POUR UNE « ANTHROPOLOGIE DE LA COMPREHENSION » : ESSAI DE REFORMULATION ANTHROPOLOGIQUE DU CARACTERE PARADOXAL DU CONTRAT DIDACTIQUE

Marc Zarrouati, IUFM Midi-Pyrénées, GRIDIFE-ERTe 46, France

Yves Matheron, IUFM Midi-Pyrénées, GRIDIFE-ERTe 46, UMR ADEF, France

Resumen : *Primero que todo, mostramos con dos ejemplos, cómo los ostensivos pueden llamar a ciertos niveles de co-determinación didáctica para los alumnos en posición de investigación de problemas. Esos niveles, en el seno de los cuales se resitúan los alumnos y las organizaciones matemáticas que contienen, juegan en su momento el rol de medio para la acción. Esta entrada permite proponer una explicación a lo que podría aparecer como un desfase o una conformidad de la acción de los alumnos con la esperada por el profesor. Así, estaremos en la medida de reformular en el campo de las prácticas el carácter pradójico del contrato didáctico y de proponer una problematización antropológica de la noción de Wittgenstein de comprensión como uso.*

Abstract: *We want to demonstrate, giving two examples, how « ostensifs » can bring out levels of didactic co-determination, for students who are in the process of searching for problems. These levels, in which the students place themselves, and the mathematical organisations which they contain, play in turn the role of place (milieu) for action. This way of approaching the question allows one to give an explanation of what can appear either to be a gap or an adequacy of the students' action to the expectation of the teacher. Thus, we would be able to reformulate in the field of practices the paradoxical character of the didactic contract (contrat didactique), and, in so doing, propose an anthropological problematisation of Wittgenstein's concept of comprehension.*

Les phénomènes de rupture de contrat didactique tels qu'identifiés et théorisés par Guy Brousseau et étudiés par Yves Chevallard (1988), reposent sur l'existence de décalages entre les pratiques de l'élève attendues par l'enseignant et les attentes de l'enseignant telles que comprises par l'élève. Les ruptures de contrats mettent partiellement à jour ces décalages et introduisent dès lors des codes nouvellement partagés par l'élève et le maître.

Mais le processus d'explicitation de pratiques qui est en jeu dans cette dynamique de rupture de contrat est duel. Ainsi, si certains de ces décalages gagnent à être résorbés au cours de l'apprentissage (comme les anciennes coutumes devenues un obstacle à l'apprentissage…), d'autres au contraire ne peuvent pas l'être – ou plutôt ne doivent pas l'être –, dans la mesure où ils constituent la nature même de l'apprentissage visé. Pour ces derniers, en effet, la dévolution d'une tâche dont le contexte serait complètement explicité par l'enseignant permettrait à celui-ci de mesurer la qualité d'exécution de la tâche par l'élève, mais certainement pas son aptitude à l'exécuter *à bon escient*. Quand bien même serait-elle possible, l'explicitation des conditions d'applications d'une technique pour une tâche ne résorbe jamais complètement le problème de l'adaptation de l'usage d'une connaissance à un milieu, car une fois réglées les conditions d'application d'une technique, encore faudrait-il préciser leurs conditions d'application, sortes de métarègles d'usage dont il faudrait là encore préciser l'usage, et ce de manière indéfinie. Cet « à propos » de l'usage de la règle par l'élève – qui correspond à ce que certains pourraient nommer *compréhension* de la règle – n'est donc jamais définitivement transmissible par l'enseignant, alors qu'il constitue pourtant l'un des objectifs majeurs de l'apprentissage.

Dans cette communication, nous examinons comment la théorie anthropologique du didactique peut rendre compte de ce caractère paradoxal du contrat didactique qui fait que « plus le professeur […] dit précisément à l'élève *ce* que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité » (Brousseau, 1986).

I. Deux exemples : entente et mésentente dans des phases de dévolution

I. 1. L'enseignement des systèmes de deux équations à deux inconnues

Le premier exemple est extrait d'une série de séquences d'un dispositif d'ingénierie didactique en classe de 3^{e} (élèves de 14 à 15 ans) conçu par Alain Mercier (voir Matheron 2000). Lors des premières séances, les élèves doivent résoudre des problèmes dont on leur précise qu'ils relèvent tous « d'une même classe ». On leur explique qu'en les résolvant ils pourront découvrir par eux-mêmes une partie des mathématiques du programme, et qu'ils peuvent d'ores et déjà en résoudre certains avant même de connaître la méthode valable pour tous. Dans un deuxième temps, et après avoir mis les problèmes en équation, l'objectif d'enseignement visé consiste essentiellement à faire étudier et rechercher le type de tâches « résoudre un système linéaire de deux équations du 1er degré à deux inconnues », et notamment les techniques associées. Les élèves commencent donc à rencontrer des tâches du type visé dont la résolution ne passe pas par la connaissance des techniques standard pour de tels systèmes. Puis, ces dernières apparaissent comme nécessaires lorsque les techniques empiriques développées antérieurement par les élèves atteignent les limites de leurs portées.

L'un des moyens pour atteindre l'objectif d'enseignement visé consiste à jouer sur les systèmes d'ostensifs (Bosch 1994, Bosch & Chevallard 1999) utilisés par les élèves. Au cours d'une dialectique où les élèves, alternativement, « inventent » des ostensifs pour des techniques personnelles et expérimentent l'usage de ceux qu'on leur propose, la construction de la technique standard de résolution des systèmes apparaît comme la solution la plus économique autorisée par les ostensifs et les techniques disponibles.

