses termes, on obtient une fraction équivalente.

On dit qu'une fraction est **irréductibl**e, si elle ne peut pas être simplifiée. Dans une fraction irréductible, le pgcd du numérateur et du numérateur est égal à 1.

Exemple Rendre la fraction $\frac{198}{462}$ irréductible.

Il suffit de diviser numérateur et dénominateur par leur pgcd.

Puisque 198 = 2·32·11 et 462 = 2·3·7·11 leur pgcd est 2·3·11 = 66 et on a :

$$\frac{198}{462}=\frac{198:66}{462:66}=\frac{3}{7}$$