On donne ainsi le problème suivant : *Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à 2 lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?* Dans un premier temps, une élève résout ce problème de la manière suivante, et en utilisant son propre système d'ostensifs :

$\left.\begin{array}{l}\text{Chambres 2lits}\\ \text{Chambres 4lits}\end{array}\right\}$ 30randonneurs

12 chambres

12→ au moins 2 personnes=24

30-24=6÷~~2~~

si on divise 6 par 2 ça fait 2×3 randonneurs à placer 2+2=4

donc

3 chambre à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Puis, dans un second temps, disposant des ostensifs donnés par l'enseignant – *x*, *y* et l'accolade -, la même élève « invente » une technique de résolution qu'elle améliore ensuite :

$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+4y=30 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+4y=30 \end{cases}$
2x+4y=30	Plus court → 2x+4y=30 2(x+y)+2y=30
x+y=30-x-3y	2(x+y)=30-2y
12=30-x-3y	2×12=30-2y
x+3y=30-12	24=30-2y
x+3y=18	2y=30-24
x+y=18-2y	2y=6
12=18-2y	y=3
2y=18-12	x=12-3=9
2y=6	
y=3	
x=12-3=9	

Revenant à la première séance où, loin des élaborations personnelles précédentes, nous nous intéressons à deux élèves qui, parmi une liste de problèmes du même type proposés à la classe, recherchent le problème suivant : *A la clinique “ la Sauvegarde ”, il n'y a que des chambres à un lit et des chambres à deux lits. Aujourd'hui la clinique est complète : vingt malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il à la Sauvegarde ?*

Tandis que les élèves recherchent la solution, le professeur circule de groupe en groupe et assiste aux débats. Dans son groupe, Akim confronte tout d'abord ses résultats à ceux d'Alexandre, chacun utilisant pour cela sa calculatrice, puis il se met ensuite à chercher, mais en vain, un classeur de mathématiques complet auprès de ses camarades. Après les avoir observés, le professeur s'adresse à ces deux élèves :

> P : Donc, vous avez calculé avec le PGCD ; c'est marrant ! Vous avez pensé aux problèmes d'arithmétique qu'on a vus en début d'année. Et avec le PGCD, ça marche ? Expliquez-moi un peu.

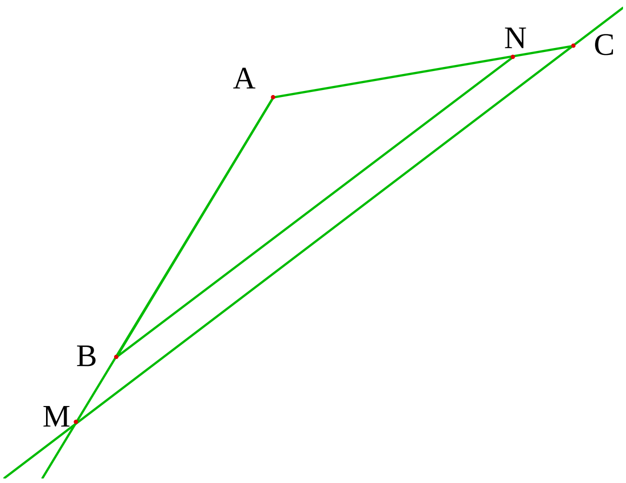
Les conditions de cette observation ne nous ont pas permis d'accéder à la production effective de ces deux élèves, ni de savoir quel PGCD ils calculaient ; nous savons seulement que les élèves conviennent dans la discussion avec leur professeur que leur technique « ne marche pas » pour d'autres problèmes du type proposé. Autant la solution de « première génération » donnée par l'élève sur le problème du refuge attestait une dévolution menant à la résolution attendue et à une réponse exacte, autant celle-ci témoigne d'une dévolution conduisant, certes, à une proposition de solution erronée, mais plus intéressant, inattendue. Nous reviendrons sur cet exemple en I. 3. 1.

I. 2. L'enseignement du développement de (a+b)(c+d)

Ce second exemple est extrait d'une séance “ ordinaire ” d'enseignement en classe de 4^{e} (âge 13 à 14 ans), dont nous donnons à grands traits l'ossature.

Chronologiquement, les élèves doivent résoudre les équations $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{4}$ et $x^2=x^2+x-2$, puis un problème de géométrie :

ABC étant un triangle isocèle de sommet A et dont les côtés égaux ont pour longueur x, N étant un point de [AC] tel que CN=1, M étant un point tel que B ∈ [AM] et BM=2, on a (BN)//(MC). Déterminer x.



Ces trois premières parties ne posent guère de difficultés aux élèves et se déroulent toujours selon le même scénario. Ainsi, pour le problème de géométrie, au bout de quelques minutes de recherche le professeur envoie un élève au tableau. Après qu'il a exposé son travail, que l'on s'est mis d'accord sur l'écriture convenable, phase qui dure plusieurs minutes au cours desquelles les échanges sont faits de propositions, d'erreurs et de corrections, les traces écrites au tableau sont les suivantes :

Dans AMC, comme (BN)//(MC), d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BN}{MC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AM}$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x+2}$$

$(x\text{-}1)\times(x+2)=x^2$

Puis, le débat s'installe entre le professeur et la classe :

P : Ces parenthèses-là, comment on fait pour les supprimer ?

Des élèves répondent : C'est la distributivité !

P : Oui, c'est la distributivité. La distributivité c'est quand y'a un nombre multiplié par une expression entre parenthèses. Là, on a deux parenthèses multipliées entre elles !…

Un élève E : C'est pareil, la première parenthèse peut être distribuée et après on aura un nombre avec une parenthèse et on pourra calculer.

Certains élèves disent qu'il faut tenir compte de x^2, d'autres qu'il y a un facteur commun.

P relève la réponse de E : Est-ce que vous avez compris ce qu'il a dit ?

L'élève E reprend : M'sieur, pour faire ça, il faut faire x-1 multiplié par x plus x-1 multiplié par…

La réponse de E se perd dans diverses propositions faites par d'autres élèves. Après intervention de P qui remet un peu d'ordre, trois élèves proposent finalement des réponses, dont Cédric qui propose au tableau d'écrire :

$(1\times x-1\times 1)(1\times x+1\times 2)$ et de factoriser par 1.

P lui demande : A quoi ça sert ?

Cédric retire sa proposition et demande alors comment faire

P : C'est ce qu'on va voir aujourd'hui.

La classe se lance alors dans la recherche du développement de (x-1)(x+2).

I. 3. Etude de ces deux exemples

Dans ces deux exemples, la dévolution de la responsabilité des élèves dans la résolution des problèmes proposés semble réussie du point de vue de l'enseignant, même si la production de la réponse attendue est encore en cours de construction (sur le concept de *dévolution,* voir Brousseau, 1998, pages 302 et suivantes). Néanmoins, dans ces deux exemples, on voit apparaître ce que l'on pourrait qualifier, faute de mieux, de « mésententes » relativement aux attentes du professeur : des élèves utilisent le PGCD de deux nombres pour un problème relatif à la résolution des systèmes linéaires de deux équations de 1^{er} degré à deux inconnues, et dans l'exemple (x-1)(x+2) la classe « n'entend pas » la solution convenable donnée par un élève. Afin d'en proposer une interprétation, notamment pour l'usage inapproprié du PGCD, nous recourons à la modélisation des niveaux de co-détermination didactique proposée par Yves Chevallard (2004). Rappelons ci-dessous un schéma qui s'en veut une illustration, et dans lequel les flèches représentent les interactions d'un niveau sur un autre :

Civilisation	
Société	
Ecole	
Pédagogie	
Discipline	$\cup_k (T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$
Domaine	*Praxéologie globale* $(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$
Secteur	*Praxéologie régionale* $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$
Thème	*Praxéologie locale* $(T_i, \tau_i, \theta, \Theta)$
Sujet	*Praxéologie ponctuelle* $(T, \tau, \theta, \Theta)$

Nous faisons l'hypothèse qu'en dévoluant la tâche, par l'intermédiaire de la situation, l'enseignant - de manière plus ou moins consciente –, ainsi que la situation, *indiquent* un niveau de co-détermination didactique en lequel se placent les élèves pour aborder la résolution de la tâche, avec plus ou moins de bonheur. Cette indication peut être donnée explicitement par le professeur ou implicitement par les ostensifs de la situation : c'est-à-dire par le professeur dans le cas d'un contrat faiblement a-didactique, ou par les ostensifs présents dans l'énoncé de la tâche. Les ostensifs, du latin *ostendere* (montrer, présenter avec insistance), sont des objets « ayant une nature sensible » et dotés d'une double valence instrumentale et sémiotique. En tant qu'outils, ils permettent l'accomplissement du travail mathématique, la construction des praxéologies et, en tant que signes, ils évoquent les non ostensifs qui sont des « émergents de ces praxéologies » ; soit ce que l'on nomme couramment « les idées, les intuitions ou les concepts ». L'évocation suppose une mémoire, dont l'un d'entre nous a donné ailleurs un début de modélisation (Matheron, 2001) ; nous ne l'abordons pas dans ce texte.

I. 3. 1. L'exemple des systèmes

Revenant aux problèmes sur les systèmes, l'activité proposée aux élèves inaugure l'étude d'un thème dont, ignorant l'objet, ils ne peuvent imaginer les contours. La lecture des énoncés les engage néanmoins à se situer au niveau de co-détermination didactique correspondant au domaine du « calcul ». Ce niveau est riche en organisations mathématiques : celles qui sont disponibles au niveau de co-détermination didactique dévolu et à ceux des rangs inférieurs (secteurs, thèmes, sujets). On retrouve ainsi un des résultats obtenus en théorie des situations. La dévolution d'un problème est aussi celle d'un milieu ; mais dans ce cas, et suivant l'approche anthropologique, un milieu constitué de l'ensemble des objets institutionnels qui, pour les sujets du système didactique, « vont de soi », c'est-à-dire pour lesquels les rapports institutionnels sont localement stables.

Un examen du programme officiel de la classe où se trouvent les élèves permet de préciser les niveaux de co-détermination didactique dans lesquels la transposition didactique a inséré les problèmes proposés aux élèves. En « remontant » du sujet vers le domaine, ils sont issus du sujet « Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant », inclus dans le thème « Equations et inéquations du premier degré », partie prenante du secteur « Calcul littéral », le tout constituant un sous-ensemble du domaine « Travaux numériques », que nous avions désigné auparavant sous le terme de « calcul ».

Pour les deux élèves observés, Akim et Alexandre, placés tous deux au niveau du domaine, et pris dans un contrat didactique « basé sur la transformation des savoirs anciens » (Brousseau, 1996) – puisqu'on a indiqué aux élèves qu'ils pouvaient d'ores et déjà résoudre certains de ces problèmes grâce à leurs connaissances anciennes -, la première bifurcation vers un secteur est fatale. Au lieu de rester dans le vaste domaine des « Travaux numériques », qu'ils ont commencé de parcourir dès leur entrée à l'école, ils choisissent un secteur exploré il y a quelques mois à peine ; ce dont témoigne la recherche d'un cahier de cours dans laquelle se lance Alexandre. Ils s'engagent dans le secteur « Nombres et calcul numérique », et non dans celui du « Calcul littéral ». Sans doute la présence de certains ostensifs (deux nombres) et l'absence d'autres (des lettres) les conduisent-ils à se diriger vers le type de tâches mathématique bien connu d'eux « Déterminer le PGCD de deux entiers naturels », placé à l'intérieur du sujet « Diviseurs communs à deux entiers », relevant du thème « Nombres entiers et rationnels ».

I. 3. 2. L'exemple de (a+b)(c+d)

Dans le cas du développement de $(x - 1)(x + 2)$, l'engagement des élèves dans la tâche problématique est trouvé dans la nécessité de réussir une sous-tâche afin de parvenir à la résolution d'un problème plus vaste la contenant, et qui semblait routinier. L'objet apparaît alors plus facilement saisissable, et son écologie, c'est-à-dire les organisations mathématiques avec lesquelles il semble *a priori* interagir, aisément identifiable.

La tâche problématique rencontrée par les élèves, issue de la nécessité de disposer d'une technique pour résoudre l'équation $(x - 1)(x + 2) = x^2$ – et sans même évoquer les ostensifs qu'elle contient – appelle en effet le thème « développement », relevant du secteur « calcul littéral ». Pour concevoir *a priori* cette séance, le professeur a usé d'une singularité de l'organisation du savoir telle qu'elle apparaît à la lecture du programme des classes de 4^{e}. Elle autorise la rencontre de deux thèmes relevant des domaines distincts des « Travaux géométriques » et des « Travaux numériques ». Le thème « Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue » est accompagné, dans le programme, du commentaire « Les problèmes issus d'autres parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution ».

Durant cet épisode, la réponse convenable donnée par un élève n'est pas entendue de la classe, prise dans l'activité qu'elle tente de mener à bien. L'aspect problématique même de ce développement n'est pas perçu de tous dans un premier temps, comme l'atteste l'intervention de Cédric.

Dans les deux exemples montrés, la dialectique de l'ostensif et du non-ostensif qu'il évoque - dans ce cas un niveau de co-détermination didactique – fournit une clé pour comprendre la dévolution d'un milieu pour l'action de l'élève et analyser le développement de cette action, qu'elle le conduise ou non jusqu'à la résolution de la tâche proposée.

II. Proposition de formulation anthropologique du caractère paradoxal du contrat didactique

II. 1. Niveaux de co-détermination didactique et dévolution « marginale »

L'ensemble des niveaux de co-détermination induit, pour une transposition didactique donnée, un ordre partiel sur les organisation mathématiques, et donc sur les types de tâches attendues. Ces dernières relèvent en effet de sujets, thèmes, secteurs, domaines, etc., et peuvent ainsi être à la fois distinguées et rapprochées les unes des autres, au gré des associations voulues, et dans la mesure des contraintes didactiques posées par l'organisation du savoir enseigné. Mais derrière cette structuration des organisations mathématiques il y a une structuration latente des couples ostensifs/non ostensifs (notés (O, NO) dans la suite). Nous avons vu, à partir de deux exemples, comment la mise en évidence de la structuration des couples (O, NO) en fonction des niveaux de co-détermination didactique permet de donner sens à certains phénomènes de « dévolution marginale », c'est-à-dire de construction par l'enseignant d'un milieu a-didactique suffisamment ambiguë pour donner rationnellement lieu à la mise en œuvre de sous-techniques assez éloignées de l'activité institutionnellement visée.

On peut dès lors penser qu'un travail d'explicitation de la structuration de ces couples (O, NO) appuyé sur l'analyse des niveaux de co-détermination didactique, pour une transposition didactique donnée, pourrait permettre à l'enseignant de repérer les ambiguïtés d'interprétation possibles d'un système d'ostensifs envisagé. On peut alors imaginer que l'enseignant puisse organiser le milieu a-didactique de manière à en contrôler les « dévolutions marginales », c'est-à-dire que l'enseignant soit en mesure de constituer en milieu un système d'ostensifs suffisamment non ambiguë pour ne pas susciter l'engagement des élèves dans des sous-tâches imprévues.

Nous allons voir dans cette partie qu'un tel travail d'explicitation, pour intéressant qu'il soit, ne règle pas réellement le problème posé : au lieu d'une « dévolution marginale possible », on prépare alors une « dévolution restreinte probable », c'est-à-dire la dévolution d'un ensemble de pratiques qui n'entraînent qu'une acquisition approximative et partielle de la connaissance visée, celle-ci désignant la connaissance construite et validée par l'institution. Plus précisément, nous allons montrer que toute diminution dans l'ordre de l'ambiguïté s'accompagne quasi-mécaniquement d'une restriction dans l'ordre de la « compréhension », en un sens que nous allons maintenant définir.

II. 2. « Compréhension » ou « émergence du rapport à un objet »

Explicitons brièvement dans le cadre anthropologique le vocable « d'acquisition de la connaissance visée ». Y. Chevallard et M. Bosch définissent le « rapport à un objet » comme émergent de l'ensemble des pratiques qui ont à faire avec cet objet. « La question de la “ nature ” de l'objet renvoie ainsi au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé » (1999).

Ainsi, la « dévolution restreinte probable » évoquée ci-dessus est la dévolution d'un ensemble de pratiques qui entraînent l'émergence d'un rapport à un objet. Ce dernier ne recouvre qu'approximativement et partiellement le rapport à ce que nous avons appelé la « connaissance visée », et que l'on peut maintenant définir comme *le rapport institutionnel que l'enseignant souhaite voir entretenu avec un non ostensif spécifique*, ce rapport institutionnel constituant la praxéologie attendue.

Imaginons par exemple que, dans la première séquence étudiée dans la partie I, l'enseignant, après avoir analysé les niveaux de co-détermination didactique devant intervenir dans l'activité, se propose de constituer l'organisation et le contenu du système d'ostensifs de manière à éviter que le milieu ainsi formé renvoie les élèves au secteur « Nombres et calcul numériques » et donc au calcul du PGCD, comme l'ont fait Akim et Alexandre. En organisant le milieu de manière moins ambiguë, l'enseignant ferme dans le même temps la possibilité pour l'élève d'éprouver la non pertinence du recours à des secteurs connexes de l'activité, et réduit de ce fait le champ des usages possibles – et attendus – de la connaissance visée construite dans cette activité.

Si on définit maintenant la compréhension d'un objet, par extension de la notion de compréhension d'un mot ou d'un concept, comme *aptitude à en faire usage à bon escient* (Wittgenstein, 1932-1935), on peut remarquer que dans la perspective anthropologique, ***connaissance et « compréhension » de l'objet vont se confondre***. Toutes deux seront en effet des émergents de l'ensemble des pratiques qui ont à faire avec cet objet. Dès lors, on peut reformuler la proposition précédente et écrire qu'une dévolution « restreinte » est la dévolution d'une activité conduisant à la compréhension d'un concept qui ne recouvre que partiellement le concept visé. Autrement dit, les pratiques à mathématiques que l'élève va être amené à initier (PME), dans le cadre de la résolution du problème qui lui a été dévolu, ne constituent pas un sous-ensemble de la totalité des pratiques à mathématiques à initier (PMI) pour que l'élève construise un rapport institutionnel à l'objet visé similaire à celui attendu par l'enseignant. Les PME constituent un ensemble non inclus dans les PMI, et dont l'intersection avec les PMI est non vide. Nous ne pouvons donc pas dire que la compréhension de la connaissance visée produite chez l'élève par les PME constitue une partie de la compréhension attendue. Nous pouvons simplement dire que la zone de recouvrement entre compréhensions attendues et émergentes est non vide, et donc que la compréhension de l'élève est *approximative* et non pas partielle.

II. 3. Description formelle

Les ostensifs dont dispose l'enseignant sont en nombre fini. Chacun va donc être utilisé dans de nombreuses activités qui ne sont pas toutes censées renvoyer au même non ostensif. De ce fait, chaque ostensif renverra à de nombreux non ostensifs, et c'est la présence d'un jeu d'ostensifs donné particulier qui devra permettre à l'élève d'identifier le non ostensif visé. Pour que cette détermination soit la moins ambiguë possible, il est nécessaire que le jeu d'ostensifs retenu « corresponde » à un nombre suffisamment limité de non ostensifs.

Formellement, on peut modéliser les choses de la manière suivante : à chaque ostensif O on associe le champ des usages possibles de cet ostensif, c'est-à-dire la famille des couples (O, NO_k), où NO_k est le k-ième non ostensif associé à O. « Reconnaître » le type de tâches à mettre en œuvre pour rentrer dans le problème, revient à sélectionner quelques couples (O, NO_k) parmi tous les k possibles, c'est-à-dire à sélectionner quelques non ostensifs particulier. Or ce travail de sélection constitue en soi le résultat d'un ensemble de pratiques à mathématiques qui ont conduit à produire un nouveau rapport au savoir institutionnel visé.

En faisant cela, on construit donc un nouvel usage pour les quelques non ostensifs NO_k retenus, ou, en d'autres termes, on enrichit le rapport de l'élève à ces objets NO_k puisqu'on lui permet de mettre en œuvre de nouvelles tâches ayant affaire avec NO_k. Le processus est donc dialectique : l'utilisation des ostensifs (O_1,…O_m) présentés dans l'étude va amener l'élève à opérer une sélection dans l'ordre des non ostensifs potentiellement visés. Cette sélection, cette reconnaissance, s'opère au travers de la mise en œuvre par l'élève de tâches nouvelles. La réalisation de ces tâches conduit à la production de nouveaux couples (O, NO) et, par là, à l'enrichissement du rapport de l'élève au non ostensif visé. Il s'ensuit un accroissement de l’ensemble des couples (O, NO), ce qui rendra le travail de sélection suivant encore plus difficile et plus fin, etc.

Pour aider l’élève à « reconnaître » le type de tâches à mettre en œuvre, on pourrait par exemple construire l’énoncé, ou de manière plus générale le système d’ostensifs (O_1,…O_n) présenté, de manière à restreindre drastiquement le champ des usages possibles – c’est-à-dire l’ensemble des non ostensifs visés – de ces ostensifs. Il semble alors nécessaire d’utiliser des ostensifs dont les champs d’usages possibles se recouvrent faiblement. En augmentant adroitement le nombre d’ostensifs présentés, on devrait donc arriver à diminuer la taille de l’intersection des champs des usages possibles, c’est-à-dire à limiter l’ensemble des non ostensifs potentiellement visés.

Ainsi, comme évoqué précédemment, c’est en donnant aux élèves un ostensif supplémentaire dans l’énoncé qui les dissuaderait de s’orienter vers le secteur « Nombres et calculs numériques » que l’enseignant pourrait par exemple, et s’il le souhaite, réduire l’ambiguïté du jeu d’ostensifs retenu. Les ostensifs que l’on peut potentiellement introduire dans le milieu pour en réduire le degré d’ambiguïté apparaissent donc comme constituant une sorte de variable didactique dont l’enseignant pourrait faire usage pour contrôler le déroulement de la dévolution.

L’étude des niveaux de co-détermination didactiques permet donc la mise à jour des contraintes structurelles didactique potentiellement induite par l’organisation d’un milieu selon un système d’ostensifs donné. Tout se passe comme si la décomposition du savoir enseigné en niveaux de co-détermination didactique pouvait constituer une mémoire de la manière dont la classe a préalablement produit et agencé entre eux les couples (O,NO).

II. 4. Le paradoxe anthropologique de la dévolution

Mais en réduisant ce degré d’ambiguïté, on pèse fortement sur la pratique de l’élève. Au lieu de l’amener *à produire **par l’étude** des couples (O, NO) nouveaux à partir d’une problématisation de l’énoncé donné* (des couples qui contribueront eux-mêmes à la circonscription attendue du domaine de l’usage visé par l’enseignant pour cette activité), on lui présente des couples (O,NO) anciens, préalablement agencés, pour que l’élève « reconnaisse » sans ambiguïté la tâche à accomplir. Dès lors, ce dernier ne produit pas de couples nouveaux et, par suite, n’enrichit pas son rapport à l’objet visé, rapport qui est, rappelons-le, un émergent de l’ensemble des pratiques ayant affaire à cet objet. On n’évalue plus, non plus, l’aptitude de l’élève à produire les repères appelant à construire et mobiliser des techniques de réalisation de telle ou telle tâche, mais uniquement son aptitude à interpréter les signes qui lui sont présentés.

Une illustration extrême de cette situation est donnée, en France, par certaines activités « à trous » proposées dans des manuels. Ainsi, par exemple, dans cet extrait tiré d’une activité d’un manuel de 5e (élèves de 12 à 13 ans) et relative au cercle circonscrit à un triangle *LMN* dont les médiatrices D de [*LM*] et Δ de [*MN*] sont sécantes en *A* :

2. Recopier, compléter et justifier :

a. *A* est sur la **…** du segment [**…**], donc **.** *A*=*M* **.**

donc *AL*=*AN*

A est sur la **…** du segment [**…**], donc *M* **.** = **.** *A*

b. Le **…** *A* est donc aussi sur la **…** du **…**[*LN*].

Dans cet exemple, qui ne caricature pas tant la réalité de l'enseignement des mathématiques que l'on pourrait le souhaiter, le rapport (O, NO) à établir par l'élève peut être trouvé à l'extérieur des mathématiques : par exemple, en grammaire, où le genre féminin de l'article défini « la » précédant les « **…** » ne saurait mener vers une réponse en termes de substantif masculin !

Comme on l'a vu dans les exemples de la partie I, la réalité d'un enseignement sérieux des mathématiques conduit cependant à placer les élèves dans des situations problématiques dont les solutions sont des organisations mathématiques à construire et qui, pour prendre une métaphore topologique, sont situées dans l'*extérieur*, ou, dans le meilleur des cas, dans l'*adhérence* de l'ouvert de leurs connaissances anciennes. À la charge de l'élève, et par contrat, il reste à construire une sous-partie ouverte la plus judicieuse possible de cet ouvert de départ, une sous-partie susceptible d'être « fermée » par inclusion de bribes pertinentes d'organisations mathématiques solutions qui sont situées dans l'adhérence de l'ouvert ancien.

L'ambiguïté mentionnée plus haut peut être ainsi interprétée en termes topologiques : la nature de l'ouvert retenue peut influer dramatiquement sur l'extension de l'adhérence. Une légère restriction sur l'ouvert peut entraîner une restriction importante de l'adhérence possible. Constitué des reflets plus ou moins précis de l'organisation des savoirs antérieurement enseignés, cet ouvert de départ est structuré selon des niveaux de co-détermination didactique et traversé par les non-ostensifs qui sont appelés par les ostensifs du problème. C'est ce que montrent les exemples opposés de la partie I.

Dans le cas des systèmes, deux élèves se placent au niveau très vaste du domaine, et recherchent son « adhérence » dans un secteur inapproprié qui les conduit vers l'arithmétique et le PGCD. *A contrario,* dans le cas du développement de $(a+b)(c+d)$, le sujet appartient au même thème relatif au développement d'expressions algébriques, rencontré l'année précédente. Seule la technique reste à adapter afin d'en étendre sa portée ; « l'adhérence est à portée de mains » pourrait-on dire. Le cas de l'élève qui, elle aussi placée dans le vaste domaine du numérique, parvient néanmoins à une réponse exacte « en inventant » ostensifs et techniques appropriées, correspond à l'attente du professeur, ou plutôt du concepteur de l'ingénierie. Elle sollicite quelques-unes de ses connaissances pré-algébriques, construites au cours de sa scolarité, et que le projet du concepteur de l'ingénierie souhaite mobiliser pour les inscrire dans une dynamique du travail des organisations mathématiques dévolues, afin de les amener à la construction d'organisations mathématiques algébriques. Afin d'éviter que les deux élèves, Akim et Alexandre, ne s'engagent indûment dans le niveau de détermination didactique du secteur de l'arithmétique plutôt que celui de l'algèbre – et éviter ainsi cette « dévolution marginale » vers le PGCD -, une manière didactique de faire aurait pu consister à leur fournir, dès leur entrée dans le problème, les ostensifs appelant, en principe, des non ostensifs de nature algébrique. On dispose ainsi d'une variable didactique que les concepteurs de l'ingénierie ont, sciemment, décidé de ne pas activer à cet instant du processus didactique. C'est seulement après que les élèves auront éprouvé les limites des techniques pré-algébriques qu'ils mobilisent dans un premier temps, que leur seront donnés les ostensifs (x, y et les accolades) convoquant les non ostensifs (inconnue, équation notamment) relevant du secteur de l'algèbre qu'ils ont précédemment fréquenté.

Compte tenu du fait que l'enseignant ne peut – et ne pourra en pratique – jamais construire un système d'ostensifs totalement non ambiguë, nous soutiendrons ici que tout travail de préparation du milieu de ce type va faciliter la « dévolution commune » (c'est-à-dire permettre à un plus grand nombre d'élèves d'identifier le même problème), mais rendre plus difficile la dévolution réellement attendue par l'enseignant, dans la mesure où la reconnaissance de la tâche à accomplir ne sera plus que localement problématique.

Nous en arrivons donc à une situation assez paradoxale. Considérons une activité ayant pour objet l'acquisition d'une connaissance visée (i. e. la mise en place d'une organisation mathématique donnée). L'enseignant qui souhaite organiser, au mieux, le milieu propice à la correcte dévolution de l'activité en question, va tenter de jouer sur les ostensifs introduits pour diminuer les risques d'ambiguïté (comme, par exemple, le fait que des élèves interprètent les ostensifs proposées comme une invitation à accomplir des tâches arithmétiques et non algébriques). Non seulement ce « jeu » sur les ostensifs privilégie arbitrairement certains usages au détriment d'autres, mais, en outre, cet effacement des ambiguïtés a pour effet de rendre l'identification de l'usage attendu non problématique. Cela signifie que le travail d'identification du bloc practico-technique est en quelque sorte accompli par le milieu, et non par l'élève en interaction avec le milieu. Tout se passe comme si l'enseignant indiquait à l'élève les domaines, c'est-à-dire les leçons et les cahiers vers lesquels il doit se tourner pour s'engager dans la tâche voulue.

En cela, l'enseignant évalue, certes, l'aptitude de l'élève à interpréter les signes qui lui sont présentés, mais cette interprétation ne saurait être confondue avec une aptitude à opérer une sélection au travers de la mise en oeuvre de nouvelles pratiques mathématiques de résolution de problème. Une telle démarche de sélection produit des couples (O, NO), elle ne les suppose pas déjà existants. Ce ne sont donc pas les (O, NO) déjà construits institutionnellement par l'élève qui importent ici, ce sont les couples (O, NO) produits dans ces pratiques nouvelles qui sont au cœur de la démarche de sélection.

Il ne faut donc pas confondre dévolution d'un problème et mise en œuvre par l'élève de tentatives d'accomplissement d'une tâche. En indiquant à l'élève la tâche à accomplir, on facilite, bien entendu, son accomplissement possible. Mais en retour, accomplir une tâche peut ne rien produire comme connaissance nouvelle, donc ne pas faire évoluer le rapport au savoir. Ainsi en est-il par exemple si la tâche est parfaitement connue et exécutée par l'élève sur consigne du professeur. Il est important de souligner que la tâche n'a en elle-même d'intérêt que si elle initie une dynamique de production de couples (O,NO) « pertinents », qui permettront en retour de « guider » le repérage par l'élève de la tâche ultérieure adéquate. En terme de compréhension, cela signifie que la compréhension de l'élève l'amène à identifier des tâches pertinentes, et par suite, à affiner sa compréhension première, en éprouvant dans l'effectuation de ces tâches une structure practico-technique plus fine. La compréhension entraîne la compréhension dans le cadre de l'épreuve de cette compréhension première dans la pratique de résolution de problèmes.

Pour qu'il y ait véritablement dévolution du problème, il faut qu'il y ait au moins une tâche problématique, c'est-à-dire une tâche dont le repérage par l'élève repose sur des critères que l'élève a lui-même forgés, et qui ont conduit à la production de couples (O, NO). Les couples (O, NO) ne préexistent donc pas à la tâche dans laquelle ils interviennent. Ils ne constituent pas des signes de pistes pour trouver autre chose : ils sont très exactement les éléments à partir desquels émerge le rapport à l'objet.

Là encore et de manière plus nuancée, l'organisation du milieu aura souvent pour objectif de circonscrire le champ des usages possibles et non pas de le déterminer de manière univoque : en ce sens l'élève aura un réel travail de détermination du non ostensif visé et de mise en œuvre de la tâche attendue, qui aura pour effet de produire un nouveau rapport au non ostensif visé. Mais ce nouveau rapport n'enrichira que localement la connaissance de l'objet visé, puisque l'usage sélectionné appartiendra nécessairement au domaine circonscrit par l'organisation du milieu. Le caractère localement problématique de la dévolution proposée ne peut entraîner que la production d'un usage localement nouveau.

En d’autres termes, l’enseignant ne développe guère que l’aptitude des élèves à faire usage des ostensifs présentés dans le cadre restreint du domaine circonscrit. En diminuant l’ambiguïté, il diminue dans le même temps l’intérêt et la portée de l’activité proposée.

Mais on pourrait objecter que le paradoxe n’est qu’apparent, et qu’il suffit de progresser de situations faiblement ambiguës en situation faiblement ambiguës pour autoriser une acquisition exhaustive du rapport attendu à l’objet non ostensif visé par l’apprentissage. Le rapport attendu, c’est-à-dire le champ complet des usages possibles, constituant en quelque sorte une juxtaposition de domaines d’usage particuliers.

Ainsi, dans une vision « géographique » de la question, on pourrait assimiler le rapport « exhaustif » à un objet au rapport « exact » à cet objet, c’est-à-dire concevoir le rapport institutionnel à un objet comme potentiellement « partitionnable », chaque élément de la partition constituant dès lors un domaine susceptible d’être associé à un domaine circonscrit des usages possibles d’ostensifs donnés. Il suffirait alors, pour acquérir la connaissance visée, de mener toutes les activités élémentaires susceptibles d’autoriser la construction des usages élémentaires et donc des rapports élémentaires à l’objet.

La question porte donc ici sur la structure de l’espace des couples (O, NO) ou, ce qui revient au même, sur la structure de l’espace des pratiques qui ont affaire à un objet donné.

II. 5. Lecture Wittgensteinienne du paradoxe du contrat didactique

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de faire le rapprochement de ce paradoxe « géographique » avec les phénomènes de contrat didactique théorisés par Guy Brousseau dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986).

Les phénomènes de rupture de contrat sont des phénomènes de recherche de contrat : le professeur réaménage le milieu en fonction des réactions de l’élève mais ne doit pas se substituer au milieu sous peine de ne rien enseigner du tout. Il va par exemple donner suffisamment d’indications pour débloquer l’élève, mais pas assez pour que l’élève n’ait plus qu’à appliquer des consignes d’exécutions de tâches, pourquoi ? Parce que ce que le professeur recherche, au-delà de la maîtrise de l’utilisation procédurale de la notion en jeu, c’est sa « compréhension » (au sens Wittgensteinien du terme) par l’élève, c’est-à-dire la capacité de ce dernier à faire usage *à bon escient* de la notion donnée. Dans la perspective anthropologique, l’aptitude qu’aurait l’élève d’user à « bon escient » d’un concept sera interprétée comme le signe de *l’adéquation* entre le rapport de l’élève à l’objet et le rapport institutionnellement attendu par l’enseignant. L’élève qui a « compris » est celui qui a construit un bloc technologico-théorique qui rend compte de manière adéquate de l’organisation praxéologique qu’il a construite et qui est validée par l’institution.

Or, plus le professeur donne d’indications, plus il circonscrit le champ de l’usage possible de la notion par l’élève, moins il autorise une compréhension large – c’est-à-dire un usage riche – de la notion en question. Le caractère paradoxal réside justement dans cette impossibilité, pour l’enseignant, de dire à l’élève ce qu’il attend de lui sous peine de ne pas l’obtenir (Brousseau, 1986).

Et ce caractère paradoxal est indépassable, nous explique Wittgenstein (Cours de Cambridge 1932-1935), parce que la donnée d’une règle d’usage de la notion en jeu ne ferait que repousser le problème. En effet, il faudrait se donner ensuite une règle d’usage de la première règle, une sorte de métarègle qui donnerait l’emploi de la première règle, mais il faudrait alors une règle d’usage de cette métarègle et ce indéfiniment. Pourquoi indéfiniment ? Parce que s’il existait une métarègle d’usage ultime, cela signifierait (en redescendant les degrés) que l’usage du concept en question serait fixé de manière non équivoque, qu’il existerait une règle d’application universelle. Or, justement, le langage commun ne fonctionne pas comme cela.

La souplesse extraordinaire du langage, qui lui permet de supporter un nombre indéfini de signification avec un ensemble très limité de mots ne se prête pas à une détermination univoque de l'usage (c'est-à-dire ici du sens) des mots, une détermination théoriquement possible, mais pratiquement insensée : il faudrait en effet énoncer, avant d'employer un terme, toutes les conditions qui accompagneraient la détermination de l'usage que nous souhaitons en faire, et réciproquement, nous aurions besoin d'un nombre indéfini de repères sémiotiques pour saisir l'usage auquel fait référence notre interlocuteur.

La solution retenue de manière empirique dans le langage commun consiste à se satisfaire d'une ambiguïté minimale et à se donner des contextes usuels d'utilisation des mots, sorte de repères qui assurent une détermination presque univoque du mot. Ces contextes, que Wittgenstein nomme des « jeux de langages » ne sont justement pas des règles explicitables et explicitées de l'usage d'un mot (Wittgenstein, 1953). De telles règles ne feraient que reproduirent le paradoxe dénoncé plus haut. Il s'agit de contextes forgés par les interlocuteurs au gré de leur pratique de la langue : c'est au sein de ces « contextes » que les interlocuteurs peuvent éventuellement rectifier et préciser telle ou telle acception d'un mot pour qu'elle devienne commune *dans ce contexte là*.

L'objection que nous formulions plus haut pourrait être reproduite ici en d'autres termes : pourquoi le professeur ne peut-il pas donner à l'élève une règle d'emploi adaptée à l'usage présent ? Une règle locale d'usage qui pourrait permettre la bonne utilisation de la notion durant quelques semaines, et qui serait complétée ensuite par une autre règle d'usage, mieux adaptée au nouveau contexte. Finalement, le professeur ne fait pas autre chose que circonscrire un domaine restreint d'usage quand il donne des indications à l'élève. Le tout est qu'il n'en arrive pas à fixer l'usage de manière univoque – c'est-à-dire à donner une règle. Mais si justement il n'en arrive pas là, on décrit bien là le processus normal d'apprentissage. Pourquoi donc ne pas imaginer que l'élève apprend en concaténant des usages locaux ?

Parce que l'usage d'un mot ne s'apprend pas en faisant la somme des usages locaux. Si cela était possible, cela signifierait que le langage serait segmenté sémantiquement parlant. Or, cette segmentation induirait une inflation des repères d'usage, certes inférieure à l'inflation dénoncée tout à l'heure, mais tout de même de même nature. C'est grâce à son architecture fortement complexe, c'est-à-dire en particulier non hiérarchisée, que le langage peut posséder une telle souplesse. Ce n'est donc pas en concaténant des usages locaux que procède l'enseignant, mais en circonscrivant des domaines de plus en plus étendus. Par là, il tend asymptotiquement vers le seul recouvrement pertinent du champ total de l'usage du concept considéré.

II. 6. Proposition de formulation anthropologique du paradoxe

On peut étendre l'ensemble de ces remarques à l'approche anthropologique : le nombre d'ostensifs utilisables en classe n'est pas incomparablement supérieur aux mots de la langue, et ils doivent de la même manière pouvoir porter un nombre indéfini de couples (O, NO). Il s'ensuit que l'on peut faire l'hypothèse que l'ensemble des couples, c'est-à-dire l'ensemble des tâches, ou plus exactement l'ensemble des praxéologies, forme ce que l'on appellera ***un complexe*** : c'est-à-dire une entité fortement non hiérarchisée, dont il n'existe aucune partition privilégiée et que l'on ne peut munir d'aucune relation binaire privilégiée.

Toute classification des praxéologies selon les niveaux de co-détermination didactique produit une hiérarchisation de ce complexe qui a pour effet de restreindre le champ des usages possibles des non ostensifs associés. L'organisation du milieu selon les espaces dessinés par cette hiérarchisation ne peut entraîner que des dévolutions locales du concept, et aucune concaténation ne pourra entraîner de dévolution réellement globale.

En réalité, et toujours pour poursuivre le parallèle avec le travail de Wittgenstein, les institutions dans lesquelles sont pratiquées les mathématiques sont les seules structures susceptibles de pouvoir constituer des contextes locaux, c'est-à-dire des « jeux de langages anthropologiques », dans la mesure où elles informent justement les démarches d'explicitations des pratiques en leur sein, tout en ne faisant elles-mêmes l'objet d'aucune explicitation (à partir d'où pourraient-on les expliciter ?).

La reformulation anthropologique qui est présentée ne saurait être considérée comme achevée. Nous avons identifié les nœuds de convergences possibles, il reste à repenser l'ensemble de la problématique linguistique Wittgensteinienne dans la perspective anthropologique. Ce travail est en cours. Il s'appuie sur l'idée de faire porter cette problématique au-delà du langage, et de l'élargir à l'analyse des pratiques humaines dont le langage ne constitue, après tout, qu'une pratique parmi d'autres. On retrouve en ce point la problématique exposée au début de la thèse de M. Bosch (1994).

On voit cependant déjà ici comment le paradoxe décrit par G. Brousseau et reformulé en terme de règles, peut être étendu au cadre anthropologique en substituant à une règle la donnée d'un unique couple (O, NO) ou, ce qui revient au même, la donnée d'un ensemble d'ostensifs dont l'intersection « non ostensive » serait réduite à un singleton. Le niveau de compréhension d'un concept peut alors être défini comme l'étendue du domaine d'usage du concept et non comme l'union de domaines d'usage connexes. L'organisation du milieu influe ainsi très fortement sur le degré de compréhension probable des élèves à la fin de l'activité réussie. Faciliter la dévolution revient donc à limiter le degré de compréhension attendu du concept visé. Nous retrouvons très exactement les éléments qui forment le paradoxe du contrat didactique.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 33-115.

BROUSSEAU G. (1996) : L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *in Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, Noirfalise R. et Perrin-Glorian M-J. éds., IREM de Clermont-Ferrand, 3-46.

BROUSSEAU G. (1998) : *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

BOSCH M. (1994) : *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 77-124.

CHEVALLARD Y. (1988) : *Sur l'analyse didactique, deux études sur les notions de contrat et de situation*, brochure n°14, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (2004) : *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire*, communication à la 3e Université Animath, Saint Flour (Cantal), 22–27 août 2004.

MATHERON Y. (2001) : Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 207-246.

MATHERON Y. (2004) : Le rôle des niveaux de détermination didactique lors des processus de dévolution dans l'enseignement des mathématiques, *in Actes du Ve Congrès International d'Actualité de la Recherche en Education et en Formation*, 31 août & 1, 2, 3, 4 septembre 2004, CNAM, Paris, à paraître.

SARRAZY, B. (1995) : Le contrat didactique, [note de synthèse], *Revue Française de Pédagogie*, 1995, n° 112, p. 85-118.

WITTGENSTEIN, L. (1939) : *Cours sur les fondements des mathématiques, Cambridge 1939*, T.E.R., 1995.

WITTGENSTEIN, L. (1932-1935) : *Les Cours de Cambridge, 1932-1935*, T.E.R., 1992.

WITTGENSTEIN, L. (1953) *Recherches Philosophiques*, Gallimard, 1995.